

**www.e-rara.ch**

**Danielis Bernoulli ... Hydrodynamica, sive de viribus et motibus  
fluidorum commentarii**

**Bernoulli, Daniel**

**Argentorati, anno 1738**

**ETH-Bibliothek Zürich**

Shelf Mark: Rar 5503

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-3911>

---

**www.e-rara.ch**

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

---

**Nutzungsbedingungen** Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

**Terms of Use** This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

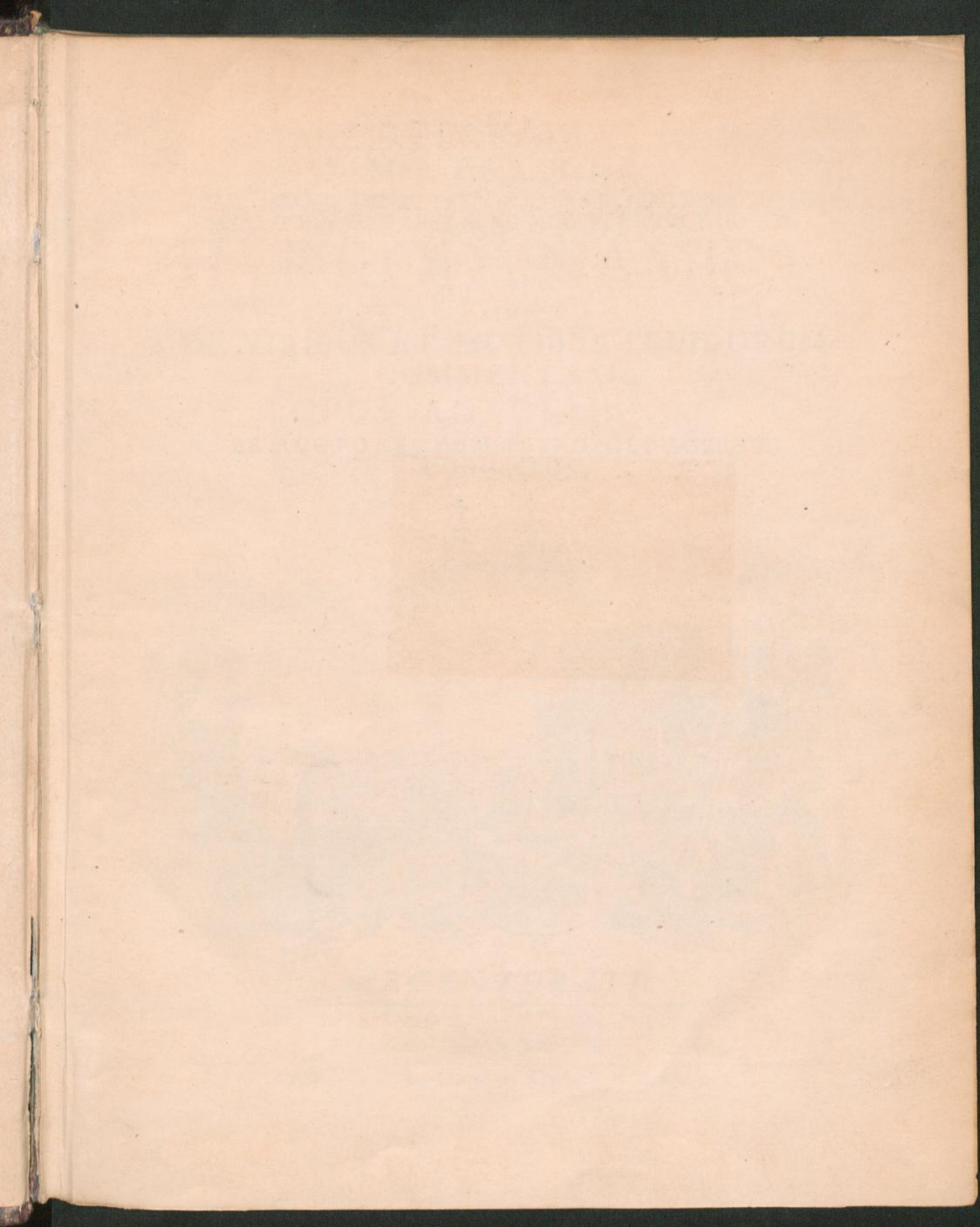
**Conditions d'utilisation** Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

**Condizioni di utilizzo** Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]



73175 (Rar)  
Rar 5503

Legat  
von Herrn  
Prof. Dr. R. Wolf.



73  
Rc

**DANIELIS BERNOULLI JOH. FIL.**

MED. PROF. BASIL.

ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESIOS  
SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.

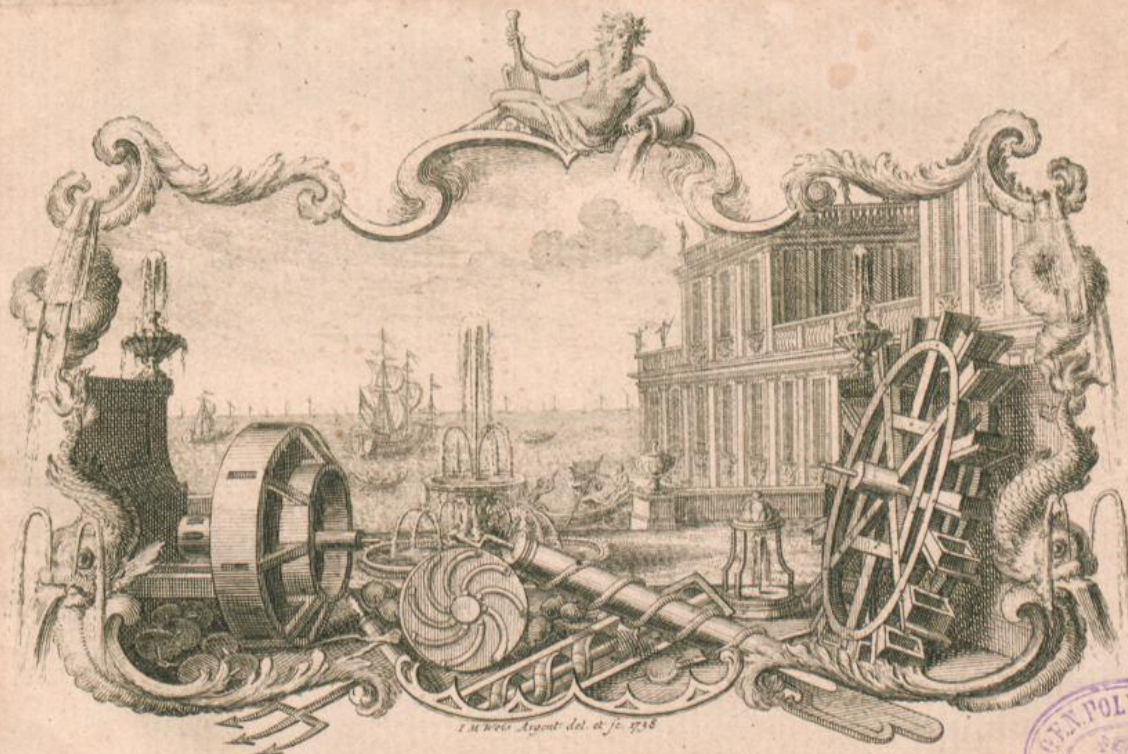
# **HYDRODYNAMICA,**

SIVE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM  
COMMENTARIUM.

**OPUS ACADEMICUM**

AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET,  
CONGESTUM,



**ARGENTORATI,**

**Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,**

Anno M D CC XXXVIII.

Typis JOH. HENR. DECKERI, Typographi Basiliensis.



MISSISSIPPI  
GEOGRAPHICAL  
SURVEY  
OF THE  
TERRITORY

1847

CELSISSIMO  
ATQUE  
SERENISSIMO  
PRINCIPI ET DOMINO  
DOMINO  
ERNESTO  
JOHANNI  
DEI GRATIA IN LIVONIA  
CURLANDIÆ  
ET  
SEM - GALLIÆ  
DUCI.

CELSISSIME ATQUE SERENISSIME  
PRINCEPS,  
DOMINE GRATIOSISSIME.



On ausus fuisset Serenissimo Nomini  
Tuo *Hydrodynamicam* hanc in-  
scribere, nisi illa Academiae Scien-  
tiarum, sub umbone Tuo Petropoli  
florentis, consilio & subsidiis a me  
conscripta fuisset. Novimus quan-  
tum Tibi, Serenissime Princeps,  
Magnanime Academiae Protector, post Augustam illam  
orbis borealis Palladem, debeamus, idque cum toto orbe  
literato, qui praeclara sibi porro ab Academia, amoenis  
benevolentiae Tuae radiis collustrata, pollicetur, pia &  
immortali recolemus memoria. Florebit in aeternitatis  
sacrario apud Russicam gentem Tuorum in illam merito-  
rum

rum magnitudo, apud Curlandos feliciū, quæ divina illis providentia sub Sceptro Tuo destinavit, factorum memoria : apud universas denique gentes gloriosissimæ Tuæ vitæ perpetua admiratio. Quam cara sit superis Russici Sceptri Majestas populique Tui felicitas, illustria temporum præsentium fata nos docent. Hi prosperos magnorum consiliorum eventus ; hi vitæ Tibi & Principatus diuturnitatem ; hi successores ex sanguine Tuo, virtutum Tuarum æmulos, longa serie ad omnem temporum profunditatem, orbe universo plaudente, largiantur. Ita vovet

SERENISSIME & CELSISSIME PRINCEPS  
DOMINE GRATIOSISSIME

*Celsitudinis Tuæ*

*Scrib. Basilea  
10. Mart. 1738.*

Humillimus & Obsequiosissimus  
*Servus*

DANIEL BERNOULLI.

## PRÆFATIO.

**P**rodit tandem in publicum Hydrodynamica nostra, superatis omnibus, quæ impressionem ejus ab octo fere annis morata sunt, obstaculis; lucem fortassis haud aspectura, si ad me solum omnis iste labor pertinuisset. Præcipuas enim huius operis partes auspiciis, consiliis, subsidiisque Academia Scientiarum Petropolitana deberi lubens profiteor. Ansam libro dedit ipsum ejus institutum, quo primi, qui ad eam formandam convenerunt, Professores, de argumento quodam utili & quantum fieri posset, novo Diatribam conscribere tenebantur, certe admonebantur. Theoriam de viribus & motibus fluidorum, nisi invita Minerva fuerit suscepta, argumentum esse nec inutile nec tritum, quisque facile largietur. Ut autem Lectoris tadium discuterem, rerum varietati imprimis operam dedi, præsertim in quinque posterioribus sectionibus, atque specimina inserui analytica, physica, mechanica, cum theoretica tum practica, nonnulla geometrica, nautica, astronomica & alia, quorum tamen expositionem operis suscepti ratio non tam ferre quam postulare visa fuit. Quæ festinanti exciderunt sphalmata, æquus harumque rerum intelligens Lector facile corriget. Unicus hujus scripti finis est, ut Academiae inservirem, cujus omnes labores eo collimant, ut bonarum literarum incrementa & publica commoda promoveat.

INDEX



# INDEX SECTIONUM.

## SECTIO PRIMA.

Introitus est variaque continet prænotanda.

pag. 1.

## SECTIO SECUNDA.

Agit de fluidis stagnantibus eorundemque æquilíbrio tum inter se tum ad alias potentias relato.

17.

## SECTIO TERTIA.

De Velocitatibus fluidorum ex vase utcumque formato per foramen qualecunque effluentium,

30.

## SECTIO QUARTA.

De variis temporibus, quæ in effluxu aquarum desiderari possunt,

61.

## SECTIO QUINTA.

De motu aquarum ex vasis constanter plenis,

90.

## SECTIO SEXTA.

De fluidorum motu non effluentium seu intra latera vasorum motorum, ubi præsertim de oscillationibus fluidorum.

111.

## SECTIO SEPTIMA.

De motu aquarum per vasa submersa, ubi præsertim exemplis ostenditur, quam insigniter utile sit principium conservationis virium vivarum, vel iis in casibus, quibus continué aliquid de illis perdi censendum est,

124.

SECTIO

## SECTIO OCTAVA.

De motu fluidorum, cum homogeneorum, tum heterogeneorum, per vasa irregularis & præruptæ structuræ, ubi ex theoria virium vivarum, quarum pars continuè absorbeatur, explicantur præcipue phænomena singularia fluidorum per plurima foramina trajectorum, præmissis regulis generalibus pro motibus fluidorum ubique definiendis, 143.

## SECTIO NONA.

De motu fluidorum, quæ non proprio pondere, sed potentia aliena ejiciuntur, ubi potissimum de machinis hydraulicis earundemque ultimo, qui dari potest, perfectionis gradu, 163.

## SECTIO DECIMA.

De affectionibus atque motibus fluidorum classicorum, præcipue aëris, 200.

## SECTIO UNDECIMA.

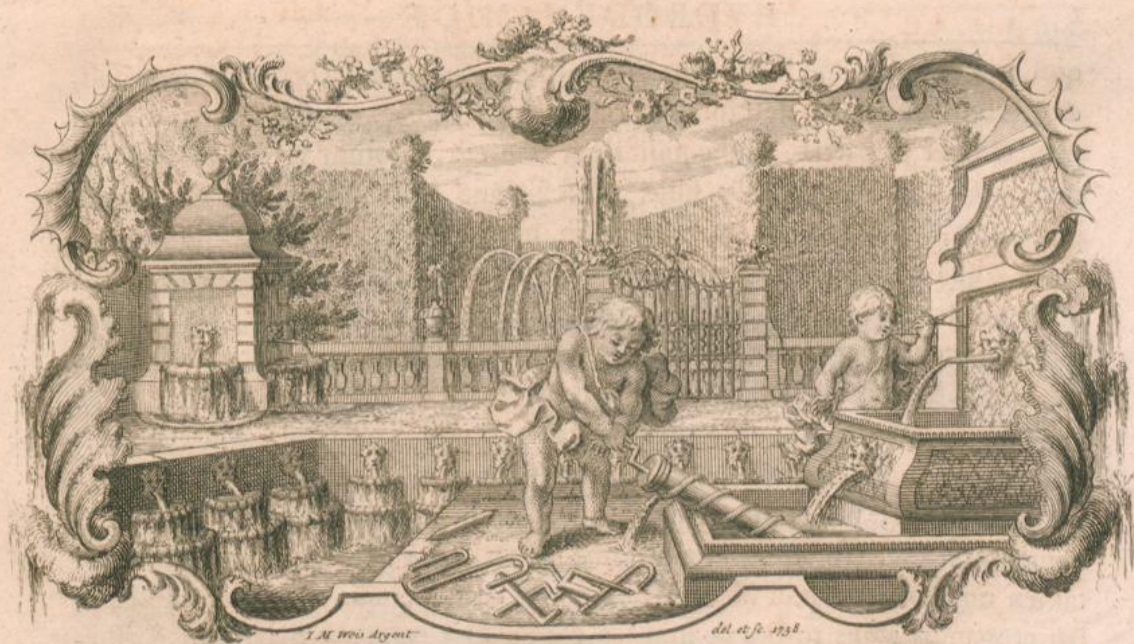
De fluidis in vorticem actis, tum etiam de iis, quæ in vasis motis continentur, 244.

## SECTIO DUODECIMA.

Novam staticam fluidorum motorum, quæ hydraulico-statica vocari potest, exhibet, 256.

## SECTIO DECIMA TERTIA.

De reactione fluidorum ex vasis effluentium, de mensura effectus, qui inde obtineri potest ad navigationem, ubi simul theoria nova pro fluidorum, postquam effluxerunt, impetu in plana quibus occurrunt definiendo exhibetur, 278.



# HYDRODYNAMICÆ

## SECTIO PRIMA.

*Quæ introitus est, variaque continet prenotanda.*

### §. I.

**D**uplex cum sit Theoria Fluidorum, quarum altera Hydrostatica, liquorum stagnantium pressiones & æquilibria varia, altera Hydraulica, fluidorum motum spectans, seorsum pertractari a scriptoribus consueverunt, utramque vero tam arcto nexu inter se cohærere perciperem, ut altera alterius ope plurimum egeat, haud dubitavi eas confundere, quantum id ordo rerum postulare videbatur, ambasque nomine communi & generaliori Hydrodynamicæ complecti. Quamvis autem ab antiquissimis temporibus fuerit continuo exulta Theoria fluidorum, incrementa tamen non admodum notabilia cepit; veterum quidem Mathematicorum cognitio eo terminabatur, quod æ-

A

qui-

quilibrium commune fluidorum stagnantium, aut etiam corporum cum fluidis, quibus insident, de quibus Archimedes scripsit, intelligebant; & cum præterea per se pateat, ubi æquilibrium non est, motum versus partem minoris pressionis fieri, varios lusus, machinasque hydraulicas hinc excogitare potuerunt, partim oblectationi, partim publicis commodis egregie inservientes, qua quidem in re peringeniosos se monstrarunt; videbant etiam, sed quasi per transfennam motus illos, qui pressionis aëris debentur: Veras autem rationes accuratasque mensuras in Hydraulicis rebus plane ignorabant, atque sic fere in limine subsistebant.

§. 2. Motui fluidorum determinando inservit præcipue effluxus aquæ ex vase per foramen valde parvum: tametsi vero non omnino fugeret Frontinum aliosque, uti aliqui credunt, velocitatem aquarum ex vase vel castello effluentium crescere ab aucta altitudine aquæ supra effluxus locum, negari tamen non potest, quin idem Frontinus in computandis aquarum modulis, seu erogandis aquis turpes & injustos commiserit errores. Benedictus Castellius primus de nexu velocitates inter & altitudines cogitare, falsam autem legem suspicatus est, putans, ambas eandem rationem sequi. Post hunc demum Torricellius observavit, velocitates crescere in subduplicatâ ratione altitudinum, quem secuti sunt omnes; nec dum vero conveniebant de absoluta velocitatis mensura, experimenta tamen instituerunt, qua istam mensuram definiri existimarunt, inter quæ potissimum allegari solet illud, quod a Gulielmino sumtum, octiesque repetitum fuit, quamvis id ab aliis experimentis ex illo tempore factis admodum recedat: solent autem omnia inter se differre, quæ sub diversis fiunt circumstantiis, nec semper tutum est, uti suo loco dicemus pluribus, ex quantitate aquæ, definito tempore per definitum lumen effluentis, iudicium ferre de ejusdem velocitate. Sic cum ad calculum revocamus experimentum Gulielminianum, cujus modo mentionem fecimus, concludendum esset ex quantitate aquæ, quæ per lumen datum tempore dato effluxit, velocitatem ejus non majorem fuisse illa, quæ debetur quartæ parti altitudinis superficiæ aqueæ supra foramen. Et alia sunt eodem Auctore experimenta, quæ recensentur *Lib. 2. prop. 1. mens. aquarum fluent*: vi quorum aqua effluens velocitate sua ascendere possit ad duas tertias istius altitudinis; Apud Mariottum aliosque extant, quæ pro dimidia altitudine faciunt; qua non obstante velocitatum ita æstimatarum diversitate, mihi persuadeo, vix a se invicem

vicem veras velocitates discrepasse, ratione habita ad altitudines aquæ & ubique tales proxime fuisse, quæ integræ altitudini debeantur : illa autem, quæ loco ultimo fuere citata, quæque pro dimidia altitudine prima fronte videntur stare, numero apud Authores plurima, movebant procul dubio Newtonum, Virum meritis suis immortalem, ut paulo confidentius loqueretur de Theoria, qua aquam per lumen minimum ex vase verticaliter sursum exilientem ad dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis ascendere posse invenerat, etsi assertum istud omnibus experimentis, quæ de his altitudinibus immediate sumta fuere, contradicat : Theoriam exposuit in *edit. prima princ. Math. phil. nat.*, eamque petiit ex pressione, qua aqua præ foramine posita moxque egressura ad motum cietur. Quoniam vero natura rei haud semper permittere videtur, ut *a priori* definiatur vis aquam ad effluxum animans, atque potius de ea vix aliter, quam ex phænomenis motus, id est, *a posteriori*, quod sæpe expertus sum, judicare licet, suspectum esse debet ratiocinium isti principio innixum. Hinc etiam Vir modo laudatus sententiam suam mutavit in secunda Operis sui editione, rursusque aliquantum in tertia, affirmans aquam ad totam quidem altitudinem ascendere, venam autem, quam efformat, præ foramine contrahi seu gracilescere, atque sic utrique phænomeno velocitatis quantitatisque dato tempore effluentis, quæ sibi contradicere videbantur, satisfaciens. Quamvis autem contractionem istam fili aquei veram esse causam, ob quam velocitas aquæ effluentis non possit æstimari ex quantitate, negandum non sit, puto tamen, Theoriam ipsi non esse superinstruendam, quia *accidentalis* est, nec sibi met ubique constans, dum velocitas non variat nisi a causis alienis veluti attritu, tenacitate aquæ, aliisque similibus. Sic cum aqua non per simplex foramen, sed per tubulum cylindricum effluit, vena notabiliter non contrahitur salva velocitate, excepto eo, quod propter attritum ei demitur : si quis autem hoc non obstante putet, ex pressione posse recte & tuto aquarum fluxum deduci, hunc rogarim, ut ad casus magis compositos animum advertat, v. gr. ad fluxum aquæ, quem mirabilem vocat Mariottus, ex vase, quod diaphragma aliquod foramine perforatum in duas cavitates aqua implendas dispescit, sic ut aqua per duo foramina transfluere cogatur : de hoc motu loquitur Mariottus in tractatu suo egregio *de motu aquarum part. IV. pag. m. 442.*

§. 3. Hæc cum ita sint, facile quisque secum judicabit, quam parum spei superfit, aliquando Leges motuum pro fluidis ad regulas Geometriæ puræ reductum iri, sine ulla hypothefi physica, cum vel in ipso limine effugerint perspicaciam Viri ingenio præpotentis & incomparabilis: neque ego credo posse ea, quæ in hoc opere expositurus sum, omnem rigorem mathematicum subire: Principia Theoriæ physica sunt & non sine largitione acceptanda ut proxime vera; admissis autem principiis, omnia erunt Geometrica, & nullis obnoxia restrictionibus, necessario nexu inter se cohærebunt. Non possum tamen, quam bene sentire de physicis istis positionibus, in quas forte incidi, quandoquidem me manuduxerunt ad plurimas novas proprietates, cum de æquilibrio tum de motu fluidorum detegendas, quæ, nisi me amor suscepti laboris fallit, aliquando Hydrodynamicam insigniter promovebunt, si magis excolantur, quam mihi licuit; ubi monuisse conveniet, quando multis, quicquid novum est, suspectum esse solet, totam me Theoriam animo concepisse, tractatum conscripisse, pleraque cum amicis privatim communicasse, quædam etiam coram Societate nostra prælegisse, priusquam ullum experimentum instituerim, ne ex præconceptis mensuris opinione falsa, proxime tamen illis satisfaciente, me falli paterer, quandoque etiam Viros perspicacissimos intellectus theorematis aperte falsos esse, se sibi talia persuadere non posse, nec experimentis confirmatum iri existimare; hisque omnibus gestis, facta demum fuisse experimenta coram Amicis, hæcque ita convenisse cum Theoria, quantum ipse vix sperare poteram. Nunc vero redeamus illuc, unde divertimus.

§. 4. Postquam certi fuerunt Authores de diversitate velocitatum a mutatis altitudinibus, vasa considerare cœperunt magis composita, fistulis nempe varie inclinatis atque inæqualiter amplis instructa. Harum autem indolem jam suo tempore quodammodo cognovit Frontinus, non ignarus, modulum augeri a declivitate vel humilitate calicis, id est, fistulæ signatæ, quæ castello, aut aliquando etiam rivo induebatur: unde etiam calices ad lineam, uti loquitur, ordinari & in eadem altitudine poni jussit. Et hoc quidem respectu injuste postulatur Frontinus, a quibusdam, velocitatis nullam habuisse rationem; ubi vero calculum ponit omnis aquæ acceptæ, illamque comparat cum eroganda, non video, quomodo excusari possit. Experientia quoque edoctus fuerat, quod notari meretur, plus debito aquæ erogari per calicem legiti-

legitimæ tum mensuræ, tum positionis, cui statim fistulæ amplioris moduli subiectæ sint, quod ita esse, recteque a Fabretto indicatum fuisse, suo loco monstrabo, quamvis Viri alias acutissimi, id non satis sibi liquere vel potius de eo se dubitare, innuerint.

§. 5. Quod autem veteres obscure & sine veris mensuris viderunt, id demum Cl. Gulielmus in *Tract. de aquarum fluentium mensura* propositione accuratiori & generaliori complexus est tali, *eandem velocitatem*, inquiens, *esse aquæ fluentis per canalem inclinatum, ac si fluxerit e vase per lumen simile, & æquale sectioni, tantundem a superficie aquæ remotum, quantum sectio ab Horizontali per initium alvei*, quam propositionem impugnavit Dionysius Papinus, ipse multum a veritate aberrans. Quoniam autem in eo sumus, ut commenta, tum Hydrostatica, tum Hydraulica præcipua recenseamus, hoc loco etiam numerandum est illud, de pressione fluidorum ex impetu cognoscenda, nempe *vim fluidi, in planum ad angulum rectum irruentis data velocitate, æqualem esse ponderi cylindrici fluidi super illo plano extracti, cujus altitudo talis sit, ex qua mobile libere cadendo a quiete fluidi velocitatem acquirat*. Problematis hujus utilissimi ope æstimare licet vim fluidorum machinas agitantium, aut, quale est ventus, naves propellentium, motus corporum in mediis resistentibus plurimæque alia. De Hydrostatica autem, quæ tubulis tenuissimis seu capillaribus particularis est, nihil dico, quia hætenus ad Leges generales omnibus fluidis communes reduci non potuit: Incertus præterea est Author, qui primus horum tubulorum indolem observaverit; constat tamen recentem esse observationem, quia de illa in libris ante hos 70. vel 80. annos editis nihil videre est.

§. 6. Authores præter citatos a Galilæi temporibus, in rebus aquariis celebriores sunt Torricellius, Borellus, Vivianus, Pascalius, Boilius, recentioris ætatis sunt Varignonius, Newtonus, Polenus, Hermannus, Jacobus & Johannes Bernoulli, quorum inventa extant in *Comment. Acad. Reg. Sc. Paris. Princ. Math. phil. nat. tractatu de Castellis* notisque ad Frontinum, *Phoronomia*, *Actis Lips.*, aliisque operibus variis. Quæ vero circa curvaturas ex pressione fluidi genitas aliaque hujusmodi inventa a Geometris exhibita fuerunt, quia facile ad Geometriam puram reducuntur, utut de reliquo omni laude digna silentio prætereo.

Expositis his, quæ ad alios pertinent, æquum esse sentio, ut meorum quoque ratione subducta, dicam sincere, an aliqua & quanta Hydrodynamicæ in-

crementa ab illis sperari possint aut debeant. Breviter igitur, quantum poterō, momenta operis suscepti indicabo.

§. 7. Exhibentur primo loco Theoremata præcipua, quæ ad æquilibrium fluidorum stagnantium pertinent: visa mihi fuit instituti ratio id postulare, quamvis libenter fatear, nullas a me novas adjectas fuisse propositiones: Demonstrandi quidem modus, quantum scio, mihi proprius est, sed cum facile sit, innumeras sibi fingere demonstrationes, parum est, hac quoque in parte, quod mihi arrego. Phænomena præterea aliqua tubulorum capillarium obiter recensentur, & denique occasione pressiois, quam fluida in latera vasis exercent, Theoremata varia & nonnulla nova adduntur, circa figuram vesicarum liquore impletarum, circa earundem potentias ad onera elevanda, circa constructionem & firmitatem aquæductuum, aliaque affinia.

§. 8. Agitur postea de motu fluidorum ex vase effluentium, & cum omnes, qui hætenus de hac re egerunt, casum unicum maxime obvium, quo foramen ratione amplitudinis vasis internæ infinite parvum censetur, in Theoria sua consideraverint, nostra non parum commendatur sua latitudine; extendit enim se ad positionem foraminis cujuscunque magnitudinis, imo & vasis cujuscunque figuræ. Quamvis enim figuræ vasis internæ consideratio minime requiritur, cum foramen ut infinite parvum considerari potest, attamen sine illa motus aquæ definiri nequit, cum est notabilis magnitudinis. Ex Theoria generali corollaria deducuntur, quæ motum aquarum variabilem ejusdemque affectiones egregie illustrant, confirmantque, quicquid aut experientia docuit, aut rei attributiones per se manifeste indicant. Docet quidem Theoria, quando amplitudines internæ vel mediocriter superant amplitudinem luminis, errorem esse insensibilem, qui ex consideratione foraminis ut infinite parvi nascitur, atque sic nostræ additiones nonnullis fortasse videbuntur satis inutiles. Hos vero, si modo qui futuri sint, secum cogitare velim, præter quod non solum aquariis scribo, sed & Geometris, qui veritatibus nudis etiam delectantur, usum nostrarum meditationum aliis in rebus maximum esse, quod magis intelligent, cum perpenderit, motum incipere a quiete, & per infinitos transire gradus, priusquam certam celeritatem obtineat; maximas mutationes sæpe quidem tam brevi fieri temporis momento, ut sensibus nullo plane modo percipi possint, determinandas tamen esse ad singula puncta, tum ut motus animo recte percipiatur, tum quia exinde varia deduci possunt Theoremata.

Ita

Ita animadverti, (quod exemplum ob rei momentum sit instar omnium,) fieri non posse, ut pressio aquæ, per canalem data velocitate fluentis, in ejusdem latera definiatur, nisi mutationes istæ, quas *momentaneas* dicam, utcunque sensibus inperceptibiles recte animo intelligantur. De his ego, ut primus cogitavi, ita optatissimo cum successu novam Theoriæ aquarum partem addidi, quæ, quia fluidorum tum motum tum pressionem simul respicit, *hydraulico - statica* aptissime vocari visa fuit. Post hæc Theoriæ generalis specimina, de vasis cylindricis tam simplicibus, quam iis, quæ tubis instructa sunt, exhibentur, & in his posterioribus præsertim determinantur mutationes, quæ ab initio fluxus oriuntur, dum datus velocitatis gradus attingitur, & id quidem in hypothesi vasorum amplissimorum; notandum autem est, has mutationes sensibiles admodum esse, etiamsi vasa sunt infinitæ amplitudinis, posseque illas experimentis demonstrari, dum aquæ ex vase amplissimo per foramen simplex effluentes primo statim temporis puncto totam, quantam possunt, velocitatem habent. Pendent prædictæ mutationes tum a longitudine tum a figura tubi. Denique etiam calculi analytici pro varii generis temporibus inveniendis una cum annotationibus physicis eo pertinentibus adjiciuntur. Indicante denique Theoria, fieri non posse, ut aquæ multum ultra supremam scaturiginis superficiem ascendant, monstratur sub fine sectionis, non pertinere ad hypothesen nostras phænomenon singulare, quod ipse sæpius observavi, & pro lubitu imitari possum, cujusque mentio injicitur in *Hist. Reg. Acad. Sc. Paris. ad ann. 1702.* ubi dicitur, accidere quandoque, ut aquæ in fontibus salientibus assurgant ad altitudinem triplam, aut quadruplam ejus, quæ respondet aquæ superficiei supremæ, mox tamen enormem aquæ jactum ad consuetam altitudinem deprimi, posteaque genuina istius phænomeni ratio cum veris mensuris ex Theoria nostra petitis affertur, modusque indicatur saltum insolitum producendi, imo & ad lubitum augendi.

§. 9. Porro Theoria extenditur ad examen motuum ex vasis constanter plenis, quibus nempe tantum aquæ continue affunditur, quantum ex illis effluit: horum indoles in eo potissimum consistit, ut fluida emanantia magis magisque accedant ad illum velocitatis gradum, qui toti altitudini superficiei fluidi supra foramen debetur, eum vero nunquam omnino attingant, nisi post tempus infinitum: vergere tamen demonstrantur aquæ tam cito ad velocitatem istam, ut post tempusculum insensibile tantum non totam acquirant, nisi cum

cum per longissimos rivos aut aquæductus feruntur, magnoque lumine ejiciuntur; tunc enim accelerationes tam celeres non sunt, quin percipi possint, quod singulari exemplo ex Cl. Mariotti libro *de motu aquarum* desumpto confirmatur. Quoniam vero motus a quiete incipit & perpetuo crescit, formulæ dantur, quarum ope vel ex fluxus tempore vel ex quantitate aquarum ejectarum velocitas singulis temporis punctis definiri possit & vicissim.

§. 10. In sequentibus fluida considerantur, quæ intra vasa moventur, ubi præsertim motus fluidorum reciproci seu oscillatorii ad mensuras revocantur, earumque affectiones indicantur. Dedit autem Newtonus Theorema simile pro oscillationibus fluidi, in tubo uniformis amplitudinis (cujus crura duo extrema verticalia, intermedia pars horizontalis) oscillantis, quod Theorema Pater meus in *Comm. Acad. Imp. Sc. Petrop. tom. 2. p. 201.* generalius reddidit posita inclinatione qualicunque crurum extremorum versus horizontem. Nostra Theoria totam rem sine ulla restrictione complectitur, tubos considerans in singulis locis directione seu positione atque amplitudine pro lubitu variabiles: ostenditur dein, quibus in casibus fiat, ut oscillationes diversæ excursionis sint Isochronæ, quibus stantibus longitudo penduli simplicis Isochroni generalissime determinatur. Sed & præter hoc oscillationum genus in subsequente sectione quædam aliæ examini subjiciuntur, veluti illæ, quæ fiunt in tubis aquæ infinitæ vel etiam terminatæ immerfis, in quibus singulari circumspectione opus est, qua adhibita omnia phænomena calculo ad amussim respondent, eadem vero neglecta tantus fit inter ea dissensus, quantus est inter leges motus, quæ pro corporibus perfecte elasticis, iisque quæ pro mollibus valent.

§. 11. Post hæc ad alia magis composita progredior, motum nempe fluidorum considerans sive homogeneorum sive heterogeneorum, quæ per unum aut plura foramina transfluere coguntur, priusquam ejiciantur in aërem, ubi regula illa communiter recepta de saltu aquæ ad supremam aquæ libellam vehementer fallit, cessantibus etiam legibus pressioni ordinariis. Horum autem omnium apud Authores ne vestigium quidem reperitur, nisi quod Mariottus habet, loco supra citato *part. IV. p. m. 442. de motu aquar.* ubi quidem fluxum aquarum retardari, fuisse se experientia edoctum, testatur, simul autem manifestat, quam procul abfuerit a vera horum motuum Theoria, & videtur sane hæc Theoria omnium fere principiorum, adhuc in rebus similibus adhiberi solitorum, vim eludere, ita ut nihil sit, quod nostrorum præstantiam magis confirmet:

firmet: de eorum veritate enim experimenta instituta me amplius dubitare non sinunt. Non deest autem hisce meditatis sua utilitas, quandoquidem magni momenti esse possint in perficiendis machinis hydraulicis.

§. 12. Sequuntur commentationes de machinis hydraulicis, quibus potissimum monstratur, certum quendam perfectionis terminum esse, ultra quem ire non liceat; defectus autem ab ultimo hoc perfectionis gradu in multis machinis maxime receptis calculo numerico subjiciuntur, additis regulis seu præceptis, ad quæ in construendis novis machinamentis animus sit advertendus: exempli loco affertur notissima per totum orbem machina Marlyensis, de qua monstratur, si modo descriptionibus fidendum sit, quod non ultra quinquagesimam sextam prope partem suppeditet ejus aquæ quantitatis, quam cæteris paribus machina perfectissima theoretice subministrare queat. Speciale etiam examen instituitur de machina ab antiquissimis temporibus ad nostram usque ætatem usitatissima, Cochlea nimirum Archimedis, attentione Geometrarum non indigna, tam ratione eorum, quæ ad Geometriam puram, quam quæ ad Hydraulicam pertinent.

§. 13. Succedunt specimina quædam de motu fluidorum elasticorum, veluti aëris & pulveris pyrii accensi, præmis his, quæ ad naturam horum fluidorum pertinent; quæ vero ipse non aliter, quam ut hypothefes physicas considero, de quibus nihil confidenter affirmabo. Propositiones & Problemata hujus sectionis nova sunt, & eo selecta animo, ut multis quæstionibus physicis illustrandis, aut etiam solvendis occasionem præbere possint. Adjiciuntur quædam de æstimatione virium vivarum fluidis elasticis insitarum, quæ aliquando fortasse in praxi mechanica nonnullius usus erunt: monstratur enim, unius v. gr. libræ pulveris pyrii accensi effectum in elevandis ponderibus majorem esse posse, quam vel centum homines robustissimi labore continuo intra unius diei spatium efficere possint.

§. 14. Agitur porro de fluidorum motu circulari, ut & de fluidis, quæ in vasis motis stagnant; variaque alia intermiscentur. Quæ autem de motu circulari proferuntur, inservire quodammodo possunt ad phænomena gravitatis per vortices explicanda; cætera valeant, quantum poterunt.

§. 15. Præmissa Theoria motuum, rursus ad æquilibria fluidorum descenditur, sed fluidorum motorum, quorum leges exhibitæ nondum fuerunt. Mirum est, cum alias motus ex pressione definiatur, hic inversa methodo pres-

sionem ex motu peti, prius ex circumstantiis definendo; nec crediderim aliam viam tuto iniri posse præter eam, quam ego secutus sum: consideravi autem canalem, per quem aquæ fluunt eo in loco eoque temporis puncto, quæ quæstioni conveniunt, amputatum; posteaque per regulas nostras præmissas accelerationem indagavi particulæ aquæ imminentis, proximeque effluxuræ. Ex ista acceleratione colligere licebat compressionem illius particulæ aqueæ, quæ compressio per naturam fluidorum æqualis est pressioni in latera canalıs. Cognita hac pressione apparet, quid fieri debeat, si canalıs eodem in loco perforatus fuerit, tubulusque foramini respondeat; fore nempe, ut aqua in eo ascendat ad certum usque gradum stagnans in tubulo, & ab aqua inferius per canalem præterfluente sustentata, sic, ut hic æquilibrium adsit inter aquas fluentes & stagnantes: hoc vero nomine Theoriam istam *hydraulico-staticam* commode vocari posse existimavi. Notari porro meretur, ipsam hanc Theoriam fundamentum rursus esse & fontem aliorum motuum antehac incognitorum. Theoremata, quæ exponuntur, non nova solum, sed & pleraque inexpectata sunt, quorum omnium veritatem nec ipse plane mihi persuadere potui, priusquam experimenta instituissem, quæ mihi omnem scrupulum demebant. Habent autem insignem usum, quandoquidem iis innititur vera pressionis aquarum, per aquæductus seu rivos fluentium, æstimatio, hincque deducendæ tuborum firmitates requisitæ. Inde quoque pendent accuratæ mensuræ aquarum per modulos, rivo lateraliter insertos, erogatarum: in Physiologia rectius jam intelligentur, quæ pertinent ad motum humorum in corpore animali, & quæ sunt alia.

§. 16. Denique progredior ad alios quosdam modos, quibus aqua nimum facere potest, explicandos: ita nempe aqua, dum per foramen effluit, in contrarium premit vas non aliter, atque globus retropellit tormentum, ex quo exploditur: istius retropulsionis plures proprietates deteguntur novæ, quæ pressionum naturam egregie illustrant, earumque leges, quas affectant, generales in mechanicis rem istam ferio meditantibus indicabunt. Has disquisitiones feci, quia mihi visum est, posse ea novæ aliquando navigationi sine remorum; aut venti adminiculo excogitandæ occasionem præbere; qua de re suo loco pauca quædam afferam, etsi non ignoro, omnium huiusmodi rerum primordia per se plerisque videri ridicula. Tandem etiam de vi aquarum ex impulsu hincque nato renixu, quam corpora in fluidis mota offendunt, Theoremata quædam adjiciuntur.

§. 17.

§. 17. Et hæc quidem sunt, quæ mihi ex admislis principiis geometricam deductionem pati visa sunt. Quoniam vero nihil est in Theoria tam rigorose demonstratum, quod non in applicatione ad corpora restrictionem aliquam postulet, ideo facile apparet, nec ullam Theoriam de fluidis expectandam esse, quæ omnibus mensuris experientia cognitis plenissime satisfaciat; cujus rei memores esse velim, qui Theoremata nostra experimentis confirmare voluerint. Ubique invenient quidem aliquem consensum, sed non perfectum, eumque modo strictiorem, modo laxiorem, pro rerum circumstantiis. Quoties autem ipse aliquod experimentum effeci, ante omnia mecum perpendi, quousque principia Theoriæ cum casu proposito congruerent; atque sic me nunquam aut rarissime eventus fefellit. Non solum enim prævidere solebam, in quam partem futura esset differentia, si quæ notabilis esse debebat, sed & quanta; quod ipsum, si recte judico, satis manifestat, fluida affectare quidem leges, quas ipsis præscriptas esse ponimus, obstacula autem ubique offendere nunc majora, nunc minora. Cæterum experimenta institui non pauca, quorum singula in fine sectionis, ad quam pertinent, locavi: præsertim vero sollicitus fui, in propositionibus antea incognitis & plerisque fat paradoxis confirmandis. De experimentorum fide non est, quod quis dubitet, cum præcipua coram Amicis eaque post publicatam Theoriam fecerim; magnam tamen experimentorum, quæ animo concepi, partem, quando per singula ire non licet, aliis relinquens instituendam. Perlectis nostris propositionibus quisque sibi finget innumera, neque proin opus esse judicavi, omnia, qualia sunt a me desiderata, exponere; exposui tamen aliqua.

§. 18. Jam vero tandem principiorum, quorum toties mentionem fecimus, ratio reddenda est. Præcipuum est *conservatio virium vivarum*, seu, ut ego loquor, *æqualitas inter descensum actualem ascensumque potentialem*: Utar hac posteriore voce, quia idem quod altera significat, sortem autem apud nonnullos Philosophos, qui vel ad solum *vis vivæ* nomen moventur, magis benignam fortasse experietur. Puto, hic e re nostra fore, hac de re paulo copiosius dicere.

§. 19. Postquam Galilæus docuisset, corpus, sive verticaliter, sive super plano utcunque incurvato, descendens eandem velocitatem acquirere, modo altitudo lapsus sit eadem, quod ex natura pressorum demonstrari potest, Hugenus eadem hac propositione, sed generaliori pro hypothese feliciter usus

est in eruendis legibus motuum corporum elasticorum ex percussione, nec non in stabiliendo centro oscillationis penduli compositi; protulit autem axioma hoc suum talibus verbis: *Si pondera quotlibet vi gravitatis suæ moveri incipiant utcumque, singulaque rursus ad quietem sponte reducantur, centrum gravitatis ex ipsis compositæ ad pristinam altitudinem reditum esse, ubi per vocem utcumque intelligit, sive se percutiant inter descensum, sive premant, aliove modo in se invicem agant corpora.* Ex isto axioma statim sequitur principium conservationis virium vivarum, quod ipse etiam Hugenius demonstravit, & quo assumitur: *Si pondera quotlibet vi gravitatis suæ moveri incipiant utcumque, singulorum velocitates ubique tales fore, ut producta, ex earum quadratis in suas massas collecta, sint proportionalia altitudini verticali, per quam centrum gravitatis ex corporibus compositæ descendit, multiplicatæ per massas omnium.* Mirum est, quantam habeat hæc hypothesis in Philosophia mechanica utilitatem, quod, si quis alius, fane Pater meus recte animadvertit, qui id sparsim, imprimis autem in *Dissertatione Parisiensi edita de legibus motuum* & in *Tom. 2. Comment. Acad. Imp. Sc. Petrop.* ostendit, idemque est, quod pro investigandis Legibus motuum, ex propria gravitate ortorum, in fluidis adhibui; posui enim velocitates particularum constanter tales esse, ut, singulis verticaliter sursum motis ad statum quietis usque, centrum earum gravitatis commune ad pristinam altitudinem ascendat: malui autem ob rationem supra dictam hanc hypothesin verbis Hugenianis quam Paternis accommodare, eamque nomine æqualitatis inter descensum actualem ascensumque potentialem insignire, quam altero conservationis virium vivarum, quod etiamnum aliqui, præsertim in Anglia, nescio quo fato, fastidiunt. Mihi quidem in tota doctrina Leibnitiana de viribus vivis nihil esse videtur, de quo non omnes, suo tamen quavis loquendi modo, convenient, quod, ni fallor, clare ostendi in *Comm. Acad. Sc. Imp. Petrop. Tom. I. p. 131. & seq.* quem locum hic allegare volui, ne quis Lectorum se verbis offendi patiatur, sciatque nihil a me accipi, quod in Mechanica receptum non sit ab omnibus, & quod non necessario nexu cohæreat cum eo, quod jam Galilæus posuit, cum statueret, incrementa velocitatum proportionem sequi compositam ex pressionibus & momentis temporum.

§. 20. De cætero quamvis principium prædictum universale sit, non tamen est sine circumspeditione adhibendum, quia sæpe contingit, ut motus transeat in materiam alienam. Ita verbi gratia positio illius valet pro regulis motuum ex percussione eruendis, si modo corpora sint perfecte elastica; sed

fed cum talia non funt, facile eft videre, partem *virium vivarum* five *afcenfus potentialis* in compreffionem corporum impenfam corporibus non reftitui, fed materiæ cuidam subtili, ad quam tranfit, impreffam hæere: fi tamen res recte confideretur, quum ratio cognofcitur, quæ eft inter partem corporibus refiduam, eamque quæ ad materiam subtilem tranfit; apparebit, facile occurrere poffe ifti incommodo, ficque recte definiri leges motuum pro corporibus mollibus. Simile quid fuccedit in motu aquarum computando, ubi quandoque manifefturn eft, partem *afcenfus potentialis* continue perdi; cuius utique rei in fubducendo calculo ratio habenda eft: ad quod probe attento multa de aquarum fluxu Theoremata novæ mihi contigit detegere, quæ videre eft in Sect. Sext. & Sept. & de quibus nondum video, an ulla alia methodo demonftrari nedum excogitari poffint.

§. 21. Sic igitur non incautus principio noftro ufus fum, hocque modo non folum de motu aquarum, fed & de earum preffione, quod mirum videri poteft, multa antea incognita fe offerunt, quæ nondum inftituta Analyfi nemo facile præviderit nec expectarit. Quum vero fit, ut *afcenfus potentialis* nec omnis confervari poffit ex rei natura, nec prævideri, quanta pars abforbeatur, non fatis accurate motus fluidorum determinari poteft, nec puto, ulla alia methodo poffe. Igitur Lectorem cautum effe velim in corollariis ex Theoria nofta deducendis, quæ sæpe propter mutatas circumftantias non accurate cum experimentis convenire poterunt.

§. 22. Ex præmemoratis jam fatis liquet, ex nofta methodo requiri, ut fingularum particularum fluidi definiatur velocitas ex affumta velocitate, quæ eft aliquo in loco, veluti in loco effluxus. Necesse proin fuit, aliam fuperaddere hypothefin, quæ hæc eft: poftquam fcilicet mente concepimus divifum fluidum in ftrata, ad directionem motus perpendicularia, ponemus fluidi particulas ejusdem ftrati eadem velocitate moveri, ita, ut ubique velocitas fluidi reciproce proportionalis fit amplitudini vasis respondentis. Ufita ta eft hæc hypothefis, quamvis cæterum notum fit, fluidum ad latera vasis paullo tardius, in medio autem velocius moveri, quod ab attritu fit, aliasque etiam exceptiones fubinde effe faciendas; error tamen notabilis ab hujusmodi defectibus rariffime poteft oriri.

§. 23. Finiam hæcce de hypothefibus noftis præmonita recenfione phænomenorum, quæ confervationem *virium vivarum* in motu fluidorum ali-

quantum & illustrare & confirmare poterunt : eorum quidem in ipso opere plurima occurrent, quæ autem ob calculum, quem postulant, non allegabo. Triviale autem & obvium est, quod de gutta, in aquam stagnantem delapsa, observatur : orbes nempe excitat in superficie aquæ stagnantis, horumque eo plures, quo vel major fuerit gutta, vel altius delapsa, nec dubium est, quin isti orbes sine fine se propagaturi essent, nisi tenacitas fluidi, aliaque similia obstaculo essent. Quandoque etiam alium effectum ab huiusmodi stillis observare licet ; dum plures guttulæ minores a superficie aquæ inferioris in altum projiciuntur, tuncque constanter apparet, quod præsertim huc pertinet, eo altius assurgere guttulas, quo pauciores numero atque minores volumine fuerint, & cum altitudo lapsus esset duorum pedum, sæpius guttulæ minores ultra altitudinem lapsus ascendebant, stillante præsertim aqua per foramen magnum. Hic notatu quoque dignum est illud, quod de particula aquæ per canalem tenuem, eumque v. gr. horizontalem, atque in ea extremitate, versus quam aqua fluit, operculo perforato opertum observatur. Scilicet eo temporis puncto, quo aqua ad operculum usque pervenit, magno impetu paucae guttulæ exiliunt, moxque omnis aquæ motus sistitur ; facile autem quis suspicari posset, aquam foramini imminem suam velocitate moveri pergere, reliquam sisti, id vero conservationi *virium vivarum* minime responderet ; respondet autem egregie vehemens iste aquæ effluxus *momentaneus*, vel quasi explosio : de his alibi plura.

§. 24. Hæc sunt, quæ de hypothefibus nostris, earumque tum præstantia tum defectu volui in antecessum monere. Supereft ut quædam dicam de indole fluidorum, quippe circa quæ lucubrationes nostræ versabuntur, non quod eam me aliis magis perspectam habere putem, sed quod nefas existimem, a more hoc scriptoribus omnibus solenni recedere. Et primo quidem hoc omnes convenire solent, motum fluidis quibusvis inesse intestinum, sine quo nemo profecto tantam fluiditatem, effervescentias diversorum fluidorum, dissolutiones solidorum fluidis submersorum, evaporationes, aliaque phænomena infinita recte assequetur ; hinc pleræque res solidissimæ a sufficiente calore, qui omnia in motum rapit, liquecunt : facit autem motus iste intestinalis, ut particulæ sibi non sint contiguæ, sed quasi volitent, quo fit, ut sine frictione a minimo impulsu loco cedant, quod minime succederet, positis iisdem particulis inter se, sicut in acervo arenæ, contiguas. Ita facile intel-

lectu

lectu est, pollinem ex putaminibus ovorum in patella igni superimpositum lac bulliens, quod dicitur, mentiri. Quo intensior autem est calor, eo vehementior utique est motus particularum, hæque majori intervallo a se invicem dispersæ; quod convenit cum dilatatione omnium fluidorum ab aucto calore, eorundemque contractione ex frigore, cui legi ipsa etiam aqua nondum congelata subjicitur: quod autem, dum congelatur, contrariæ sit indolis, id ex alia causâ, fortuito superveniente, deducendum videtur, nempe ex eo, quod aqua in interstitiis suis particulas foveat æreas, quæ sic volumen aquæ non augment, prouti saccharum in aqua solutum non auget ejusdem volumen; quod tempore instantis congelationis particularum aquearum motus minuatur; quod sic eadem particulæ magis ad se invicem accedant, adeoque ex interstitiis suis particulas æreas pellant, quæ alibi minus commode locatæ volumen augere possunt, prouti saccharum nondum solutum volumen auget aquæ, cui permistum est. Hinc commode ratio deducitur, cur glacies aquæ ab ære ante congelationem bene purgatæ non specificè levior, quin potius gravior fiat. Egregia autem experimenta circa solutionem veram æris in aqua ad punctum saturationis usque instituit Mariottus, eaque in Tractatu suo *de motu aquarum* recensuit. Suspicioni igitur locus est, fluida (ut dixi) congelari, cum cessat vel valde diminuitur motus intestinus, tum enim particulæ in se invicem collabuntur, fiuntque contiguæ, simulque ex interstitiis particulas heterogeneas, si quæ ibi commorentur, expellunt; nec tamen clarius hinc intelligitur durities corporum congelatorum, quinimo videtur, cessante isto motu corpus mediæ naturæ inter fluidum & solidum, nisi aliud quid accedat, fieri, & comparandum cum acervo arenæ: quid autem id rei sit, ne conjectura quidem assequor, licebit interim fingere quaslibet particulas ad se gravitare, vel, ut voce Anglis usitata utar, se invicem attrahere, attractionemque insigniter crescere, accedentibus ad se invicem particulis; diversæ esse virtutis in diversis corporibus, minoris v. g. in oleis quam in aquis, quarum glacies durior est; fluida citius & facilius congelari, quorum particulæ vel fortius se attrahunt vel motu lentiori agitantur. Exinde conjicere liceret, aquam saccharo vel sale imprægnatam tardius congelari, quod particulæ sacchari vel salis, particulis aqueis interpositæ, harum attractionem diminuunt, neque hæ conjungi possint, siccidumque congelari, quin particulæ heterogeneæ loco pellantur: & certe omnibus in fluidis, quæ

quæ particulis heterogeneis sunt imprægnata, tempore congelationis fit quædam partium ex poris expulſio, ſeu ſecretio atque præcipitatio. Infinita ſunt alia corporum tum ſolidorum tum fluidorum phænomena, quæ mire admodum cum principio mutuæ gravitationis conveniunt, ita, ut dolendum ſit, principium ipſum tam alte ſupra mentem humanam poſitum eſſe, ut neminem eſſe putem, qui id ullo modo intelligere poſſit.

§. 25. Denique hic monuiſſe conveniet, tractatum hunc ut Phyſicum potius quam Mathematicum mihi conſiderari, nec proin conſultum me duxiſſe, methodum Geometricam in hypotheſibus, definitionibus cæterisque apparatus præmittendis nimium affectare, & ubique ordinem ſermonemque Geometrarum ſequi, qui ſolent ab ovo ordiri, propoſitionibus complecti, & eo ordine omnia pertractare, ut ex primis præmiſſis ſingula rite deducantur, nihilque indemonſtratum poſt ſe relinquant, quamvis id a tot aliis jam demonſtratum fuerit. Non mihi hæc cura fuit ratione eorum, quæ ab aliis tradita ſunt, ſive definitiones fuerint & axiomata, ſive etiam theoremata, non omiſi tamen demonſtrationes eorum, quæ nova ſunt, imo etiam in prima ſectione apponuntur demonſtrationes Theorematum, ab aliis paſſim demonſtratorum; & cum quidam occurrant termini, ab aliis non explicati nec uſitati, horum definitiones in ipſo textu exhibebo. Cætera modo ſub forma Propoſitionum, Theorematum, Problematum, Corollariorum, Scholiorumque pro more Geometrarum proponam, modo etiam ſermonem continuo explicata dabo.

Unum ſupereſt, de quo Lectorem præmonitum potiſſimum volo: non potuiſſe me huic operi eam adhibere ſive diligentiam ſive attentionem, quam debuiffem, & quam ipſe deſideravi. Nullus adeoque dubito, quin nonnulli irreperint errores, dum calculos ponerem, quos, ſpero, nemo ſiniſtre explicabit: aliquos, qui in oculos incurrerunt, dum tractatum leviter relegerem, ipſe correxi; alios tamen etiamnum ſupereſſe mihi perſuadeo.

HYDRO.

## HYDRODYNAMICÆ

## SECTIO SECUNDA,

*Quæ agit de fluidis stagnantibus eorundemque  
æquilibrio tum inter se, tum ad alias po-  
tentias relato.*

## Theorema I.

## §. I.



Superficies fluidi stagnantis horizonti est parallela.

## Demonstratio.

Contineat vas  $ABCD$  (Fig. 1.) fluidum  $EBCF$ , cu-  
jus superficies  $EGF$ , si fieri possit, horizonti non sit parallela : confi-  
deretur guttula in loco eminentiori  $a$ , quæ gravitate sua verticaliter  
deorsum sollicitatur vi repræsentata per  $ac$ , resolvatur hæc vis in duas  
collaterales  $ad$  &  $ab$  alteram perpendicularem ad superficiem, alte-  
ram quæ tangat illam : Cum autem nihil adsit, quod huic vi posteriori  
resistat, hæc non potest non effectum suum exerere, ipsamque adeo  
guttulam versus  $E$  trahere, quod esset contra hypothesein stagnationis, seu  
status permanentis : Igitur necesse est, ut vis tangentialis  $ab$  ubique nulla  
sit, quod non aliter contingit, quam cum superficies tota horizonti est  
parallela. Q. E. D.

## Corollarium.

§. 2. Hinc intelligitur veritas propositionis generalis, quod nempe  
superficies fluidi, cujus partes viribus quibuscunque sollicitantur, se  
ita semper componat, ut quælibet guttula, in superficie posita, trahatur  
sub directione, ad superficiem perpendiculari.

C

Theo-

## Theorema 2.

§. 3. Fluidum homogœneum, duobus tubis communicantibus utcunque formatis inclusum, ad æquilibrium est compositum, quando ambæ superficies ad libellam positæ sunt, id est, æqualem à puncto vasis infimo distantiam verticalem servant.

## Demonstratio.

Fig. 2. Sit fluidum vasi ABC, (Fig. 2.) ex duobus cruribus seu tubis communicantibus composito inclusum, ponaturque in utroque crure ad eandem altitudinem positum: dico non posse situm hunc mutari, quin corpus aliquod grave ex situ inferiori in altiore se recipiat, quod esset contra naturam gravium; Nam si superficies E descendat in  $e$ , & ab altera parte D ex D elevetur in  $d$ , quoniam pars vasis reliqua eodem fluido ante & post situm mutatum plenum est, omnis mutationis effectus in hoc situs est, quod particula  $Ee$  ascenderit in  $Dd$ .

Cæterum idem quoque liquet ex Theoremate primo, quandoquidem in aqua stagnante tubus utcunque formatus fingi potest, in quo utique aqua situm servabit, quem antea habuit, cum perinde sit, five aqua tubo inclusa, coërceatur lateribus tubi, five circumstagnante aqua.

## Scholium 1.

§. 4. Si in demonstratione prima præcedentis paragraphi tota massa DBE situm suum commutasse concipiatur cum situ  $dBe$ , facile demonstratur centrum gravitatis totius massæ in situm altiore ascendisse, quod non minus absurdum est: Quoniam autem in nostra demonstratione nulla est particula in  $Ee$ , quæ non ascenderit post mutatum situm, existimavi strictiorem & clariorem fore demonstrationem, si centri gravitatis nulla consideratio habeatur.

## Scholium 2.

§. 5. De tubis capillaribus phænomena habemus singularia;  
aqua

aqua enim ascendit supra libellam in tubo strictiori, cujus altera extremitas aquæ submergitur; Mercurius vero libellam non attingit. Hæc vero cum aliquando attente perpenderem, in eandem præter propter incidi causam, quam olim Patruus meus Jacobus Bernoulli, beate defunctus dederat in tractatu suo *de gravitate ætheris*, nempe aquam in tubo strictiori ideo ultra libellam ascendere, quod numerus particularum aëreo-ætherearum in basi columnæ, quæ aquæ in tubo supereminet, minor sit numero particularum in simili basi extra tubum; hoc vero intelligitur ex eo, quod positus juxta se globulis in tabula horizontali, si circino cirulus fiat, globulorum aliquot necessario excludantur, quia dividi nequeunt: Sunt vero pressiones columnarum aëreo-ætherearum (quarum basis altera est in tubo, altera extra tubum) ut bases, id est, ut numeri globulorum in basibus: unde si numerus globulorum in prima basi sit  $=a$ , in altera  $=a+b$ , pressio columnæ prioris  $=g$ , erit pressio alterius columnæ  $=\frac{a+b}{a}g$ , hinc differentia pressionum  $=\frac{b}{a}g$ , cui æquari debet altitudo aquæ supra libellam.

Hæc ut rectius intelligantur, considerandum erit esse  $g$  proportionalem quadrato diametri, quæ respondet superficiæ fluidi tubo inclusi, & eidem quadrato ob extremam globulorum parvitatem proportionalem quoque esse  $a$ , sic ut ratio  $g$  ad  $a$  censenda sit constans, atque proin altitudo aquæ supra libellam proportionem sequi debeat ipsius  $b$ ; est vero, quod per se patet,  $b$  ut peripheria superficiæ fluidi tubo inclusi, erit igitur altitudo supra libellam, ut eadem illa peripheria, id quod experientia jam diu confirmavit. Si porro nunc diversa consideremus fluida, videbimus eo tortuosiore atque proin majorem esse præmemorata peripheriam, quo majores sunt fluidi particule, & cum à magnitudine hujus peripheriæ pendeat altitudo fluidi supra libellam, percipimus, cur hæc altitudo in eodem tubo non sequatur rationem gravitatis specificæ inversam: ita si idem tubulus immergatur spiritui vini & aquæ, ille minus ascendit, quam hæc, cum tamen ob minorem suam gravitatem spiritus ascendere deberet magis; hoc vero indicat, si recte rem affecutus sum, minores esse particulas spiritus vini, quam aquæ: Nunquam tamen meo judicio ascensus supra libellam in ullo fluido mutari potest in descensum, & omnia fluida ejusdem esse hac in re indolis, crediderim, nisi alia quædam causa, nondum hætenus considerata, superve-

niat, & si ex nostra hypothefi argumentamur, dicendum erit, Mercurium quoque fupra libellam fuiſſe aſcenſurum, ſi modo particulæ ejus non majori vi ſe invicem attraherent, quam particulæ aquæ; huic enim attractioni omnia tribuo, quæ Mercurium in diverſa ire faciunt. Experimenta, quæ ad hanc ſententiam me manuduxerunt, apponam in fine hujus ſectionis.

### Lemma.

Fig. 3. §. 6. Sit tubus cylindricus  $ABDC$  (Fig. 3.) utcunque verſus horizontem inclinatus, cujus fundum  $CD$  ad latera tubi ſit perpendicularare, plenusque intelligatur aquâ uſque in  $AB$ ; dico preſſionem omnis aquæ in fundum  $CD$  eſſe æqualem ponderi cylindri aquei, cujus baſis eſt  $CD$ , & cujus altitudo eſt verticalis  $DE$ , terminata ab horizontali  $BE$ .

### Demonſtratio.

Cum forma tubi ſit cylindrica, & fundum inſuper ad latera tubi perpendicularare, quilibet videt, quod actio fluidi in fundum eadem ſit, quam haberet cylindrus ſolidus ejusdem ponderis ſuper plano inclinato, conſtat autem ex mechanicis, preſſionem cylindri ſolidi in fundum eam eſſe, quæ in propoſitione definitur, ergo & talis erit actio fluidi, ſi modo non reſpiciatur adhæſio fluidi in lateribus tubi, ejusdemque indolentia ratione tubulorum capillarium, à quibus animum abſtrahimus. Q. E. D.

### Theorema 3.

Fig. 4. §. 7. Sit jam generaliter vas utcunque formatum  $AHMB$  (Fig. 4.) & aqua repletum uſque in  $DE$ , erit preſſio aquæ in ſingulas vaſis particulas, veluti in  $G$  aut  $H$ , ſemper æqualis ponderi cylindri aquei, cujus baſis eſt ſuperficies illius particulæ, & cujus altitudo æqualis eſt diſtantiæ verticali ejusdem particulæ à ſuperficie aquea.

### Demonſtratio.

Primo concipiatur in  $G$  tubulus cylindricus  $CG$  perpendiculariter vaſi inſiſtens, productaque  $ED$ , intelligatur hic tubus ſimili liquore plenus

plenus usque in C. Si nunc fingatur vas perforatum in G; erit utrumque fluidum in æquilibrio (per §. 3.) tantum ergo premit fluidum tubuli C G versus interiora, quantum premit fluidum vasis versus exteriora. Sed prior pressio convenit propositioni (per §. 6.) ergo & altera.

II. Si vero loco puncti G fumatur aliud H tale, ut linea, quæ eo in loco vasi perpendiculariter insistit, cadat intra vas; tunc potest vas integrum concipi R H S O N, priori unitum in H, & aqua repletum usque in P O. Sic enim apparet, si particula H, quæ utrique vasi communis est, perforetur, fluida sic fore in æquilibrio (§. 3.) adeoque utriusque pressionem in H esse æqualem. Pressio autem fluidi in R S N ea est, quæ indicatur in propositione (per partem primam hujus demonstrationis) ergo & pressio fluidi, quod est in vase A M B. Q. E. D.

### Scholion.

§. 8. Ex his propositionibus facile deducuntur æquilibria fluidorum stagnantium in casibus magis compositis. Nolo autem omnia prosequi, neque enim instituti nostri ratio id postulat, contentus demonstrationibus, quas modo dedi, propositionum *fundamentalium* in hydrostatica. Quod vero attinet ad pressiones fluidorum non stagnantium, sunt certe hæc altioris indaginis. Nec dum à quoquam recte determinata fuit pressio fluidorum, par canales seu tubos dato velocitatis gradu fluentium, quamvis id argumenti genus tam in rebus aquariis, quam multis aliis sit utilissimum. De his vero prius agere non licet, quam de motu fluidorum commentati simus.

§. 9. Patet ex præcedentibus ratio potentiarum vesicularium, quibus ingentia pondera superari possunt: Inde etiam noscitur vis, quam sustinent latera tubi, in quo aquæ stagnant; quod argumentum, quoniam pertractari solet ab hydrostaticæ scriptoribus, nunc percurramus, præsertim cum multa alia eo innitantur, de quibus nobis dicendum erit.

Sit Primo vesica *onmp*, (Fig. 5.) pavimento & ponderi B interposita, in Fig. 5. quam aqua infundatur per tubum FRo, cujus crus verticale FR brevitatis gratia incomparabiliter longius ponemus, quam diametrum vesicæ: Non elevabitur statim pondus B; At si aqua porro infundatur usque v. gr. in F, demum

demum attolletur pondus ; erit autem æquilibrium , cum locus contactus  $c d$  se habet ad orificium  $o$ , ut pondus  $B$  ad pondus cylindri aquei altitudinis  $FR$  super basi  $o$  insistentis. Pendet itaque absoluta elevationis determinatio à structura vesicæ , quæ si exempli gratia composita fuerit ex filamentis perfecte flexibilibus , extensionemque nullam admittentibus , simulque figuram naturalem habuerit Sphæricam , facile apparet, fore spatia contactus  $cnd$  &  $gpe$  æqualia & corrugata , partemque reliquam expansam , habituram esse formam Zonæ sphæricæ ; Atque hinc per Geometriam deducitur quantitas elevationis  $np$  , quæ nulla erit , quamdiu circulus maximus vesicæ minorem habuerit rationem ad orificium  $o$  illa , quæ est inter pondus  $B$  & pondus præfati cylindri aquei , nec prius tota explicabitur vesica quam altitudo fuerit infinita , id est, nunquam. Si vero fibræ alius sunt indolis , aliter se res habet , quod multi non satis considerarunt , quibus de figura vesicæ inflatæ fermo fuit , eamque cavernulis muscularibus in œconomia animali applicare voluerunt , quâ de re nunc paullo fusius agam.

Fig. 6.

§. 10. Fuerit vesica  $DC$  (Fig. 6.) eidemque appensum pondus  $P$  , simulque alligata tubulo  $DA$  , cuius rursus longitudinem compendii ergo in comparabiliter maiorem longitudine  $DC$  fingemus. His positis facile quidem quivis perspicit , repletis vesica & tubulo fore , ut illa intumescat , pondusque appensum  $P$  elevet : nemo autem intelliget statum æquilibrii , figuramque ventricosam , nisi plane intelligatur structura vesicæ ejusdemque fibrarum , quæ cum ita sint , casus aliquot singulares examinabimus , qui frequentius occurrere possunt.

## Casus I.

§. 11. Si vesica composita fuerit ex fibris longitudinalibus  $DpC$  ,  $DmC$  &c. instar meridianorum in punctis  $D$  &  $C$  , cœu Polis concurrentibus æqualibus , perfecte flexibilibus & uniformibus , quarum singulæ inter se proximæ minimis connectantur fibrillis transversalibus , hisque ita laxis , ut minima vel quasi nulla vi sufficientem extensionem admittant. Sic quælibet fibra  $DpC$  incurvabitur in figuram elasticæ , totaque vesica formam assumet solidi , quod generatur ex revolutione istius curvæ circa axem  $DC$ . Si porro altitudo  $AD$  est infinita , fit elastica  $DpC$  rectangula & tunc est grassities maxima vesicæ ad longitudinem axis  $DC$  ut 25 ad 11 præter propter

pter atque longitudo arcus  $DpC$  est ad eundem axem proxime ut 5 ad 2, ita ut maxima elevatione ponderis vesica tribus quintis partibus decurtetur.

## Casus II.

§. 12. Si positis cæteris, ut antea, minima filamenta transversalia  $no$ ,  $mp$ , &c. quæ sunt perpendiculares ad fibras longitudinales, extensioni resistent, apparet non posse figuram fibræ  $DopC$  determinari, quin duo potentiarum genera unicuique puncto applicata considerentur, quorum alterum curvæ perpendiculariter infistit; & filum extrorsum premit, alterum ad axem curvæ  $DC$ , est perpendiculare & introrsum trahit: facile etiam intelligitur infinitas posse harum pressuræ excogitari leges, ut ad curvam quamvis datam fibra  $DopC$  se componat, atque adeo etiam v. gr. ad circulem, quæ figura à plerisque Physiologis tribuitur fibrillis, quæ pertinent ad machinulas musculares; Sed est alius etiam modus, quo fibra longitudinalis  $DopC$  acquirere potest figuram arcus circularis, nempe cum omnino absunt fibrillæ transversales  $np$ ,  $mp$ , &c. Sic enim dum inflatur vesica, hiatus fit inter duas fibras longitudinales proximas  $DopC$  &  $DnmC$ , per quem fluidum erumpit, simul autem, cum non satis cito effluere possit, fibras extendit, easque ad figuram circulem componit: atque hoc in casu maxima vesicæ decurtatio, quæ in priori casu fuit  $\frac{2}{3}$  totius longitudinis vesicæ non inflatæ, nunc tantum est proxime  $\frac{4}{11}$ .

§. 13. Sequitur ex hisce, difficile esse, ut figura vesicæ inflatæ, cui pondus appensum est, recte determinetur, quandoquidem nemo fit, qui indolem minimarum fibrillarum perfecte cognoscere possit: transcribam tamen huc exempla quædam, quæ maxime videntur probabilia, ex schedis meis sine demonstratione, quam si quis desideret, reperiet in *tom. 3. Comm. Acad. Sc. Petrop.* Ante omnia autem æquationem dabo ad curvam, quæ ex duobus potentiarum generibus, ut dixi in præcedente paragrapho, iisque quamcunque legem observantibus formatur.

§. 14. Sit igitur filum  $AEG$  (Fig. 7.) duobus punctis  $A$  &  $G$  affixum; Fig. 7. ducatur recta  $AG$ : sintque duo puncta in filo infinite propinqua  $D$  &  $E$ , ex quibus agantur ad  $AG$  perpendiculares  $DB$  &  $EC$ ; lineola autem  $DF$  sit lineæ  $AG$  parallela. Intelligatur singulis punctis  $D$  vel  $E$  applicatas esse duas po-

potentias utcunque variables, quarum altera fit ubique ad curvam, altera ad A G perpendicularis: priorem ponemus in puncto D æqualem A, in puncto E æqualem A + dA, alteram in puncto D = C, in puncto E = C + dC: Sit porro AB = x, BD = y, AD = s, BC = dx, FE = dy, DE = ds, quod elementum curvæ constantis magnitudinis ponatur; Radius Osculi in puncto D = R, in puncto E = R + dR. Dico æquationem ad curvam fore hanc — AdR — R dA = (R dC dx + 2 C dy ds + C dx dR) ds, vel posito CR ddx pro C dy ds (est enim R =  $\frac{dy ds}{dx}$ ) habebitur — AdR — R dA = (R dC dx + CR dds + C dy ds + C dx dR): ds, five  $\frac{-AR ds - RC dx}{ds} = \int C dy$ .

§. 15. Intelligitur ex præcedente æquatione, quod cum potentiæ, quæ sunt ad curvam perpendiculares, solæ agunt, fiat AR = constanti quantitati, quia nempe sic fit C = 0: tunc igitur radius osculi ubique sequitur rationem inversam potentiæ respondentis. At si potentiæ ad axem perpendiculares solæ adfunt, tunc evanescente littera A fit —  $\frac{RC dx}{ds} = \int C dy$ . Potest autem hæc æquatio integrari & ad hanc reduci formam RC dx<sup>2</sup> = constanti quantitati; ex qua apparet potentiam ductam in radium osculi ubique esse in ratione reciproca quadrati sinus, quem applicata facit cum curva. Similiter æquatio canonica integrationem admittit, cum potentiæ, quæ ad axem perpendiculares sunt, omnes inter se sunt æquales seu proportionales elemento curvæ ds. Ita enim posito dC = 0, obtinetur — AdR — R dA = 2 n dy ds + n dx dR, intelligendo per n constantem quantitatem, qua æquatione recte tractata fit n y dy + m m dy — n s ds = ds ∫ A dx, ubi m constans est ab integratione proveniens.

Si præterea potentiæ ad curvam normales ponantur applicatis y proportionales, poterit ulterius reduci postrema æquatio ad hanc

$$-dx = \left( 2ff - \frac{ggy}{b} \right) dy : \sqrt{(2ny + 2mm)^2 - \left( 2ff - \frac{ggy}{b} \right)^2},$$

cujus constantes f & m casibus particularibus erunt applicandæ, dum n & g pendunt à relatione potentiarum in puncto aliquo: unde si g = 0, oritur catenaria, & si n = 0 prodit elastica: generaliter vero inservit æquatio ad curvaturam lintei uniformiter gravis, cui fluidum superincumbit, determinandam: Causus

fus simplicissimus hujus rei est, cum supponitur  $f = m = 0$ , tunc enim fit

$$-dx = \frac{-gy dy}{\sqrt{(4nnbb - ggyy)}} \text{ seu facta integration cum additione debitæ constan-}$$

tis,  $x = -\sqrt{\left(\frac{4nnbb}{gg} - yy\right)} + \frac{2nb}{g}$ , quæ est æquatio ad semicirculum, ad quem nempe se linteum accommodabit in sequenti hypothesi: Sit filum linteum gravis AEG (Fig. 8.) in semicirculum incurvatum, cujus diameter AG Fig. 8. ad libellam posita sit; superincumbat filo fluidum usque ad AG, dico si fluidi pondus sit æquale ponderi fili, fore ut filum perfecte flexile & uniformis crassitie figuram semicircularem conservet. Quomodo autem pondera fili & fluidi, ut æqualia fiant, efficiendum sit ex elementis Geometriæ constat. Denique si statuatur tam potentias A quam C esse ubique applicatæ respondentem y proportionales (quæ hypothesi fane maxime convenire videtur cum vera figura vesicæ in figura sexta) poterit rursus æquatio canonica, quæ continet differentialia tertii Ordinis, reduci ad æquationem simpliciter differentialem eamque per quadraturas facile construendam. Sit nempe  $A = my$  &  $C = ny$ , dico naturam curvæ ADG in fig. 7. exprimi hæc æquatione

$$dx = (g^3 + \frac{1}{2}myy) dy : \sqrt{[(f^3 + \frac{1}{2}nyy)^2 - (g^3 + \frac{1}{2}myy)^2]}$$

in qua literæ constantis magnitudinis f & g rursus ab integrationibus prodierunt: fit autem valor literæ n negativus, cum æquatio ad vesicæ inflatæ figuram determinandam adhibetur.

§. 16. Noli his nimis insistere, quod non proxime pertinent ad Hydrodynamicam: Nihil etiam addo de fluidis elasticis, quia horum theoriam seorsim tradere constitui; attamen quod ad pressiones fluidorum elastico- rum attinet, poterunt illæ ex natura fluidorum simpliciter gravium supra exposita facile deduci & demonstrari, fingendo fluidum elasticitate esse destitutum, cylindrumque fluidi similis altitudinis infinitæ vel quasi infinitæ superincumbere; hæc autem quomodo intelligenda sint suo loco dicemus: Nunc quidem pergo ad id, quod in rebus aquariis potissimum quæri solet, quanta nempe debeat esse firmitas canalium, ut pressioni aquæ resistere possint, ubi præsertim considerantur canales, qui aquas ad fontes vehunt, de quibus ego quoque pauca monebo.

§. 17. Probe distinguendæ sunt pressiones aquarum in canalibus stagnan-

D

nan-

nantium à pressionibus fluentium, quamvis id nemo adhuc animadverterit, quod sciam; hinc est, quod regulæ à variis exhibitæ valeant tantum pro aquis stagnantibus, tametsi verbis utantur, quæ perinde eas pertinere ad aquas fluentes persuadere possint. Ut vero discrimen utriusque Theoriæ appareat in ipso limine, exemplum quoddam afferam, cujus demonstratio ex Fig. 9. inferioribus patebit. Sit loco castelli vas amplissimum  $ABCD$  (Fig. 9.) aqua repletum usque in  $EF$ , & in parte inferiori tubulo cylindrico horizontali  $MOmo$  instructum, per quem aquæ sine impedimento transfluere posse intelligantur; ducatur verticalis  $NG$  terminata ab horizontali  $EH$ . His ita præparatis, dico si orificium  $Oo$  totum digito obstruatur, punctum  $N$  præmi extrorsum secundum totam altitudinem  $NG$ ; si dimidium orificium obturatur, hanc pressionem quarta sui parte diminui, & si denique remoto digito aquæ liberrime effluant, omnem pressionem evanescere, sic ut totum cum parte aut etiam cum nihilo confundi ab Authoribus soleat. Sed demonstrabo posse pressionem vel negativam fieri, atque ita in suctionem mutari. Quoniam vero id agere non possum priusquam integram theoriam de aquis fluentibus præmiserim, nunc aquas considerabo saltem stagnantes, veluti si orificium  $Oo$  totum fuerit obstructum.

Fig. 10. §. 18. Constat autem ex Mechanicis latera tubi  $MOmo$  (cujus diametrum incomparabiliter censebimus minorem altitudine  $NG$ ) non aliter tendi, quam si explicata essent in figuram rectangularem  $MOmo$  (Fig. 10.) appensumque haberent pondus  $P$ , quod sit æquale ponderi prismatis aquei, cujus tria latera sint 1°. radius tubuli, 2°. longitudo ejusdem & 3°. altitudo aquæ supra tubum; Ex hac propositione intelligitur nonsolum ratio tensionum, si diversæ fuerint altitudines aquæ aut diametri tuborum, sed & ipsa tensionum mensura: Quod si proin firmitas tuborum major sit ista tensione, nullum erit rupturæ periculum; si secus certo rumpetur tubus. Cæterum de firmitate tuborum experimenta instituta fuerunt à variis; sunt autem ejusmodi experimenta difficilia & sumtuosa; poterit igitur facilius firmitas tuborum sive plumbeorum sive ferreorum cognosci, si experimento innotescat, quantum pondus filum plumbeum aut ferreum datæ crassitie sustinere possit sine rupturæ periculo. Experimentum simile à me institutum apponam in fine sectionis ostensurus quomodo inde firmitas tubi datæ crassitie & diametri deduci possit.

*Sequun-*

*Sequuntur Experimenta quæ ad Sectionem  
pertinent Secundam.*

Ad §. 5.

**D**E *tubulis capillaribus* : Experimenta innumera de horum tubulorum indole à variis sumpta fuerunt, quos inter eminet Georgius Bernhardus Bulfingerus, qui non solum præcipua collegit, sed & plurima de suis addidit, vid. *Comm. Acad. sc. Petrop. tom. 2. pag. 233. & seqq.*

I. Ut oculis recte appareret, quam contrariæ sint Indolis hæc in parte mercurius & reliqua fluida, confici curavi vas vitreum A B C (Fig. 11.) Fig. 11. ex duobus cruribus verticalibus compositum, quorum alterum A B diametrum habebat trium linearum vel quatuor, alterum B C vix tertiæ partis lineæ. Cum vas liquore quocunque implebatur, superficies altius erat in crure strictiore quam ampliore, veluti in D & G, mercurius autem solus depressior est in strictiore quam ampliore, veluti in F & G.

II. Ostensurus mercurium non aliam ob rationem à natura aliorum fluidorum recedere, quam ob fortiorem particularum suarum mutuam attractionem cogitavi de his experimentis : tubulum nempe gracilem mercurio suctione implevi eumque horizontaliter positum sensim erexi ; Sic effluxit mercurius, nunquam tamen omnis & altitudo verticalis mercurii in tubulo residui in omni situ sibi constabat. Quod si autem, cum mercurius in tubulo sic suspenditur, extremitas tubi mercurio in vase stagnanti admoveatur, protinus omnis effluit. Priora Phænomena, ni fallor, indicant mercurio & aliis fluidis idem contingere, cum vi attractrici nullus est locus ; mercurium autem fortissime se attrahere docet phænomenon ultimum.

III. Sumatur tubus cylindricus vitreus diametri 3 aut 4 linearum, fundo instructus ex Charta subtili, aut tenuissima lamina ferrea parato & in medio minimo foraminulo perforato, ut ostendit (Figura 12.) Inclinetur Fig. 12. tubus A C B D & impleatur totus mercurio, dein sensim erigatur ; fiet quod antea, & quamvis tubus sit amplissimus, non tamen effluet omnis mercurius, sed suspensa hærebit ejus pars, veluti M C D N, hæcque eo major erit, quo minus est ejus foraminulum o. Dein cum fundum submergitur  
D 2 mer-

mercurio, in vase alio servato, tantillum, sic ut pars submersa tubi sit  $C\alpha$ , non solum non ascendit mercurius in tubo usque in  $\zeta$  (sumta scilicet  $C\alpha = M\zeta$ ) sed & omnis fere effluit, donec superficies  $MN$  pervenit in  $\alpha$ . Porro tubum  $ACDB$  vacuum sat profunde mercurio, qui erat in vase alio, submersi, nec tamen prius quicquam influere coepit ex vase in tubum, quam ad altitudinem  $CM$  esset submersus; & tunc statim, eo usque influit donec ab utraque parte ad libellam sit constitutus, nempe usque in  $MN$ , si ad eum locum usque erat submersus. Omnia hæc ex mutua particularum mercurialium attractione facile deducuntur. Cæterum dedi operam ut investigarem relationem, quæ est inter altitudinem  $MC$  & amplitudinem foraminuli  $\phi$ ; verisimile utique est altitudinem illam esse in ratione reciproca diametri ad foraminulum pertinentis; nec tamen experimento conjecturam satis confirmare potui, tum ob impuritatem mercurii quo utebar, quæ faciebat, ut non variato foramine in iteratis experimentis altitudo suspensi mercurii sibi met ipsi non omnino constaret, tum etiam, quod difficile est foraminula minima accurate metiri; debent enim foraminula esse minima, quandoquidem altitudo mercurii suspensi vix est sex octove linearum, cum diameter foraminis sextam partem lineæ æquat, dicam tamen qua methodo usus fuerim. Filis nempe æneis, quibus in instrumentis musicis utuntur, diversæ crassitie, quorum diametros minimas ex longitudine & pondere eorum rectissime cognovi, chartulam  $CD$  perforavi; sed sic solent oriri circa latera foraminis fimbriæ quæ effluxum impediunt, & facile succedit ut foramen majus sit quam est crassities fili.

Ad §. 18. *De firmitate tuborum.* Filum æneum rotundum, cujus diameter erat  $\frac{2}{11}$  lin. Paris. cui successive pondera continue majora appendebantur, prius non disruptum fuit, quam ad 18. lib. Norimb. pondus excrevisset. Dein tenuissimam lamellam plumbeam, cui rectangularis figura erat,  $\frac{1}{2}$  lin. latam,  $\frac{1}{11}$  lin. crassam rumpi observavi cum eidem appensum esset pondus trium unciarum cum dimidia. Ex hisce observationibus duabus sequitur cæteris paribus filum ex ære plus quam 28. vicibus fortius esse, quam filum ex plumbo. Ex priori experimento quoque deducitur, si tubus æreus diametrum habuerit unius pedis, & crassities laterum fuerit  $\frac{2}{11}$  lin. posse eum aquam sustinere ad altitudinem 518. pedum priusquam rumpatur. In hoc calculo dedi pedi cubico aquæ pondus 70. librarum. Si vero idem  
tubus

tubus fuerit plumbeus, sustinebit aquam ad altitudinem 18. ped. vi altius observationis, poteritque altitudinem aquæ ferre 99. ped. si latera tubi habeant in crassitie lineam integram. Convenit hoc cum eo quod Mariottus in *tract. de motu aquarum* p. 472. habet, ubi nempe dicit tubum plumbeum, cujus diameter unius erat pedis, & laterum crassities duarum linearum cum dimidia sine ruptura aquam tulisse ad altitudinem centum pedum, quod cum observaret abrasit sensim latera, donec tandem ad lineæ crassitiem essent diminuta, & tum denique vim aquæ tubum dirupisse.

Ex observata fili ænei firmitate colligitur etiam firmitas tormentorum bellicorum: fuerit v. gr. tormentum bellicum cujus animæ diameter habeat tres poll. solent autem haud procul à lumine accensorio, ubi maxima est vis pulveris, crassities laterum esse præterpropter æquales diametro animæ, ita ut diameter tota sit tripla diametri animæ. Quia igitur crassities hæc non est negligenda præ diametro animæ, censëbimus materiam omnem concentratam in medio atque sic ab axe animæ distantem tribus pollicibus. Hoc posito erit altitudo maxima aquæ quam tormentum haud procul à lumine accensorio ferre potest  $= \frac{1}{2} \times 12 \times 3 \times 2 \times 518 = 205128$ , quæ vis fere septies millies superat elasticitatem aëris naturalis. Ostendam autem in sequentibus, pulverem pyrium accensum vim exercere posse ad rumpendum tormentum aliquantum quidem majorem, quam quæ dicta fuit, sed non multum tamen excedentem. Reliquum autem firmitatis, quod requirunt tormenta, habent à cingulis seu fasciis, quæ dicuntur *plattes bandes & moulures*, præter id quod in primo ortu tormenti (à l'endroit de la culasse) crassities major sit quam quæ à nobis assumpta fuit. Interim non pauca tormenta dirumpi, sic non mirabimur.

# HYDRODYNAMICÆ

## SECTIO TERTIA.

*De velocitatibus fluidorum ex vase utcumque formato per lumen qualecunque effluentium.*

### §. I.



Rursusquam motum aquarum à gravitate propria ortum definire tentemus, ruminabimur quod in Sectione prima §. §. 18. 19. 20. 21. & 22. à nobis allatum fuit de principiis ad hoc adhibendis.

Recordabimur nempe *ascensum potentialem* Systematis, cujus singulæ partes velocitate qualicunque moventur, significare altitudinem verticalem, ad quam centrum gravitatis illius Systematis pervenit, si singulæ particulæ motu sursum converso sua velocitate, quantum possunt, ascendere intelligantur, & *descensum actualement* denotare altitudinem verticalem, per quam centrum gravitatis descendit, postquam singulæ particulæ in quiete fuerant. Tum etiam memores erimus necessario *ascensum potentialem* æqualem esse *descensui actuali*, quando omnis motus in materia substrata hæret, nihilque de eo in materiam insensibilem aut aliam ad systema non pertinentem transit, & denique motum fluidorum talem proxime esse, ut ubique velocitas reciproce sit proportionalis amplitudini vasis respondenti, quâ de re suo loco alia quædam interjiciemus. Nunc convenit examinare sequentem propositionem.

### Problema.

§. 2. Si aqua per canalem utcumque formatum fluat, ejusque velocitas cognita sit aliquo in loco, invenire *ascensum potentialem* omnis aquæ in canali contentæ.

Solutio.

## Solutio.

Sit canalis utcunque formatus  $ST$  (Fig. 13. & 14.) per quem aqua fluit  $b c f g$ ; assumitur, si in axe  $a e$  accipiatur punctum quodcunque  $n$ , per quod planum ad axem perpendiculare  $p m$  transeat, fore, ut omnes particulae aquae in illo plano existentes aequali velocitate fluant, & quidem tali, quae sit ubique reciproce proportionalis magnitudini sectionis  $p m$ . Sit autem velocitas aquae in  $g f$  talis, quae debetur altitudini verticali  $q s$ , id est, sit *ascensus potentialis* strati aquei in  $g f$  aequalis lineae  $q s$ , & quoniam hujusmodi altitudines sunt in ratione quadrata velocitatum, sequitur esse *ascensum potentialem* aquae in  $p m$  aequalem quartae proportionali ad quadratum amplitudinis  $p m$ , quadratum amplitudinis  $g f$  & altitudinem  $q s$ , nempe

$$= \frac{g f^2}{p m^2} \times q s.$$
 His ita praemonitis ponemus in figura decima quarta esse curvam  $B P G$ , scalam amplitudinum canalis, ita ut posita  $A N = a n$ , denotet  $N P$  amplitudinem in  $p m$ : deinde curvam  $H I K$  esse scalam *ascensuum potentialium*, ita ut sit  $N I = \frac{E G^2}{N P^2} \times q s$ . fingatur nunc elementa singula curvae

$H I K$  habere pondus aequale ponderi strati aquei respondentis, & cadere centrum gravitatis istius curvae in punctum  $L$ , & ducatur  $L O$  perpendicularis ad axem  $A E$ ; sic erit  $L O$  *ascensus potentialis* totius aquae quaesitus. Ex mechanicis autem constat, si fiat tertia curva  $U X Z$ , cujus applicata  $N X$  sit ubique aequalis  $\frac{E G^2}{N P^2}$ , fore  $L O$  aequalem quartae proportionali ad spatium  $A E G B$  &  $A E Z U$  atque lineam  $q s$  vel  $E K$ . Patet igitur quaesitum. Q. E. I.

§. 3. Fuerit v. gr. canalis conicus, in quo superficies anterior  $g f$  & posterior  $b c$  diametros habeant ut  $m$  ad  $n$ , erit *ascensus potentialis* aquae

$$= \frac{3 m^3}{n (m m + m n + n n)} \times q s.$$

## Problema.

§. 4. Datis variationibus infinite parvis tam ratione situs quam velocitatis, quae superficiei aquae anteriori respondent, invenire variationes ad *ascensus potentiales* totius aquae pertinentes.

Solutio.

## Solutio.

Sit spatium  $A E G B = M$ , spatium  $A E Z U = N$ ,  $q s = v$ , erit *ascensus potent.*  $= \frac{N v}{M}$ : quia vero quantitas aquæ in canali constanter eadem ponitur, erit spatium  $A E G B$  invariabile, adeoque  $d M = 0$  ita ut differentiale *ascensus potent.* sit simpliciter  $= \frac{N d v + v d N}{M}$ , habetur autem  $d N$  ex variatione situs aquæ. Patet igitur propositum. Q. E. I.

## Scholion.

§. 5. Poterunt hæ propositiones inservire pro motu fluidi intra vasa moti, id est, non effluentis definiendo, uti suo loco ostendam: at vero cum fluidum per foramen effluit, aptius instituetur aliter calculus, nempe ut sequitur.

## Problema.

§. 6. Invenire differentiam *ascensus potentialis* postquam guttula per foramen effluxit.

## Solutio.

Fig. 15. Fingamus aquam effluere ex vase  $a i m b$  (Fig. 15.) utcunque formato, fundum sit  $i m$  perforatum foramine  $p l$ : quantitas aquæ, postquam jam data ejus quantitas effluxit, residua in vase sit  $c i m d$ ; effluat autem tempusculo infinitè parvo guttula  $p n o l$ , superficie  $c d$  descendente in situm  $e f$ : concipiatur in medio aquæ sectio  $g h$  parallela superficiebus  $c d$  vel  $e f$  ipsique fundo  $i m$ ; sitque velocitas unius cujusvis particulæ in  $g h$  talis, ut possit ascendere ad altitudinem  $q s$  seu  $v$ , cum nondum effluxit guttula & ad altitudinem  $q z$  five  $v + d v$ , postquam ea ipsa guttula effluxit. Omnibus his ita positis, quæritur incrementum *ascensus potentialis* aquæ postquam situm  $c i m d$  commutavit cum situ  $c i p n o l m f$ , id est, postquam guttula emanavit.

Fig. 16. Fiat, ut antea, curva  $C G I$  (Fig. 16.) ceu scala amplitudinum, ubi adeoque  $C D$  vel  $E F$  repræsentabunt magnitudinem superficiæ aqueæ ante vel

vel post effluxum guttulæ, GH amplitudinem illam assumtam, IL magnitudinem fundi, PL magnitudinem foraminis, dum adhærens parallelogrammum minimum PNOl respondet guttulæ cylindricæ *pno*l: dein construatur alia curva TRU, cujus applicatæ sint rursus æquales quadrato lineæ GH, diviso per applicatam respondentem curvæ CGI, cui curvæ eadem conditione annexum est parallelogrammulum LOYX, cujus nempe latus LX est æquale quadrato lineæ GH diviso per lineam PL.

Jam igitur apparet *ascensum potent.* aquæ ante effluxum guttulæ esse  $\equiv$  quartæ proportionali ad spatium DCIPL, spatium DTUL & altitudinem *qs*, eundemque post effluxum guttulæ esse  $\equiv$  quartæ proportionali ad spat. FEIPNOL, spat. FWUXYOL & altit. *qz*: sunt autem in utraque analogia termini primi (nempe spat. DCIPL & spat. FEIPNOL) inter se æquales, igitur si quodvis horum spatiorum indicetur per M, spatium DTUL per N, spat. FWUXYOL per  $N + dN$ , altitudo *qs* per *v* & *qz* per  $v + dv$ , erit incrementum *ascensus potentialis* durante guttulæ effluxu  $\equiv \frac{Ndv + v dN}{M}$ . Quod si nunc ponatur  $LD \equiv x$ ,  $FD \equiv -dx$ ,  $DC \equiv y$ ,  $HG \equiv m$ ,  $PL \equiv n$ , erit  $DT \equiv \frac{mm}{y}$ ,  $LX \equiv \frac{mm}{n}$ ,  $LO \equiv -\frac{ydx}{n}$  (quia spatium DFEC  $\equiv$  spatio LONP), hincque  $dN \equiv LOYX - DFWT \equiv -\frac{mm y dx}{nn} + \frac{mm dx}{y}$ , unde nunc incrementum quæsitum *ascensus potentialis* est  $\equiv (Ndv - \frac{mmvy dx}{nn} + \frac{mmv dx}{y}) : M$ . Q. E. I.

## Problema.

§. 7. Retentis iisdem positionibus invenire *descensum actuale* infinitè parvum aquæ, dum guttula effluit.

## Solutio.

Cum in Figura decima quinta aqua situm *cdmi* mutat cum situ *efmi* *onpi*, patet in utroque situ centrum gravitatis partis aquæ *efmi* in eodem loco esse, posseque proin concipi solam particulam *cdfe*, (quæ est  $\equiv -ydx$  dum tota aquæ massa est  $\equiv M$ ) descendisse in *lonp*. Sit jam altitudo particulæ

E

ticulæ

ticulæ aquæ  $cdfe$  supra guttulam  $lonp = x$ , altitudo centri gravitatis aquæ  $efmi$  a fundo  $= b$ , erit altitudo centri gravitatis omnis aquæ in situ  $cdmi$  supra fundum  $= b - \frac{y dx}{M} \times (x - b)$  & in situ  $efmlonpi$  erit eadem altitudo  $= \left( \frac{M + y dx}{M} \right) \times b$ ; unde differentia altitudinum seu *descensus actualis* quæsitus  $= -\frac{y dx}{M} \times x$ , quæ æquatio indicat, guttulam quæ effluerit multiplicandam esse per altitudinem aquæ supra foramen, productumque dividendum per quantitatem aquæ, ut habeatur *descensus actualis*, qui fit dum guttula effluit, Q. E. I.

### Problema.

§. 8. Determinare motum fluidi homogenei ex vase dato per foramen datum effluentis.

### Solutio.

Quoniam per hypothefin nostram *ascensus potentialis* singulis momentis æqualis est *Descensui actuali*, erit incrementum prioris dum guttula effluit æquale incremento posterioris, quod simili tempusculo oritur. Igitur si rursus superficies aquæ, postquam data ejus quantitas effluxit, ponatur  $= y$ , amplitudo vasis quocunque in loco ad libitum assumpta  $= m$ , amplitudo foraminis  $= n$ , altitudo aquæ supra foramen  $= x$ ; si præterea quantitas  $N$  ea lege construatur, quæ §. 6. indicata fuit, atque per  $v$  intelligatur altitudo debita velocitati aquæ in loco assumpto, ubi nempe amplitudo vasis est  $= m$ , erit per §. 6. incrementum *ascensus potentialis*  $= \left( N dv - \frac{m m v y dx}{n n} + \frac{m m v dx}{y} \right) : M$ , minimusque *descensus actualis*  $= -\frac{y x dx}{M}$  (per præced. §.); unde habetur  $\left( N dv - \frac{m m v y dx}{n n} + \frac{m m v dx}{y} \right) : M = -y x dx : M$  seu  $N dv - \frac{m m v y dx}{n n} + \frac{m m v dx}{y} = -y x dx$ , quæ æquatio generaliter integrari potest, quandoquidem litteræ  $N$  &  $y$  sunt functiones datæ ipsius  $x$  & litera  $v$  unius tantum dimensionis est.

### Corollarium I.

§. 9. Quum velocitates sint in ratione reciproca amplitudinum, patet

patet fore altitudinem, quæ velocitati aquæ effluentis respondet  $= \frac{mm}{nn} v$ ,

quæ proin, si vocetur  $z$ , erit  $nn N dz - mmzydx + \frac{mmnnzdx}{y} = mm y x dx$ .

### Corollarium 2.

§. 10. Si foramen sit valde parvum, ratione amplitudinum vasis, fit  $n=0$ , totaque æquatio abit in hanc  $-mmzydx = -mm y x dx$  vel  $z=x$ ; tunc igitur aqua ea constanter effluit velocitate, qua ad altitudinem supremæ superficiæ usque ascendere possit, quem solum casum Geometræ hactenus fuerunt recte assecuti: valetque hæc propositio pro omnibus vasis utcunque formatis: at cum foramen non ut infinite parvum consideratur, nequaquam negligenda est vasis figura. Notari tamen potest, quod nisi foramen sit amplissimum, sine notabili admodum errore idem ut infinite parvum considerari possit.

### Corollarium 3.

§. 11. Cum fluidum non est ubique idem, simili modo instituentus est calculus, inquirendo nimirum tum in incrementum *ascensus potentialis* fluidi compositi, tum in *Descensum actualem*, eaque inter se æquando. Quod si autem foramen sit valde parvum, per se patet, quod etiam calculus ostendit, fore ut fluidum velocitate exiliat altitudini debita tali, ut si vas ad eandem altitudinem liquore eodem, qui exilit, repletum sit, eandem pressionem latera foraminis sustineant.

### Scholium Generale.

§. 12. Priusquam Corollaria specialiora ex theoria nostra deducamus circa motum fluidorum ex vasis cylindricis, conveniet hic examinare, quousque hypotheses assumptæ cum rei natura conspirent & quænam aliæ intervenire possint causæ, quarum in computo nullam rationem habuimus, motum fluidum diminuentes.

Quod primo attinet ad Principium *conservationis virium vivarum* seu *perpetuæ æqualitatis inter ascensum potentialem descensumque actualem* nihil hîc video, quod ei notabili impedimento esse possit, si modo à frictionibus, tenacitate, aëris resistentia hujuscemodique aliis obstaculis mentem abstrahamus.

hamus. Sape quidem fit, ut principium istud non sine limitatione adhiberi possit, quod in sequentibus ostendemus, nempe cum particulæ aquæ motu singulæ diverso feruntur, quo fit ut singulis momentis aliquid de motu, vel si mavis de *ascensu potenti*ali, perdatur. Sed in præsentī casu nihil simile accidit, quandoquidem omnes particulæ similiter fere moventur & præsertim, quando foramen est valde parvum, motus particularum internarum fere nullus est, nihilque adeo inde detrimenti venire potest. Alterum autem principium, quo assumitur velocitatem cujuslibet particulæ eam esse, quæ respondet inversæ rationi amplitudinum, duplici quidem laborat incommodo, *primo* nempe, quod motus circa latera vasis tardior paulo sit quam in medio nec proin omnes particulæ eidem amplitudini vasis respondentes, æquali velocitate ferantur, & *secundo*, quod aqua à fundo non admodum remota motum, quem principium hoc postulat, habere non possit: Utrumque autem nullum sensibilem errorem post se trahit, quando in hoc problemate simplici figura vasis interna nihil fere ad motum aquæ effluentis attineat; Ex eadem ratione intelligitur non multum diversum esse posse motum aquæ sub alia quacunque directione effluentis, quia scilicet motus aquæ internus in ima vasis parte tantum diversus fit, hæcque diversitas nullius momenti fere esse potest. Apparet ergo hypotheses, quibus calculus nostri hujus Problematis innititur, ita convenire cum natura quæstionis, ut error inde nullus sensibus perceptibilis oriri possit. At vero impedimenta supra memorata, attritus, tenacitas fluidi aliaque similia majoris efficacæ sunt, præsertim cum foramen, per quod fluida exiliunt, per quam exiguum, aut altitudo aquæ supra foramen admodum magna, aut denique tubus valde gracilis est, qua de re experimenta plurima extant apud Mariottum in *tract. de mot. aquarum*. Jam vero progredior ad examinandum motum aquarum ex vasis Cylindricis per foramina cujuscunque magnitudinis effluentium. Vasa autem compendii & elegantioris solutionis causa considerabimus verticaliter posita.

*De his quæ pertinent ad effluxum aquarum ex Cylindris verticaliter positis, per Lumen quodcunque, quod est in fundo horizontali.*

§. 13.

**G** Eometræ, quibus de aquis ex vase erumpentibus fermo fuit, considerare potissimum solent cylindros verticaliter positos: Igitur haud abs re erit ex theoria nostra generali confectaria illa, quæ huc pertinent, deducere. Sit amplitudo cylindri ad amplitudinem foraminis ut  $m$  ad  $n$ ; altitudo aquæ supra foramen, cum fluxus incipit  $= a$ ; altitudo aquæ residuæ  $= x$ , altitudo velocitati aquæ internæ debita  $= v$ ; erit in æquatione canonica paragraphi octavi  $y = m$ ,  $N = mx$  (per §. 6.) quæ adeoque abit in hanc æquationem.

$$mx dv - \frac{m^3}{nn} v dx + m v dx = - mx dx, \text{ vel}$$

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) v dx + x dv = - x dx$$

multiplicetur hæc posterior æquatio per  $x$ , ut habeatur

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) x^{\frac{mm}{nn}} v dx + x^{\frac{mm}{nn}} dv = - x^{\frac{mm}{nn}} dx.$$

Potest jam hæc æquatio integrari: observanda autem est in Integratione constantis additio, talis nempe, ut a fluxus initio, id est, cum  $x = a$ , sit velocitas fluidi nulla, ipsaque proin  $v$  pariter  $= 0$ : ita vero oritur:

$$x^{\frac{mm}{nn}} v = \frac{nn}{2nn - mm} \left( a^{\frac{2mm}{nn}} - x^{\frac{2mm}{nn}} \right) \text{ vel}$$

$$v = \frac{nn a}{2nn - mm} \left( \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{mm}{nn}} - \frac{x}{a} \right)$$

§. 14. Ex hac igitur æquatione cognoscitur altitudo generans velocitatem aquæ internæ; ubi notari meretur, si vas sit amplissimum, mox posse censeri  $v = \frac{nn}{mm} x$ , postquam scilicet vel tantillum descendit aqua, id est,

statim ac  $x$  paulo minore est quam  $a$ . Regula hæc fallit notabiliter tantum circa primum motus initium & si primum istud motus elementum consideratur (quo nempe altitudo  $a - x$  ut infinite parva censeretur potest) indicat æquatio, esse tunc  $v = a - x$ . Unde sequitur, in omni cylindro, quodcunque fuerit foramen, aquam internam instar corporum libere cadentium accelerari ab initio motus. Si vero motus aliquantulum continuet, eo minus fallit hæc Regula, quo majus fuerit foramen, & quo altior est aqua in tubo; si porro desideretur altitudo ea, quæ velocitati aquæ effluentis respondeat, quam §. 9. posuimus  $= z$ , erit  $z = \frac{mm}{nn} v$ , seu

$$z = \frac{mma}{2nn - mm} \left( \left( \frac{a}{x} \right)^2 - \frac{mm}{nn} - \frac{x}{a} \right)$$

§. 15. Cum  $n$  est  $= m$ , id est, cum nullum est fundum, apparet ex ipsa rei natura, aquam instar corporum gravium libere cadere atque accelerari, id ipsum autem indicat etiam æquatio; fit enim in hac positione  $z = a - x$ . Si vero foramen est veluti infinite parvum ratione amplitudinis vasis, quem casum jam supra consideravimus, ponendum est  $n = 0$ , & tunc fit  $z = x$ , quod indicat, aquam ea constantur effluere velocitate, qua ad totam aquæ altitudinem ascendere possit. Denique cum  $mm = 2nn$ , prodit  $z = \frac{mm}{0} (x - x)$ , ex quo valore cum nihil cognosci possit, descendendum est ad æquationem differentialem §. 13. quæ nunc hæc est:

$$-v dx + x dv = -x dx, \text{ vel } \frac{x dv - v dx}{xx} = -\frac{dx}{x},$$

quæ integrata cum debitæ constantis additione dat  $\frac{v}{x} = \log. \frac{a}{x}$ , vel  $v = x \log. \frac{a}{x}$ , aut  $z = 2v = 2x \log. \frac{a}{x}$ .

§. 16. Velocitas aquæ effluentis ab initio crescit posteaque decrescit, estque alicubi maxima, nempe eo in loco, quo aqua descendit ad altitudinem  $a : \left( \frac{mm - nn}{nn} \right)^{nn : (mm - 2nn)}$ ; id quoque experientia edoctus indicavit Mariottus in tract. de motu aquarum part. 3. disc. 3. exp. 5, ipsaque velocitas maxima talis est, quæ debetur altitudini

$$\frac{mma}{mm - 2nn}$$

$$\frac{mm a}{mm - 2nn} \times \left[ \left( \frac{nn}{mm - nn} \right) nn : (mm - 2nn) - \left( \frac{nn}{mm - nn} \right) (mm - nn) : (mm - 2nn) \right]$$

quæ quantitas reducta fit =

$$\frac{mm a}{mm - 2nn} \left( \frac{nn}{mm - nn} \right) nn : (mm - 2nn)$$

Intelligitur ex istis formulis tempus, quo velocitas à nihilo in maximam vertitur, plane imperceptibile esse, quando foramen vel mediocriter parvum tubusque non admodum longus est: notabile autem fieri, cum res fecus se habet, quod videmus in fontibus salientibus, ad quos aquæ per longos tractus vehuntur; hæc vero quæ ad tempora pertinent, magis in sequenti sectione explicabuntur, atque simul ostendetur, quam parum aquæ ex vasis amplissimis ejiciatur, priusquam maxima velocitate effluant.

Natura velocitatum melius intelligitur ex apposita Figura decima septima, in quâ si *AB* repræsentet totam altitudinem fluidi supra foramen ab initio fluxus, expriment curvæ *A<sub>1</sub>CB*, *A<sub>2</sub>CB*, *A<sub>3</sub>CB*, *A<sub>4</sub>CB*, scalas altitudinum respondentium, ad quas fluidum effluens sua velocitate ascendere possit in diversis foraminum magnitudinibus: nempe scala accedet ad figuram *A<sub>1</sub>CB*, si foramen habeat exiguam rationem ad vasis amplitudinem & ad figuram *A<sub>2</sub>CB*, cum assumitur fundum majori lumine perforatum; & si jam ratio foraminis sit ad amplitudinem vasis ut 1 ad  $\sqrt{2}$ , erit scala illa ut *A<sub>3</sub>CB* (quo in casu minor fit maxima velocitas quam in quocunque alio, estque nominatim ea quæ debetur altitudini  $\frac{2a}{c}$ , intelligendo per *c* numerum cujus Logarithmus est unitas, id est, altitudini paulo minori quam  $\frac{3}{4}a$ ) ac denique erit scala ut *A<sub>4</sub>CB* cum fere nihil fundi superest.

§. 17. Jam vero exemplo quodam illustrabimus, quod supra §. 10. indicatum fuit, nempe nisi foramen sit amplissimum, posse id sine valde sensibili errore in calculo considerari ut infinitè parvum, atque adeo assumi  $x = 0$ , ut §. §. 10. & 15. dictum fuit. Videtur id tantum apud nonnullos Auctores valuisse, ut censuerint, nullam magnitudinis in foramine rationem unquam esse habendam, quantumvis magnum ponatur foramen, quæ res certe ridicula est: saltem nemo hactenus quod sciam magnitudinem foraminis pro hoc negotio recte consideravit. Ponamus igitur cylindrum, cujus diameter quadrupla tantum sit diametri foraminis, cujusmodi magna foramina

mina in instrumentis hydraulicis raro occurrere solent, & fingamus superficiem aquæ per centesimam partem descendisse tantum totius altitudinis initialis (descendisse autem aliquantulum assumo, quia à primo initio motus aquæ nullus inesse potest, nedum tantus, ut aqua effluens ad totam altitudinem ascendere motu suo possit) hæ positiones faciunt  $m = 16n$  &  $mm = 256nn$ , atque  $x = \frac{99}{100} a$ , unde prodit

$$z = \frac{128}{127} \left( \frac{99}{100} - \left( \frac{99}{100} \right)^{255} \right) a = \frac{92}{100} a,$$

quæ quidem aliquantulum differt à quantitate  $x$ , seu  $\frac{99}{100} a$ , sed tamen non multum admodum, fitque differentia multo minor, cum minus est foramen, & paullo magis descendit superficies aquæ. Igitur differt hæc Theoria à vulgari potissimum circa fluxus initium, quo minor est motus, quam statutum fuit: è contrario circa fluxus finem majori velocitate aqua ejicitur, quam secundum principia solita deberet.

§. 18. Hactenus consideravimus motum aquæ à propria sua gravitate ortum; ponamus nunc vi aliena aquam ejectam fuisse præter vim gravitatis, talemque aquæ effluenti communicatam fuisse velocitatem, qua ad altitudinem multo majorem ascendere possit, quam si sola aquæ gravitas motum produxisset; dein subito vim illam alienam evanescere, & aquam sibi relinquere; Id autem si fiat, experientia docet citissime aquæ velocitatem decrescere & mox talem esse, ut notabiliter non superet velocitatem eam, quæ ex sola aquæ gravitate oritura fuisset. Ita videmus fieri aliquando in fontibus salientibus (de cujus rei causa vera atque mensura alibi dicam) ut aquæ ad triplam vel quadruplam majoremve altitudinem affiliat, quam est ordinaria; quod cum ita contingit, saltus iste protinus cessat solitamque altitudinem, quantum id sensibus percipi potest, non excedit: loquor autem de tubis foraminibus non valde magnis perforatis; nam cum foramen est aliquanto majus, non ita cito decrescit aquæ saltus. Jam itaque examinabimus, quousque theoria cum istis phænomenis conveniat, accuratasque mensuras eorum, quales inde sequuntur, subjungemus. Ut vero rem generaliter prosequamur, ponemus rursus amplitudinem cylindri ad amplitudinem foraminis ut  $m$  ad  $n$ : aquam ea explodi velocitate qua assurgere possit ad altitudinem  $a$ , eoque ipso temporis puncto altitudinem aquæ supra foramen esse

esse  $= a$ , cujus sola gravitas nunc aquam expellat; deinde descendere superficiem aquæ in Cylindro per altitudinem verticalem  $a - x$ , ita ut altitudo residua sit  $= x$  & tunc velocitatem aquæ ejectæ talem esse, quæ debeatur altitudini  $z$ . His ita positis utemur æquatione generali differentiali §. 9. quæ hæc est  $nnNdz - mmzydx + \frac{mmnzzdx}{y} = -mmyx dx$  (ubi rursus, ut §. 13. indicatum fuit, est  $y = m$  &  $N = mx$ ) quæque in casu nostro particulari talis fit

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) z dx + x dz = -\frac{mm}{nn} x dx,$$

quæ multiplicata  $x \frac{mm}{nn}$  posteaque sic integrata, ut posita  $x = a$ , fiat  $z = \alpha$  dabit æquationem desideratam finalem

$$z = \left(\frac{mm}{2nn - mm} + \frac{\alpha}{a}\right) a \times x - \frac{mm}{2nn - mm} x$$

$$\text{vel } z = \frac{mm\alpha}{2nn - mm} \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{1 - \frac{mm}{nn}} - \frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm - nn}{nn}} \alpha$$

quæ altitudo si comparatur cum illa, quæ paragrapho 14. indicata fuit, invenitur excessus unius super alteram  $= \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm - nn}{nn}} \alpha$ ; unde jam omnia ea confirmantur Phænomena, quæ modo indicata fuerunt; excessus enim iste, cum  $m$  numerus est multo major quam  $n$ , insensibilis statim fit, postquam aqua vel tantillum descendit, id est, post brevissimum temporis spatium, nunquam tamen omnis evanescit, quam diu durat fluxus, & denique eo notabilior continue est, quo magis ratio numeri  $m$  ad  $n$  ad æqualitatem accedit. Fuerit v. gr. diameter tubi decies major diametro foraminis, expellaturque aqua vi tali, ut velocitate sua affilire possit ad altitudinem quæ sit quadrupla altitudinis  $a$  seu aquæ supra foramen, quæritur ad quam altitudinem sua velocitate aqua effluens ascendere poterit, postquam per millesimam partem ipsius  $a$  superficies aquea descenderit in tubo, si interea aqua sola propria gravitate ad effluxum sollicitetur, dein quænam similis altitudo futura fuisset, si aqua nullum motum ab initio habuisset: est autem  $m = 100n$ ,  $mm = 10000nn$ ,  $x = \frac{999}{1000}a$ ,  $\alpha = 4a$ , unde in priori casu fit

F

 $z =$

$$z = \left[ \frac{10000}{9998} \left( \frac{999}{1000} - \left( \frac{999}{1000} \right)^{999} \right) + 4 \left( \frac{999}{1000} \right)^{999} \right] a,$$

$$\text{five } z = \frac{99915}{100000} a + \frac{18}{100000} a, \text{ in posteriori casu autem fit } z = \frac{99915}{100000} a,$$

ex quo exemplo patet, quam exiguus & plane insensibilis sit excessus prioris altitudinis supra alteram, & quam cito diminuatur jactus ille aqueus, quandoquidem tota mutatio fiat, dum superficies aquæ per millesimam partem altitudinis  $a$  descendit, quod tempus in machinis hydraulicis solitis non potest non esse admodum breve. Tum etiam confirmatur, quod supra Paragrapho 17. dictum fuit, esse scilicet proxime  $z = x$ , quando foramen est vel mediocriter parvum, cum in præsentī casu, ubi motus à quiete incipit, differentia inter  $z$  &  $x$  sit tantum quindecim centies millesimarum partium ipsius altitudinis  $a$ ; quoniam interim paululum major est altitudo  $z$  quam  $x$ , patet ad majorem altitudinem ascendere posse aquam effluentem, postquam aliquantisper effluxit aqua, quam est altitudo aquæ supra foramen.

§. 19. Postquam sic ex Theoria nostra generali deduximus, quæ motum fluidorum ex cylindris verticaliter positis spectant, jam etiam considerabimus tubos oblique positos, qui prælongi esse solent in fontibus salientibus. In his enim id singulare est, quod acceleratio motus non ita repente fiat, veluti cum Cylindri sunt verticales atque sic liceat sensibus percipere consensum Theoriæ, cum motu aquarum reali.

§. 20. Fingamus canalem utcumque incurvum, sed tamen Cylindricum, cujus amplitudo habeat rursus ad amplitudinem foraminis rationem  $m$  ad  $n$ . Incipiat motus à quiete, sitque altitudo verticalis aquæ supra foramen ab initio motus  $= a$ ; Effluxerit certa aquæ quantitas, ponaturque altitudo verticalis aquæ residuæ supra foramen  $= x$ , longitudo canalī, quæ eo ipso momento plena est  $= \xi$ , habeatque tunc aqua interna (cujus singulas particulas motu axi canalī parallelo feri hīc assumo) velocitatem, quæ respondeat altitudini  $v$ ; His ita positīs, si simili ratiocinio utamur quo supra, quærendo nimirum incrementum *ascensus potentialis* dum guttula effluit, uti paragrapho 6. fecimus, idemque ponendo  $=$  *descensui actuali*, obtinetur nunc talis æquatio

$$\xi dv - \frac{m m}{n n} v d\xi + v d\xi = -x d\xi, \text{ five}$$

$$\left( 1 - \frac{m m}{n n} \right)$$

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) v d\xi + \xi dv = -x d\xi$$

cujus integralis, quod patet multiplicatis terminis per  $\xi - \frac{mm}{nn}$  hæc est

$$v = \xi^{\frac{mm}{nn} - 1} \int -x \xi^{-\frac{mm}{nn}} d\xi.$$

Fuerit v. gr. canalis rectus & ita inclinatus versus horizontem, ut sinus anguli intercepti inter utrumque sit ad sinum totum ut 1 ad g, erit  $\xi = gx$ ; unde

$$v = \frac{nn a}{2nn - mm} \left( \left( \frac{a}{x} \right)^{\frac{nn - mm}{nn}} - \frac{x}{a} \right)$$

quæ æquatio cum non differat ab æquatione §. 13. pro Cylindris verticalibus data, sequitur in utroque casu velocitates aquæ easdem esse, postquam descensus verticales superficiei aquæ iidem sunt: Igitur accelerationes in locis homologis utrobique similes sunt ratione altitudinum verticalium, & hoc tantum discriminis intercedit, quod in canali inclinato lentius fiant, idque in ratione ut 1 ad g: facile igitur sensibus percipi poterunt hæ accelerationes in canalibus valde inclinatis, quæ in verticalibus ob nimiam mutationum celeritatem non possunt. Coeterum patet per se ex eo, quod frictiones à longitudine tubi augeantur, non posse non velocitates inde diminui, ad quod animus advertent ii, quibus experimenta hæc de re instituere animus erit.

*De Effluxu Aquarum ex Cylindris verticaliter positis, qui in alios tubos strictiores pariter verticales desinunt.*

§. 21.

Constat experientia, inter duos Cylindros omnino æquales similiterque positos, quorum alterius foramini tubus strictior respondeat, hunc citius depleri, qui tubum appensum habet, & quidem eo citius, quo magis tubus à loco insertionis versus extremitatem amplitudine crescit, quæ pluribus exposuit D. s'Gravesande in *Phys. Elem. Math.* lib. 2. cap. 8. Totam rem sequenti Problemate comprehendemus.

**Problema.**

Fig. 18.

§. 22. Fuerit vas cylindricum A E H B (Fig. 18.) verticaliter positum perforatum in F G, quo lumine communicet cum tubo conico F M N G, per cujus demum orificium M N aquæ effluant. Quæritur velocitas superficiei aqueæ C D, postquam à quiete descendit per A C vel B D.

**Solutio.**

Sit altitudo aquæ supra M N initialis, nempe  $NG + HB = a$ , altitudo superficiei aqueæ in situ C D supra M N, id est,  $NG + HD = x$ ; longitudo tubi annexi seu  $NG = b$ ; amplitudo orificii M N  $= n$ ; amplitudo orificii F G  $= g$ , amplitudo Cylindri superioris  $= m$ ; sit velocitas superficiei aqueæ in C D talis quæ debeat altitudini  $v$ , erit in æquatione generali §. 8.  $y = m$  &  $N = m(x - b) + \frac{b m m}{\sqrt{g n}}$ , quæ substitutiones instituto calculo conformes esse patebunt cum §. 6. reliquæ autem positiones eadem sunt quæ ante. Abit igitur æquatio paragraphi 8 in hanc

$$m(x - b)dv + \frac{b m m}{\sqrt{g n}} dv - \frac{m^3 v dx}{n n} + m v dx = -m x dx$$

quæ porro divisa per  $m$  factoque  $x - b + \frac{m b}{\sqrt{g n}} = z$ , dat

$$\left(1 - \frac{m m}{n n}\right)$$

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) v dz + z dv = -z dz - b dz + \frac{mb dz}{\sqrt{gn}}$$

quæ multiplicata per  $z$   $\frac{-mm}{nn}$  facit

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) z \frac{-mm}{nn} v dz + z \frac{1 - \frac{mm}{nn}}{nn} dv = -z \frac{1 - \frac{mm}{nn}}{nn} dz - b z \frac{-mm}{nn} dz + \frac{mb z \frac{-mm}{nn} dz}{\sqrt{gn}}$$

post cujus integrationem addita constante C oritur

$$z \frac{nn - mm}{nn} v = C - \frac{nn}{2nn - mm} z - \frac{2nn - mm}{nn} z - \frac{nnb}{nn - mm} z + \frac{nn - mm}{nn} z + \frac{mnnb}{(nn - mm)\sqrt{gn}} z \frac{nn - mm}{nn}$$

in quo valor quantitatis constantis C ex eo definitur quod ab initio fluxus (cum nempe  $x = a$  sive  $z = a - b + \frac{mb}{\sqrt{gn}}$ ) fit  $v = 0$  quia non potest motus oriri in instanti temporis puncto; hinc igitur fit  $C =$

$$\left[ \left( a - b + \frac{mb}{\sqrt{gn}} \right) \times \frac{nn}{2nn - mm} + \frac{nnb\sqrt{gn} - mnnb}{(nn - mm)\sqrt{gn}} \right] \times \left( a - b + \frac{mb}{\sqrt{gn}} \right) \frac{nn - mm}{nn}$$

Ex his quidem æquationibus definiuntur omnia; quia verò calculus fit paullo prolixior, nisi amplitudo vasis superioris indicata per  $m$  tanta fit, ut possit ratione amplitudinum  $g$  &  $n$  infinita cenferi, hunc solum considerabimus casum, idque eo magis quod error notabilis inde non oriatur, etsi mediocris sit magnitudinis numerus  $\frac{m}{n}$  aut  $\frac{m}{g}$

§. 23. Quod si proinde ponamus  $m = \infty$ , simulque utamur primâ æquatione differentiali proximi paragraphi, atque in hac ponatur  $v = \frac{nn}{mm} s$ , ut sic inveniatur ex valore litteræ  $s$  altitudo ad quam aqua per orificium MN effluens suâ velocitate ascendere possit, erit primo

$$\frac{nn}{m} (x - b) ds + \frac{bnn}{\sqrt{gn}} ds - m s dx + \frac{nn}{m} s dx = -m x dx$$

& quia  $m = \infty$  atque facile prævidetur rationem fore finitam inter  $s$  &  $x$ , atque inter  $ds$  &  $dx$ , hæc eadem æquatio mutabitur rejectis terminis rejiciendis rursus in hanc  $-m s dx = -m x dx$  vel  $s = x$ , quod pariter paragr. 10. jam

jam fuit demonstratam. E re vero duxi id de novo hic demonstrare, quia casus præfens diversus videri poterat ab illo, de quo in præfato paragrapho dicitur. His intellectis non opus est pluribus explicare Phænomena circa hanc rem §. 21. Auctore s'Gravesande indicata; patet enim, aquam non aliter effluere per vas compositum A E F M N G H B, quam per vas simplex A O M N P B, cum nempe orificium M N est valde parvum, atque hinc majorem esse velocitatem superficiei aqueæ C D, quam si per vas A E F G H B aquæ effluerent, posito orificio M N = F G, multoque magis si M N fuerit majus quam F G, quod fit cum tubus versus inferiora amplitudine crescit: attamen observari debet, ab initio motus aquam tardius descendere, quam sic definitum fuit, nec regulam istam prius locum habere quam superficies C D per spatium aliquod descenderit, quod tamen brevi fit tempore: mutationes, quæ ab initio motus fiunt, in hoc casu, examinabimus in sectione sequente.

Fig. 19. §. 24. Eodem modo computus esset instituendus, si vasi, quod semper nunc amplitudinis infinitæ ponimus, implantatus esset tubulus non verticalis sed horizontalis, veluti in fig. 19. aut sub alia directione qualicunque, semper autem reperietur aquas per orificium M N mox, postquam superficies aquæ in vase principali aliquantulum descendit, ea proxime effluere velocitate, quæ respondeat altitudini istius superficiei supra orificium; Inde liquet quod manentibus tam altitudine aquæ supra tubulum G N, quam ipso orificio F G, augeatur quantitas aquæ dato tempore effluens ab aucta amplitudine orificii M N: Sic igitur demonstratum hic dedimus, quod dictum fuit in fine §. 5, Sect. 1. Frontinum experientia fuisse edoctum, nempe, *plus debito aquæ erogari per calicem legitime tum mensuræ tum positionis, cui statim fistula amplioris moduli subiecta sint.* Et quidem quantitates aquæ cæteris paribus erogari deberent ipsis orificiis M N proxime proportionales, nisi multa essent impedimenta; quæ hanc quantitatem valde diminuant, de quibus proxime dicam: facere possunt hæc impedimenta; ut admodum parum fluxus aquarum promoveatur ab aucto orificio extremo; semper tamen promovebitur aliquantum.

§. 25. Ex præmissis liquet velocitatem, qua superficies aquæ C D in utroque, de quo diximus, casu descendit cæteris paribus pendere ab amplitudine orificiorum M N; Hæc autem ea innituntur hypothesi, quod aqua lateribus tubulorum G N ubique adhæreat & pleno orificio M N effluat, quæ  
hypo-

hypothesis locum amplius habere non posset, si nimium orificium istud augeretur. Dein patet quoque, cum aquæ per tubum verticalem in fig. 18. effluunt, earum fluxum accelerari à longitudine hujus tubi auctâ: posset tamen hæc quoque ita augeri, ut tandem aquæ desinant esse continuæ in tubo, quin potius in columnas dividantur, quod fiet, si tubus longitudinem habeat plus quam triginta duorum pedum aut minorem etiam, si simul amplitudine crescat versus MN; ita si orificium MN duplum sit orificii alterius FG, non poterit longitudo major esse quam octo pedum, sine periculo subsecuturæ aquarum separationis in suprema tubi parte, quam rem alibi demonstrabo: sed est alia insuper causa præter nimiam tubi longitudinem, quæ aquæ separationem producere potest, nempe quod altitudo aquæ CEHD minor sit, quam ut sat cito in tubum irrumpere possit, quo fit, ut aër una cum aqua simul superne influat, dum superficies aquæ formam cataractæ seu infundibuli cavi assumit, sic ut non totum orificium FG aqua obtegatur; Hæc quidem res facit, ut aqua minori copia effluat, non autem ut minori velocitate, quod posterius putavit Auctor quidam Italus, nomine Carolus Fontana, qui hæc de re Lingua sua vernacula ita scripsit: *mà se non vi fosse, inquit, tant' acqua, che bastasse à mantenere piena detta canna, l'acqua attraherà l'aria dentro di se in tanta quantità, quanto gli mancherà l'acqua intermettendosi fra l'acqua dà ogni banda; mà la velocità dell' acqua mancherà tanto, quanto sarà l'altezza di tutta l'aria raccolta insieme che sarà in essa canna.* Rationem ejus, quod dixi, non inde velocitatem aquæ diminui posse, quilibet perspicit ex eo, quod alias non posset *ascensus potentialis* esse æqualis *descensui actuali* poteritque res facili experimento confirmari, incurvata tubi extremitate MN, ut aquæ horizontaliter effluant, & ex amplitudine jactus velocitas aquæ dignosci possit. Quomodo autem pro lubitu fieri possit, ut nullis mutatis aliis circumstantiis aër aquis circa summitatem tubi misceatur, sic habe: fiat nempe parvulum foramen in tubo haud procul ab orificio FG (Fig. 18. & 19.) quod si autem durante aquæ fluxu digito obturaveris istud foraminulum, aquæ transfluent puræ, & si removeris digitum, mox aër per foraminulum idem irrumpet seque cum aqua præterfluente miscebit. His intellectis facile erit rationem reddere Phænomenorum, quæ in caminis seu fumi-ductibus observantur, fumus enim altum petit, quia aëre levior est, quod constat experimentis de fumo in vacuo, ubi descendisse visus fuit, sumtis: idem igitur est de fumo ascendente,

dente, quod de aqua descendente: hæc autem in fig. 18. eo celerius effluit per orificium M N, quo amplius est, & quo humilior positum: ergo etiam fumus eo celerius caminum transibit, eoque magis ignis in foco accendetur, quo altius ducetur caminus, & quo magis superiora versus divergit, si modo non nimis divergat; quod utrumque experientia confirmat; Ipse deinde insuper expertus sum, si caminus alicubi perforetur, tantum abesse, ut fumus per foramen istud exitum tentet, quin potius aër magno impetu irruat, seque fumo miscens per caminum ascendat, non secus atque aërem per foraminulum *e* in tubum F G N M (Fig. 18. & 19.) irrumpere indicavimus. Ita vero fumus minori certe copia, aut saltem difficilior ascendet ignisque remittet.

Cæterum duæ sunt potissimum causæ, altera aliena altera naturæ rei propria, quæ motum aquæ valde retardare possunt in fig. 18. & 19. Prior est adhæsiō aquæ ad latera tubi, & altera, quod cum tubus amplitudine crescit velocitas aquæ, nullibi sibi constans in quovis tubi loco mutetur, quæ mutatio si oriri censeatur ab impulsibus infinite parvis aquæ velocius motæ in aquam minus velociter motam, apparet singulis momentis ab impulsibus his corporum mollium aliquid de *ascensu potentiali* perdi, unde necessario aquarum effluxus notabiliter diminuitur.

§. 26 Loco ultimo nunc dicam quædam de vasis recurvis, ex quibus aquæ non omnes effluunt: brevitatis autem gratiâ canalem considerabimus cylindricum, & cujus quidem pars, quam superficies aquea non transgreditur, sit recta.

### Problema.

Fig. 20. Sit nempe canalis cylindricus C E D B (Fig. 20.) cujus pars C E quanta sufficit est recta, reliqua E D B utcumque incurvata; fuerit canalis totus aqua plenus effluxura per foramen B, perveneritque superficies aquæ ex C in F, quæritur altitudo respondens velocitati aquæ in F.

### Solutio.

Ducantur verticalis B H & horizontales C H, F G, A B, sitque sinus anguli H C E ad sinum totum ut 1 ad g: Jam vero si rem recte perpendamus, videbimus contineri problema præsens in altero generaliori, quod supra paragrapho 20. tractavimus, ubi habuimus hanc æquationem:

$$v = \xi^{\frac{m}{n}} - \int -x \xi^{\frac{m}{n}} d\xi$$

ubi

ubi pro nostro casu præsentè intelligitur per  $v$  altitudo quæsitæ respondens velocitati superficiæ aqueæ in situ F, per  $\xi$  longitudo B D E F & per  $x$  altitudo BG, atque per  $\frac{m}{n}$  index rationis inter amplitudines tubi & foraminis B: Quod si vero dicatur longitudo B D A =  $\alpha$  erit  $x = \frac{\xi - \alpha}{g}$ , undè nunc habetur

$$v = \xi^{\frac{m}{n}} - \int \left( \frac{\xi - \alpha}{g} \right)^{\frac{m}{n}} d\xi$$

Indicetur longitudo totius canalis B D E C per  $\zeta$ , & erit

$$\int \left( \frac{\xi - \alpha}{g} \right)^{\frac{m}{n}} d\xi = \frac{n n \alpha}{g (n n - m m)} \left( \xi^{\frac{n n - m m}{n n}} - \alpha^{\frac{n n - m m}{n n}} \right) - \frac{n n}{g (2 n n - m m)} \left( \xi^{\frac{2 n n - m m}{n n}} - \alpha^{\frac{2 n n - m m}{n n}} \right)$$

atque proinde

$$v = \frac{n n \alpha}{g (n n - m m)} \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\xi} \right)^{\frac{n n - m m}{n n}} \right) - \frac{n n \xi}{g (2 n n - m m)} \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{\xi} \right)^{\frac{2 n n - m m}{n n}} \right). Q. E. I.$$

### Scholium.

§. 27. Quoniam hæ æquationes sunt paullo prolixiores non immorabimur generali earundem contemplationi, consideraturi potius casus istos particulares, qui calculum abbreviant, nec ultima ista æquatione definiri possunt.

Si operculum in B omne abesse ponamus, fit  $m = n$  & (quod seorsim pro hoc pariter atque altero casu mox dicendo erui debet)

$$v = \frac{b - \xi + \alpha \log. \xi - \alpha \log. \alpha}{g}$$

tuncque velocitas maxima est in A, nominatimquæ talis, quæ respondet altitudini  $\frac{\alpha - \alpha + \alpha \log. \alpha - \alpha \log. \alpha}{g}$ .

Denique punctum E maximo respondens descensui obtinetur ope hujus æquationis,

$$\xi - a \log. \xi = C - a \log. C$$

Alter casus seorsim subducendus calculo est, cum  $mm = 2nn$ , ubi oritur

$$v = \frac{a\xi - aC - \xi C \log. \xi + \xi C \log. C}{g}$$

atque si capiatur, posito  $c$  pro numero, cujus logarithmus est unitas,

$\xi = c^{\frac{a-C}{C}}$   $C$  determinabitur sic locus maximæ velocitatis, cujus altitudo generatrix est  $= c^{\frac{a-C}{C}} C - a$ , dum maximus descensus, qui proportionalis est toti aquæ effluenti, definitur faciendo

$$a\xi - aC - \xi C \log. \xi + \xi C \log. C = 0$$

Non dubito, quin hæc ad amussim experientiæ essent responsura, si modo adhæsió aquæ ad latera tubi motum non retardaret; puto tamen, eventum experimentorum talem esse posse, ut intelligenti, qui horum impedimentorum rationem habeat, satis ostendant propositionum veritatem.

§. 28. Ultimo loco communicabo veram solutionem phænomeni aliqujus, quod primo aspectu valde videtur paradoxon. Postquam enim ex omnibus hætenus dictis luculenter apparet fieri non posse, ut aquæ multo majori velocitate effluant quam qualis altitudini aquæ supra foramen debetur, (possunt tamen aliquanto majori, præsertim si foramina sunt magna, confer ea quæ dixi de velocitatibus maximis §. 16.) multis mirum fortasse videbitur, contingere aliquando in fontibus salientibus, ut aqua ad temporis momentum jactum faciat longe altiore, quam secundum regulas nostras fieri posse videtur. Verum tantum abest, ut hæ inde aliquid roboris perdant, quin potius egregie confirmentur. Solutio autem paradoxii in eo consistit, quod nos hætenus aquas consideraverimus continuas, & nullo vacuo aëreo separatas: Recteque observavit D<sup>us</sup>. De la Hire non fieri hujusmodi saltus irregulares, nisi aër una cum aqua tubum prope scaturiginem fuerit ingressus, quod sæpe fieri indicavi §. 25. Ille vero aër simul cum aqua fertur usque ad orificium effluxus, per quod mox erumpit: id dum fit, massa aquea impetum

tum acquirit, qui in expellendas aquas solus impenditur, hocque pacto enormem jactum producit. Hanc phænomeni causam mox clarius una cum debitis mensuris explicabo, postquam præmiserò verba, quæ hæc de re extant, in *hister. Acad. Reg. sc. Paris. ad An. 1702.* On voit quelques fois, dicitur in loco citato, l'eau qui sort par un ajutage saillir trois ou quatre fois plus haut que ne lui permet la hauteur du réservoir, aussi se remet-elle bien vite à la hauteur, que lui prescrivent les loix de l'hydrostatique. Mais comment a-t-elle pu en sortir en un instant. Msr. De la Hire l'attribue à de l'air enfermé dans la conduite, qui ayant été pressé & mis en ressort par l'eau, qui descendoit toujours, s'est debandé contre celle qui montoit & lui a donné cette vitesse momentanée.

Recte itaque animadvertit Dn. De la Hire aëri saltum deberi, dubiumque nullum est quin veram rationem, quâ aër id producere possit, fuisset eruturus, si phænomenon, quod obiter attigit, attentius considerasset, facile utique perspecturus, aërem inter medias aquas nullam sustinere pressionem, nisi super incumbentis aquæ (imo ne hanc quidem in aquis fluentibus, uti inferius in sect. XII. demonstrabo) nec adeoque aërem compressum fortius expellere posse aquam sibi præcedentem, quam si sui loco aqua esset. Ego quidem prævidi (quod facillimo experimento sæpe postea sum expertus) non esse aquam ante aërem positam solito altius assurgentem, sed illam, quæ aërem sequitur, quod nunc clarius faciam.

Sit igitur in Figura vigesima aquæ ductus CADB cylindricus, ut esse solet, isque totus aquâ plenus, præter particulam mnB aëre plenam. Ducantur lineæ horizontalis & verticalis CH & HB: ponamus brevitatis ergo aëris gravitatem præ gravitate aquæ nullam censerì posse, ita ut transitus aëris per orificium B nihil resistat fluxui aquæ, quamvis de cætero facile foret inertiae aëris rationem habere, nisi calculi prolixitatem evitare vellemus in re, ubi nullam quærimus præcisionem. Sit longitudo canalìs CADf vel CADm (ponimus enim differentiolam mf aëre repletam valde parvam) = c; mf vel ng = d: HB = a; amplitudo tubi = m, amplitudo orificiì B = n; Denique demus aquæ, cum superficies est in mn, nullum esse motum, quæsituri al-

titudinem velocitati debitam, quam superficies  $mn$  habet, cum pervenit in situm  $fg$ ; sit ista altitudo  $=v$ , erit *ascensus potent.* omnis aquæ eo ipso momento pariter  $=v$ : *Descensus actualis* autem est per §. 7.  $=$  tertiæ proportionali ad totam massam aquæ, particulam aquæ  $mngf$  & altitudinem verticalem  $HB$ , id est,  $=\frac{\delta}{6}a$ ; est igitur  $v=\frac{\delta}{6}a$ . Hæc quidem altitudo dicto citius minuitur statim atque aqua per orificium  $B$  fluere cogitur, quod demonstravi §. 18. sed primo tamen temporis puncto aqua fervabit motum quem acquisivit, & sic guttula orificio proxima ejicietur velocitate, quæ debeatur altitudini  $\frac{mm\delta}{nn6}a$ . Potest autem hæc altitudo non solum esse tripla aut quadrupla ipsius  $a$ , sed & quantumcunque magna: ego certe cum tubis vitreis pro lubitu jactus feci decies aut vigesies altiores ipsius  $a$ ; fuerit v. gr.  $\delta=100$  pedum,  $6=$  uni pollicis, diameter autem tubi decupla diametri, quam orificium habet; & erit  $\frac{mm\delta}{nn6}=\frac{10000}{1200}a$ , ita ut in his circumstantiis prima guttula affilire demta aëris resistentia debeat ad altitudinem plusquam octies majorem altitudine solita  $a$ . Sunt coeterum multa impedimenta eaque maximi momenti, quæ jactus enormes cohibeant; perditur nempe aliquid de motu ab impulsu superficiei aqueæ  $mn$  in latera  $fg$ , dein etiam ab ingenti attritu quem aqua per foraminulum, quod parvulum esse debet, tam celeriter lata patitur: multum etiam abest, quominus aqua  $CADm$  omni sua celeritate moveatur ob adhæSIONem aquæ ad latera tubi, quæ adhæSIO in tam longo tractu valde notabilis est.

Interim veram hanc esse solutionem phænomeni nullum potest esse dubium, istique solutioni experimenta quæ feci in omni extensione satisfaciunt. Dein hæc theoria etiam recte solvitur alterum phænomeni momentum, quod nempe jactus iste sit quasi momentaneus, postque brevissimum tempusculum ad sensus non major solito: ita in præsentī, quem modo finximus, casu si per regulam §. 18, paullo mutatam (ibi enim de vasis verticaliter positīs tantum dicitur) exploremus, quantum aquæ effluere debeat ut jactus non amplius millesimā parte (quæ utique observari in hujusmodi experimentis minimè potest) superet jactum solitum, cum ab initio fuerit eodem octies major, invenimus tam parvam esse illam quantitatem, ut tempus, quo tota ejicitur, nullo modo percipi possit.

*Expe-*

*Experimenta quæ ad Sect. 3. pertinent.*

Prænotanda.

**P**Lurima quidem sunt in hac Sectione eaque fere præcipua, quæ vix ad experimenta revocari *immediate* possunt; Etenim cum Auctores hætenus motum in fluidis effluentibus alium non consideraverint, quam qui fiunt per foramina valde parva, cumque proin nova sit theoria quam dedimus pro amplitudinibus foraminum qualibuscunque, hæc ipsa est, cujus confirmatio maxime juvaret. At non video, quomodo in Cylindris verticalibus, de quibus potissimum egimus, velocitas aquæ effluentis observari possit, præsertim cum foramen est valde amplum (secus enim ex tempore depletionis aliquod de velocitatibus iudicium ferri potest.) Hæc ita perpendens cogitavi demum scopo nostro inservire posse paragraphos 16. & 20. in quorum priore determinata fuit velocitas maxima aquæ effluentis ex cylindris verticaliter positis, in altero autem demonstratum est, eundem esse motum ex cylindris oblique positis & verticalibus, si utrobique altitudines verticales similes assumantur: Commode igitur utemur cylindris oblique positis, ut ex maxima amplitudine jactus aquei possit velocitas maxima aquæ seu altitudo eidem debita experimento haberi: & hæc quidem ratione accurate velocitas illa maxima, qualis revera est, explorari potest, etiamsi foramina sint quantumlibet magna, quæ proin si convenire observetur cum regulis nostris, de integra theoria dubium superesse nullum poterit.

Priusquam vero rem ipsam aggrediar, præmittendum erit theorema mechanicum, quod sequitur.

Lemma.

Sit AB (Fig. 21.) linea verticalis, BD horizontalis; linea autem AD Fig. 21. directionem habeat qualemcunque, sub cujus directione corpus in A projectum intelligatur, arcum describens parabolium AC, cujus nempe tangens in A est recta AD, erit altitudo debita velocitati, qua corpus in A projectum fuit,  $= \frac{BC^2 \times AD^2}{4 AB \cdot BD \cdot CD}$  atque si AD fuerit horizontalis sive angulus BAD

rectus, erit eadem illa altitudo  $= \frac{BC^2}{4 AB}$ .

Jam vero quæ mihi observata fuerint exponam.

*De Velocitatibus maximis fluidorum per foramina  
valde ampla effluentium.*

Ad §. 16. & 20.

Experimentum Primum.

Fig. 22. **T**ubum Cylindricum F A (Fig. 22.) longitudinis quatuor pollicum oblique ad horizontem posui, in eoque situ firmavi, erat autem amplitudo tubi ad amplitudinem luminis in A ut 2 ad 1. & quidem diameter tubi præter propter septem lineas exæquabat; Dein mensuris acceptis in particulis æqualibus linearum FE, A B & B D (quarum lex ex ipsa figura per se patet) illas inveni 81. 619. & 740.

His ita præparatis, tubum aquâ replevi, digito interim obturato orificio A, eoque confestim remoto aquæ brevissimo tempusculo effluxere omnes: observare tamen potui, primas & ultimas propius ad verticalem AB, quam medias cecidisse; guttas autem longissime projectas incidisse in locum C invenique post sæpius repetitum experimentum B C particularum, quibus antea usus fueram, 235.

Jam vero si per præmissum lemma quærat altitudo E G, ad quam guttæ maxima velocitate ejectæ ascendere possint, reperitur  $EG = 56$ . part. deberet autem vi §. §. 16. & 20. esse  $= 62$ . nisi attritus aquæ ejusquæ adhesio ad latera tubi impedimentum motui afferret: majorem consensum non expectavi.

II. Positis quæ prius, diminuto tantum ad dimidium foramine A, ita ut amplitudo tubi esset quadrupla amplitudinis ad lumen pertinentis, observavi B C  $= 252$ ; Hinc deducitur E G  $= 68$  per experimentum; per theoriam autem debuisset esse  $= 70$ ; numeri hi minus differunt quam præcedentes, quia hic multo minus fuit attritus impedimentum ob diminutam velocitatem internæ aquæ. Utrumque autem experimentum egregie profecto theoriam confirmat.

*De*

*De velocitate aquæ ex vase amplissimo  
erumpentis.*

Ad §. 17.

**I**N isto paragrapho dicimus, si vas sit amplissimum, aquam mox, postquam superficies interna aliquantulum descendit, erumpere velocitate, quæ constanter respondeat altitudini aquæ supra foramen. Sinas autem sub quâcunque directione (neque enim in vasis amplissimis directio venæ quicquam velocitatem mutare potest) aquam effluere, & observes quocunque temporis puncto, in quanta distantia ab verticali vena in horizontem impingat, & exinde per præmissam regulam quære altitudinem velocitati aquæ effluentis eo temporis puncto respondentem, sic semper istam altitudinem invenies æqualem altitudini aquæ supra centrum foraminis, si modo excipias primas guttulas, quæ vi §. 16. minori velocitate effluere debent & actu effluunt: Neque impedimenta, quorum sæpius mentionem injecimus, ullam notabilem moram fluxui injicient, si modo diameter foraminis duas aut tres lineas minimum exæquet, & diameter ipsius vasis non sit infra aliquot pollices, & denique altitudo aquæ nimia non sit, veluti plurium pedum.

Hæc omnia sæpe expertus sum, experimenti autem genus nimis est triviale, quam ut prolixè describi mereatur.

*De vasis quæ sunt Tubis verticalibus instructa.*

Ad §. 22. & 23.

**D**E his experimenta sumsit Cel. s'Gravesande in *Phys. Elem. Math.* quæ repetii; ea vero quæ ad rem præsentem faciunt huc potissimum redeunt.

In Figuris nempe 23. 24. 25. 26. sunt singulæ aperturæ littera A notatæ, inter se æquales, solâ B existente paullo majore in ratione ut 16 ad 25, amplitudines quoque, ut & altitudines cylindrorum sunt æquales excepto ultimo, cujus longitudo quadrupla est: tubi autem duobus cylindris intermediis annexi, triplam habent longitudinem cylindrorum. His igitur vasis aqua repletis de ejus effluxu observatum fuit.

I. Superficiem aquæ à principio non citius descendere in Fig. 23. quam Fig. 24. postquam vero utrobique aliquid aquæ effluxit, multo celeriore fieri

Fig. 23.  
24. 25.  
& 26.

fieri motum in vase composito quam in simplici ; utrumque præmonui in fine §. 23. Res autem melius & accuratius intelligitur ex æquationibus differentialibus, quas §. §. 22. & 23. dedimus, quibus si utamur ad prima motuum incrementa invenienda, tam in cylindro simplici Fig. 23. quam in composito Fig. 24. atque hunc in finem ponamus amplitudines cylindri & tubi esse ut  $m$  ad  $n$ , erit incrementum, quod vocavimus  $d v$  in vase simplici ad incrementum in vase composito, ut  $1 + \frac{3m}{n}$  ad 4, adeoque longe majus in isto casu quam in hoc. Si proin primum motum recte percipere liceret, celeriore statim illum observaturi essemus, qui fit in Cylindro simplici ; Cum vero in §. 15. & 23. porro demonstratum fuerit, superficiem aquæ, postquam paululum descendit in utroque vase proxime tales esse, quæ respondeant altitudinibus  $\frac{nn}{mm} \propto$ , intelligendo per  $x$  altitudines aquæ supra orificia, per quæ effluit, sequitur mox multo majori velocitate aquam descendere in Fig. 24. quam Fig. 26. Sic igitur Theoria plane convenit cum observatis.

II. Superficiem aqueam non parum velocius descendere in Figura 26. quam 24. ita ut velocitas in casu Fig. 24. sit quasi media inter casus Figuræ 23. & 26. Hic vero rursus patet, primas quidem accelerationes multo tardius fieri in cylindro Fig. 24. quam 26. Hoc igitur respectu ipsa theoria indicat, quod observatum fuit ; at certe differentia multum abest, ut tanta inde oriri possit, quantam expertus fui, neque amplius sensibilis esse deberet, postquam utrobique superficies paululum descendit, per §. 23. debet autem reliquum impedimento tribui, quod ab attritu aquæ in Fig. 24. oritur : aqua enim per tubum A A magna velocitate fertur, ficque tam ob velocitatem auctam, quam ob amplitudinem vasis diminutam impedimentum motui aquæ validissimum offertur.

III. Denique velocissime, si prima temporis puncta excipias, aqueam superficiem descendere in Cylindro Fig. 25. & notanter velocius quam in Fig. 26.

Id vero conforme est cum his quæ §. 23. demonstrata sunt ; deberent autem mox post commune motus initium, positis nempe altitudinibus aquæ supra orificia effluxus fere æqualibus, velocitates in Figuris 25. & 26. proxime esse ut amplitudines orificiorum B & A, id est, ut 25. ad 16. & quod minor observetur velocitatum differentia, rursus impedimento frictionis esttribuendum præter aliam causam in fine §. 25. indicatam.

D.

*De iisdem vasis, quibus tubi horizontales  
inseruntur.*

Ad §. 24.

Cum aquæ ex vase valde amplo veluti CDG (Fig. 19.) per tubum horizontalem GM ampliorem in extremitate NM quam ortu GF fluunt, majori velocitate illas ferri per orificium GF (si rursus excipias primas guttas) quam si vel tubus abest, vel Cylindricus esset. Id etiam Frontinus experientiâ procul dubio edoctus affirmavit, alii vero moderni negarunt.

Igitur operæ pretium duxi rem experimento explorare. Erat autem altitudo vasis, quo usus sum, supra axem tubi  $\text{---} 5 \frac{1}{4} \text{ poll. Angl.}$  longitudo tubi GN  $\text{---} 2 \text{ poll. } 5 \text{ lin.}$  diameter orificii GF erat  $\text{---} 3, 36. \text{ lin.}$  diameter aperturæ MN  $\text{---} 5, 48. \text{ lin.}$  erant proin amplitudines orificiorum ut 3. ad 8 proxime, amplitudo vasis sat magna erat, ut infinita censerî posset præ amplitudine tubi. Volui omnes mensuras allegare, ut quivis experimentum repetere possit. Hoc autem vase aqua repleto observavi amplitudinem jactus, & ex hac postquam omnes mensuras cognovissem requisitas calculum posui de altitudine, quæ velocitati aquæ transfluentis tum in GF, tum in NM deberetur: hanc inveni proxime undecim linearum, atque proin alteram  $\text{---} 6. \text{ lin.}$  cum duabus nonis lineæ partibus, quas easdem altitudines alio etiam experimenti genere inveni. Quoniam autem major est altitudo 6. poll. cum  $6 \frac{2}{5} \text{ lin.}$  quam  $5 \frac{1}{4} \text{ poll.}$  confirmatur theoria nostra de acceleratione aquæ internæ ab amplificatione tubi versus extrema, quamvis multum absit, ut duabus potissimum rationibus §. 25. allegatis inductus præmonui, quin tantum revera acceleretur quantum vi §. 24. remotis obstaculis, quorum in calculo nulla ratio habita fuit, deberet.

Ad §. 25. Hoc paragrapho in transitu monui, multis modis fieri posse, ut aër aquæ per tubos fluenti misceatur. Inde autem futurum, ut aquæ minori copia effluant quidem, sed non minori velocitate, quod utrumque ut experirer primo in tubis AA & AB (Fig. 24. & 25.) non procul ab eorundem Origine parvulum utrobique feci foramen; factum est, ut aquæ per tubos, cum aliquo strepitu ferrentur & turbidæ effluerent, superficies autem solito multo lentius descenderet; Deinde tubum Figuræ 19. pariter ali-

H

quan-

quantulum perforavi, haud procul à G, rursusque observavi, paullo lentius descendere superficiem internam, cujus rei me certum fecit quod numerabam oscillationes alicujus penduli, quibus superficies per datum spatium descendit: ratione autem aquarum effluentium vidi aliquando aquas pleno orificio effluere & tunc aquas solito minus esse pellucas, jactum autem ordinarium vel ordinario paullo majorem facere; sæpissime autem aquam & aërem juxta se ferri, illam in parte tubi inferiore juxta latus FM, hunc in superiori juxta GN & tunc aquas esse limpidas atque velocitate ejici solito non solum haud minori, sed & multo majori, quod fieri posse haud obscure prævideram. De hac re in sequenti Sectione aliud experimentum majori præcisione institutum apponam.

Dabitur autem fortasse alibi locus demonstrandi aquas sufficienti aëris quantitate permittas, ea proxime effluere copia, qua effluerent rescisso tubo eo in loco ubi est perforatus, cui rei ipsam quoque experientiam respondere animadverti.

### *De canalibus recurvis.*

Ad §. 27.

Fig. 27. **D**Ucta in pariete horizontali MN (Fig. 27.) tubum cylindricum CDB totum aquâ plenum, cruraque ambo inter se parallela habentem, ita posui, ut extremitas altera B horizontalem MN raderet, simulque crura essent verticalia, dum interea orificium C digito obturabam aquæ effluxum sic compescens.

Dein remoto digito observavi, altitudinem maximam BP, ad quam aquæ effluentes ascendebant, aliisque vicibus attendi ad locum E, ad quem descendit aquæ superficies; feci autem sub duabus diversis circumstantiis experimentum; primo enim loco nullum in B posueram operculum; deinde operculum adhibui tali lumine perforatum, quod amplitudinem haberet ratione amplitudinis tubi ut 1. ad  $\sqrt{2}$ . Interim mensuræ tales fuere: CA = 345; ADB = 530; BP = 33; & AE = 88. particulis, quarum 375 longitudinem Pedis Lond. exæquabant. Hæc ita fuere in casu priori, in altero autem manentibus reliquis vidi BP = 64 & AE = 54. Notabo hîc in transitu, quod alio explorare cupiens modo maximum descensum AE, post finitum experimentum inclinaverim tubum, donec aqua jam jam effluxui per B proxima

xima videbatur, quo temporis puncto distantiam mensuravi superficiei à loco A antea notato; distantia illa, quam eandem cum maximo descensu A E fore putabam, opinione longe minor fuit; unde edoctus fui partem aquæ, quæ in experimento jam per B effluxerat, tubum rursus ingressam fuisse.

His ita observatis, magnitudines B P & A E calculo quæsi ad normam §. 27. ponendo  $m$  primo  $\text{---} n$  deinde  $m m \text{---} 2 n n$ , inveni autem in casu priore B P  $\text{---} 79$ . quæ in experimento non superavit 33. maximumque descensum A E proxime reperi  $\text{---} 250$ . quem experimentum dedit 88. dein pro casu  $m m \text{---} 2 n n$  oritur B P præter propter dupla illius, quæ observata fuit & A E  $\text{---} 186$ . quæ 54. particularum observata fuit.

Enormes has differentias maxima ex parte adhæfioni aquæ ad latera tubi tribuo, quæ certe adhæfio in hujusmodi casibus incredibilem exercere potest effectum, usus enim sum tubo vix ultra duas lineas in diametro habentem, majorem utique consensum experturus cum tubo ampliore. Interim verisimile est, curvaturam tubi in parte inferiore, aliquid etiam motui derogare.

Ad §. 28. Eodem tubo recurvo, quem modo descripsi, usus sum: operculum autem posui in B minimo foramine pertusum: feci ut totus aqua esset plenus præter particulam F G B, in quo situ aquam detinui ope digiti orificio C appositi. Remoto digito descendit aqua, & cum pervenisset in situm H D B, guttulæ aliquot tanto impetu per foraminulum in B fuerunt veluti explosæ, ut ad altitudinem plusquam decem pedum ascenderint, quamvis altitudo H A altitudinem dimidii pedis vix superaret. Interim ob exiguitatem foraminuli tantam resistantiam offendit aqua dum transiret orificium, ut fracto impetu aqua non solum non ad altitudinem A H ascenderit (supra quam tamen remotis omnibus impedimentis assilire paullulum continue debuisset) sed vix guttula una aut altera notabili temporis mora fuerit expressa, ita ut mihi persuadeam, si absque impetu sola aquæ pressione naturali tantus jactus producendus fuisset, id fieri non potuisse nisi altitudine minimum centum pedum.

Dein etiam observavi jactum aquæ diminui eo magis quo minus ante experimentum relinquitur spatium G B; quæ omnia theoriæ sunt conformia. Mensuras superfluum fuisset sumere, quia ob nimia impedimenta tantus esse utique nequit jactus aquæ, quantus illis remotis futurus fuisset. Attamen ut & has convenire cum formulis experimento confirmarem, tubum C D B sumsi ampliore, ut impedimenta adhæfionis maxima parte auferrem, pars

DFB parvula erat, minorque etiam pars GB, quam in experimento ab aqua relinquebam vacuum: ac denique operculum foramine non admodum parvo erat pertusum. Et tunc vidi saltum non multum admodum defecisse ab altitudine  $\frac{mm^3}{nn^6} a$ , quam §. 28. pro hoc negotio dedi, imo memini me præsentis Amico altitudinem saltus recte prædixisse, postquam perpendissem, quantum in calculo præter propter impedimentis esset dandum.

Similem aquæ explosionem *momentaneam* eamque à simili causa oriundam facillime obtinebis cum fontibus, qui aquas per fistulam pleno orificio eijciunt. Si enim digitum orificio fistulæ subito ita apponas, ut pars orificii aperta maneat, protinus aquas magno impetu expelli videbis, moxque tenue aquæ filum intra pristinos velocitatis limites reduci. Observabis etiam aquas eò majori impetu atque longius projici quo minus digito relinquas foramen, atque pro eodem relicto foramine, jactum insolitum eò magis protrahi (utut semper brevissimum) fierique oculis sensibiliorem, quo longior est fistula, ita ut in fontibus salientibus, ad quos aquæ ex castello per longissimos canales feruntur, si canales non essent admodum ampli & aquæ pleno effluerent orificio, non dubito quin sic per notabile temporis spatium vehemens aquæ jactus protrahi posset, gradatim ad solitam velocitatem rediturus: Hæc omnia conformia sunt cum iis, quæ §. §. 28. & 18. monita fuerunt.

Experimentum hoc me aliquando & prima quidem vice fecisse memini coram V. V. Cel. D. D. De Maupertuis & Clairaut, cum quibus antea in sermonem de rebus istis aquariis forte delapsus eram. Quamvis autem hic nullus sit aër, qui accusari possit, revera tamen phænomenon istud ab eo, quod D. de la Hire observatum fuit, non differt, & utrumque ab eo provenit, quod motus aquæ in canali contentæ, vel saltem motus istius pars perire non possit, sine ullo inde proveniente effectû, quem ipse enormis aquarum jactus constituit.

HYDRO-

# HYDRODYNAMICÆ

## SECTIO QUARTA.

*De variis temporibus, quæ in effluxu aquarum desiderari possunt.*

### §. I.

**R**es videbitur multis omnino Geometrica, quæ scilicet nulla consideratione physica opus habeat, ut, cum aquæ ex dato vase per lumen cognitum velocitatibus in omni situ determinatis effluunt, tempus definiatur, quo data effluat aquæ quantitas. Attamen experientia contrarium docet; nam multo minori quantitate aquæ effluunt perforamina, quæ sunt in lamina tenui, quam ex simplici velocitatum consideratione sequeretur, idque plerumque (nec enim res sibi constat in diversis circumstantiis) in ratione ut 1 ad  $\sqrt{2}$ ; movit hoc Newtonum, ut affirmaret in prima *Princ. math.* editione aquam ex vase ea effluere velocitate, quæ generetur altitudine dimidia aquæ supra foramen, cui opinioni omnia experimenta de velocitatibus immediate sumpta, contradicunt. Explorans postmodum ipse magnus Vir hujus contradictionis originem, eam positam esse observavit in contractione venæ aqueæ, quæ contractio mox præ foramine fieri solet. Alia quoque mihi observata fuit venæ mutatio priori nunc similis nunc contraria. Nempe cum aquæ non per simplex foramen, verum per tubulum effluunt, rursus contrahitur vena, si tubus exteriora versus convergit, sed dilatatur si idem divergit. De contractione venæ aqueæ per tubos convergentes effluentis accuratissima fuisse experimenta Joh. Polenus in libro de *castellis* p. 15. & seqq. contractio venæ eo major à Viro Celeberrimo observata fuit, quo amplius erat orificium tubi conici internum manentibus orificio externo atque longitudine tubi, quæ ratio est, quod similis aquæ quantitas ceteris paribus eò tardius effluxerit, quò amplius fuerit orificium internum, quamvis impedimenta ab adhæsiōne aquæ ad late-

ra tubi minorem continue habuerit effectum: fecerunt autem istæ impedimentorum diminutiones, ut aquæ majori velocitate in loco, quo vena maxime erat contracta, fluerent, & nihilominus parcius erogarentur: verum id esse colligitur ex observatis effluxus temporibus & venarum, ubi maxime contrahuntur, amplitudinibus. Igitur cum in hisce venæ mutationibus cardo rei vertatur, è re erit phænomena uberius examinare & explicare.

§. 2. Assumamus v. gr. cylindrum verticalem, qui in medio fundi horizontaliter positi, habeat foramen, aqua autem interna divisa concipiatur in strata horizontalia: His ita positis, censuimus motum cujusvis strati eundem esse & talem quidem, ut situs horizontalis in illis conservetur, ubi tamen monui, non posse hanc hypothesin extendi ad strata foramini proxima, quoniam vero inde nullus error sensibilis oriri possit ratione velocitatis aquarum effluentium, operæ pretium non esse, ut ejus rei ratio habeatur. Nunc vero, quando alia phænomena à motu aquæ internæ obliquo, qualis præsertim in prædictis stratis foramini proximis est, pendent, hunc paucis lustrabimus.

Fig. 28. §. 3. Mihi autem videtur motum aquæ internæ talem esse concipiendum, qualis foret si aqua ferretur per tubulos infinitos juxta se positos, quorum intermedii proxime rectà à superficie versus foramen descendunt, reliquis sensim se incurvantibus prope foramen, uti Fig. 28. *a* ostendit, ex quâ apparet, singulas particulas hoc modo descendere motu tantum non verticali, donec fundum prope attingant, easque tunc cursum suum sensim versus foramen inflectere, ita ut particulæ fundo proximæ motu fere horizontali, alteræ magis verticaliter ad foramen effluant. Hujusmodi motus sæpe oculis observare potui, cum particulæ ceræ, quam vocant Hispanicæ, innatabant aquæ. Exinde autem intelligitur non posse singulas particulas foramini adstantes directionem suam integram servare, neque tamen ita eam inflectere, ut motum axi plane parallelum assumant, sed fore potius, ut vena aquæ effluentis contrahatur usque in *d e*, ubi sic notabiliter gracilior erit, quam in ortu circa foramen *a c*. Hæc autem contractio venæ verticaliter fluentis non confundenda est cum alia contractione, quæ fit ab acceleratione aquæ. Dein patet quoque, quod cum singularum particularum foramini adstantium diversa sit directio, necessario ab impetu, quem in se mutuo faciunt eadem particulæ, vena com-  
pri-

primatur, atque sic gracilescat. Et ab ista compressione fit, quod alias contradictionem involveret, ut aqua jam jam egressa, etiamnum præ foramine acceleretur, & sic *ascensus potentialis* crescat, etiam si ad alteram accelerationem omnibus corporibus cadentibus communem non attendamus, ceu huc non pertinentem, & cujus deinceps mentionem non faciemus. Hæc autem nisi me fallat opinio, res erit porro hunc in modum tractanda.

(I.) Eousque vena aquæ consideranda est, donec particularum velocitates amplius non mutantur, quod quamvis nunquam fiat omni rigore, atamen non procul à foramine fieri censendum est, veluti in *d e*. Hoc autem si ita fuerit & aquæ ex vase A B C D per foramen *a c* effluere ponantur, erit loco vasis simplicis A B C D concipiendum aliud compositum A B *a d e c* C D.

Quicquid igitur in præcedente sectione præmissum fuit, pro determinandis ubique velocitatibus, id omnino locum habebit, si loco vasis subjecti concipiatur vas, quod dixi tubulo contracto instructum. Nec tamen hæc correctio, ratione præmissæ nostræ methodi velocitatum aquæ effluentis determinandarum, sensibilem mutationem producere potest ob brevitatem tubuli *a d e*, potest autem valde notabilem ratione quantitatis, quia aquæ non tam per orificium *a c*, quam per *d e* effluere censendæ sunt.

(II.) Sic erunt velocitates in diversis locis ipsius venæ reciproce ut amplitudines sectionum respondentium & cum in vasis amplissimis velocitas in *d e* talis sit quæ toti altitudini aquæ conveniat, simulque experimentis constet, amplitudines *a c* & *d e* proxime esse ut  $\sqrt{2}$  ad 1, putavit Newtonus sic confirmari posse theoriæ suam, qua statuit aquam ex foramine vero velocitate effluere quæ debeat dimidiæ altitudini aquæ supra foramen, quamvis in progressu velocitas aquæ crescat: quâ in re mihi videtur nimium adhæsisse præconceptæ opinioni: neque enim ratio orificii *a c* ad *d e* semper eadem est, neque sic explicari potest motus aquarum ex vase, cui tubulus adhæret: verbo! attenuatio venæ prorsus accidentalis est, potest enim tota impediri, apponendo foramini parvulum tubulum cylindricum vel augendo tantum crassitiem laminæ, cui foramen inest, & tunc sine ulla correctione locum habent tam ratione

tione velocitatum quam quantitatum theoremata, quæ in præcedente sectione exhibita fuerunt.

(III.) Patet autem ex ipsa explicatione supra data de *contractione venæ*, non posse non illam à diversis circumstantiis mutari; ita experimenta docent, diminui eandem ab auctâ laterum foraminis crassitie: an altitudo aquæ supra foramen aliquid conferat non fatis scio: crediderim fere crescere aliquantulum contractionem ab aucta altitudine aquæ internæ, quamvis facile parum id fore prævideam: verisimile quoque est, eo minorem cæteris paribus fore contractionem venæ, præsertim verticalis, quo maiorem rationem habuerit amplitudo foraminis ad amplitudinem cylindri, quia motus aquæ internæ fundo proximæ eo minus fit obliquus, ita ut si foramen totam amplitudinem cylindri occupet, nulla utique attenuatio venæ aqueæ oriri possit. Ad hoc animum advertant velim, qui hujus contractionis in ipsa velocitatum determinatione rationem habendam esse fortasse cogitabunt. Cum enim foramen non multo minus est amplitudine vasis, nulla oriri potest contractio notabilis & cum foramen est parvum, nulla rursus oritur fere differentia circa velocitates sive foramen aliquantum augeatur sive diminuatur.

§. 4. Eadem propemodum ratio est aquarum horizontaliter, ut de aliis directionibus taceam, effluentium: nam simili modo ab omni parte affluet aqua ad foramen; imo etiam ex inferiori parte ascendet usque ad foramen ut effluere possit, quod ipse sæpe fieri observavi. Simili igitur causa similis fiet in vena effluente attenuatio, quam eo facilius est oculis perspicere, quod hic locum non habeat altera attenuatio ab acceleratione aquæ jam egressæ oriunda. Et ob hanc rationem, si quis observationes circa contractionem venæ facere instituat, is meo iudicio melius faciet, utendo venis horizontaliter, quam sub aliâ directione effluentibus.

§. 5. Quanta autem sit contractio, id est, quænam ratio intercedat inter amplitudinem orificii sectionemque venæ horizontaliter effluentis minimam experiri licet vel sumendo actu mensuras diametrorum istis amplitudinibus respondentium, vel etiam mediante quantitate aquæ dato tempore, datisque velocitatibus effluentis, ubi tamen velocitates non tam ex altitudine aquæ supra foramen, quam ex amplitudine jactus deducenda erunt, quando-

qui-

quidem impedimenta nunc majora nunc minora nunquam omnem aquæ velocitatem permittant, quam vi theoriæ, qua horum impedimentorum ratio nulla habetur, acquirere deberet.

§. 6. Ex præmissis nunc fati patere puto perfectum consensum fore inter quantitatem aquæ effluentis ejusque velocitatem, si modo foramini, quod est in vase, substituatur aliud foramen eo usque diminutum, donec sectionem venæ maxime contractæ non superet: atque perinde erit, in quonam venæ loco, aut in quânam profunditate à superficie aquæ foramen hoc esse constituatur, siue in *a c* siue in *de*, quandoquidem velocitates semper proxime responderunt toti altitudini aquæ supra eum locum, quo foramen fingitur: amplitudinem hujus foraminis mente concipiendi vocabo deinceps *Sectionem venæ aqueæ contractæ*.

§. 7. Quod si jam *Sectio* ista, de quâ modo diximus, constantem haberet rationem ad orificium, in eadem ratione diminuendum cogitatione foret foramen effluxus, postmodumque calculus de quantitate aquæ dato tempore effluentis instituendus. Ita nempe posita ista ratione  $\frac{1}{\alpha}$  nominatâque amplitudine orificii  $n$ , censenda esset *Sectio venæ solidæ*  $= \frac{n}{\alpha}$ .

At variabilis cum sit sub diversis circumstantiis, regulas in hanc rem à priori dare non licet: mutatur autem maxime à crassitie laminæ, in quâ foramen est, aucta vel diminuta: aliquid etiam, quamvis id parum, conferre potest magnitudo foraminis, amplitudines vasis, hæque tam absolutæ, quam relativæ, ut & fortasse altitudo aquæ supra foramen. Interim assumtis lamina tenui, vase amplissimo, foramine ad 4. vel 6. lineas in diametro assurgente; solet ratio inter foramen & *Sectionem venæ contractæ* non multum recedere ab illâ, quam Newtonus statuit, nempe ut  $\sqrt{2}$  ad 1. Sæpe autem ab aliis major observata fuit, atque ab aliis etiam minor.

§. 8. Quæcunque vero sit, in quolibet casu illam indicabimus, ut ante, per  $\frac{\alpha}{1}$ . Huicque positioni nunc calculum pro temporibus superinstruemus; brevitatis autem gratia considerabimus tantum vasa cylindrica, atque in his duo potissimum examinabimus temporum genera; primum quod punctum maximæ velocitatis definit, alterum, quod depletioni respondet. In utroque vero casu motum à quiete incipere ponemus.

§. 9. Fuerit igitur vas cylindricum verticaliter positum aqua plenum, sitque altitudo aquæ ab initio fluxus  $= a$ , amplitudo cylindri  $= m$ , amplitudo foraminis  $= n$ , *sectio venæ solidæ*  $= \frac{n}{a}$  effluxerit jam aqua per tempus  $t$ ; sitque tunc altitudo aquæ residua supra foramen  $= x$ , eodemque temporis puncto habeat superficies aquæ internæ velocitatem, quæ respondeat altitudini  $v$ : erit velocitas ipsa  $= \sqrt{v}$ , est autem elementum temporis  $dt$  proportionale elemento spatii  $-dx$  diviso per velocitatem  $\sqrt{v}$ , unde  $dt = \frac{-dx}{\sqrt{v}}$ .

Determinatus æquidem fuit valor ipsius  $v$  in *sect.* 3. ubi iisdem denominationibus usi sumus, quibus nunc utimur. At quoniam pro recta aquarum erogatarum mensura requiritur, ut foramini  $n$  substituatur *sectio venæ contractæ*  $\frac{n}{a}$ , sequitur, ut in valore ipsius  $v$  eadem fiat substitutio atque sic statuatur  $v = \frac{nn a}{2nn - mm a a} \left( \left( \frac{a}{x} \right)^2 - \frac{mm a a}{nn} - \frac{x}{a} \right)$

Hic vero valor si substituatur in æquatione

$$dt = -\frac{dx}{\sqrt{v}}, \text{ oritur}$$

$$dt = -dx : \sqrt{\left[ \frac{nn a}{2nn - mm a a} \left( \left( \frac{a}{x} \right)^2 - \frac{mm a a}{nn} - \frac{x}{a} \right) \right]}$$

ope cujus æquationis omnia tempora desiderata definiri possunt per approximationes, seu series, si modo in singulis punctis valor ipsius  $a$  innotescat: Assumemus autem esse illum constantis valoris, quandoquidem in præsentī casu nihil sit, à quō mutari possit præter diversas altitudines & velocitates fluidi, quæ parum vel nihil quantum sensibus percipi potest ad id negotii conferunt.

§. 10. Jam ut æquatio desiderata per series exhiberi possit, considerabimus quantitatem.

$$1 : \sqrt{\left[ \frac{nn a}{2nn - mm a a} \left( \left( \frac{a}{x} \right)^2 - \frac{mm a a}{nn} - \frac{x}{a} \right) \right]} \text{ sub hac forma}$$

$$\left( \frac{nn a}{mm a a - 2nn} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \left( 1 - \left( \frac{x}{a} \right) \frac{mm a a}{nn} - 2 \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ factoremque}$$

po-



$$a : \left( \frac{m m \alpha \alpha - n n}{n n} \right)^{\frac{n n : (m m \alpha \alpha - 2 n n)}{n n}} = a : \left( \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right)^{\frac{n n : m m \alpha \alpha}{n n}}$$

quoniam autem  $\frac{m m \alpha \alpha}{n n}$  est numerus infinitus, poterit cenſeri :

$$\left( \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right)^{\frac{n n : m m \alpha \alpha}{n n}} = 1 + \left( \log. \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right) : \frac{m m \alpha \alpha}{n n} ;$$

cujus rei demonſtratio talis eſt : propoſita ſit quantitas infinita A habeaturq; ut in noſtro exemplo  $A^1 : A$ , facile quiſque videt eſſe hanc quantitatem paullo majorem, quam eſt unitas, & quidem exceſſu infinite parvo, quem vocabimus  $z$ ; habetur itaque  $A^1 : A = 1 + z$ , ſumantur utrobique logarithmi & erit  $\frac{\log. A}{A} = \log. (1 + z) = (\text{ob infinite parvum valorem ipſius } z) z$ ; Igitur eſt  $A^1 : A = 1 + \frac{\log. A}{A}$  : proindeque ſimiliter eſt, ut diximus,

$$\left( \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right)^{\frac{n n : m m \alpha \alpha}{n n}} = 1 + \left( \log. \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right) : \frac{m m \alpha \alpha}{n n}$$

Porro quia quantitas hæc unitati addita eſt infinite parva, erit

$$a : \left( \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right)^{\frac{n n : m m \alpha \alpha}{n n}} \text{ feu}$$

$$a : \left[ 1 + \left( \log. \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right) : \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right] = a - a \left( \log. \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right) : \frac{m m \alpha \alpha}{n n} :$$

eſt igitur ſpatium per quod ſuperficies aquæ deſcendit, dum à quiete maxima oritur velocitas  $= a \left( \log. \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right) : \frac{m m \alpha \alpha}{n n}$ , ſeu  $= \frac{2 n n \alpha}{m m \alpha \alpha} \log. \frac{m \alpha}{n}$ .

Indicat hæc æquatio deſcenſum aquæ in vaſe infinite amplo infinite parvum eſſe, cum aqua jam maximum velocitatis gradum attigerit : Potuiſſet autem hoc non obſtante dubitari, an non interea quantitas aquæ finita effluat, quandoquidem cylindrus ſuper baſi infinita erectus, utut altitudinis infinite parvæ magnitudinem poſſit habere infinitam : at ſequitur ex noſtra æquatione, hanc quoque quantitatem infinite parvam eſſe, & nominatim æqualem

$$\frac{2 n n \alpha}{m m \alpha \alpha} \log. \frac{m \alpha}{n}.$$

Atque convenit hoc egregie proſecto cum phænomenis, quæ in effluu aquarum ex caſtellis per ſimplex foramen toto die experimur. Cum enim

enim foramen digito obturamus, moxque remoto digito aquas horizontaliter effluere finimus, nullam guttulam in terram delapsam observamus mediam inter jactum longissimum & locum, qui foramini ad perpendicularum respondeat.

§. 12. Prouti in proximo paragrapho determinavimus quantitates ut ut infinite parvas, descensus aquæ internæ uti & effluentis aquæ dum maximum velocitatis gradum aqua attingit, ita nunc idem præstabimus ratione tempusculi. Dico eutem sufficere in æquatione §. 10. tempus exprimente, ut in utraque serie unicus accipiatur terminus primus, quod apparebit cum quis calculum ad duos extenderit terminos: est igitur tempusculum quæsitum five

$$t = \left( 2 - 2 \sqrt{\frac{x}{a}} \right) \times \frac{\sqrt{\left( \frac{m m \alpha \alpha - 2 n n}{n} \right) \cdot a}}{n}$$

hinc posito pro  $x$  valore huc pertinente, qui in præcedente paragrapho fuit definitus, fit

$$t = \left[ 2 - 2 \sqrt{1 - \left( \log. \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right) : \frac{m m \alpha \alpha}{n n}} \right] \times \sqrt{\left( \frac{m m \alpha \alpha - 2 n n}{n n} \right) \cdot a}$$

vel posito  $1 - \left( \log. \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right) : \frac{2 m m \alpha \alpha}{n n}$  pro respondente quantitate signo radicali involuta prodit

$$t = \left[ \left( \log. \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right) : \frac{m m \alpha \alpha}{n n} \right] \times \sqrt{\left( \frac{m m \alpha \alpha - 2 n n}{n n} \right) \cdot a}$$

aut denique rejecta quantitate  $2 n n$  in signo radicali, oritur  $t = \frac{2 n \sqrt{a}}{m \alpha} \cdot \log. \frac{m \alpha}{n}$ .

Est autem hoc tempusculum infinite parvum, quia, ut notum est, logarithmus quantitatis infinitæ infinities minor est ipsâ quantitate. At vero cum sic statim ab initio fluxus, aqua maxima sua velocitate expellitur, mirum prima fronte videbitur fortasse aliquibus, motum in instanti generari finitum: nemo tamen absurdum putabit, massam infinitam, cujusmodi est quantitas aquæ in vase infinito contentæ, posse tempusculo infinite parvo motum producere finitum, idque solâ gravitatis actione.

§. 13. Si præterea in ista vasis infinite ampli positione tempus depletionis, quod utique infinitum erit, exprimere velimus, erit, ut supra indi-

catum fuit, in æquatione paragraphi decimi ponendum  $x = 0$ , simulque solus primus seriei terminus adhibendus rursusque ponendum  $m a$  pro  $\sqrt{(m m a a - 2 n n)}$ ; atque sic fit

$$t = \frac{2 m a}{n} \sqrt{a}.$$

Tum denique tempus, quod impenditur in descensum superficiei per altitudinem  $a - c$  exprimetur in simili hypothefi hac æquatione

$$t = \frac{2 m a}{n} (\sqrt{a} - \sqrt{c}).$$

§. 14. Præmissæ æquationes non accurate quidem, proxime tamen satisfaciunt, cum vas non infinitæ, permagnæ tamen amplitudinis est: imo non multum admodum deficient, cum numerus  $m$  vel mediocriter superat numerum  $n$ . Liceat quædam hic verba adjicere circa experimentum quod in fine paragraphi undecimi indicavi, deturque hæc venia instituto nostro, quod in phænomenis motuum experientia cognitis potissimum versatur illustrandis examinandisque. Dixi autem in citato paragrapho cum aqua horizontaliter effluit, primam guttulam totam statim obtinere amplitudinem jactus; atque idem hoc quidem indicat theoria pro vasis amplissimis; at vero in vasis mediocriter amplis, quædam guttulæ minori impetu effluere deberent, priusquam punctum maximæ velocitatis adsit, hæque guttulæ incidere deberent in locum aliquem medium inter maximum jactum & punctum, quod foramini verticaliter respondet; atque hoc etiam ita fieri observavi, ex vasis amplitudinis veluti decies foramine majoris. Verum cum experimentum aliquando sumerem de vase pedem dimidium alto, quod amplitudinem præter propter centuplam haberet foraminis, ne minima quidem particula aquæ, quantum videre potui, notabiliter à jactu aquæ pleno defecit. Videamus itaque quænam aquæ quantitas in hoc casu effluere deberet ante punctum maximæ velocitatis; erit autem tanta, quantam continet cylindrus ejusdem amplitudinis in altitudine

$$a - a : \left( \frac{m m a a - n n}{n n} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{12 11: (m m a a - 2 n n)}$$

(vid. §. 10. sub. fin.); nec differt fere hæc minima altitudo ab hac multo compendiosiori, nempe  $\frac{2 n n a}{m m a a} \log. \frac{m a}{n}$  (vid. §. 11.) ubi nunc per  $\frac{n}{m}$  intelligitur

tur  $\frac{1}{100}$  & per  $a$  pes dimidius, dum pro  $a$  substitui potest  $\sqrt{2}$ . ( non desideramus enim hic summam accuratorem ) & per  $\log.$  indicatur logarithmus hyperbolicus, ita vero fit,

$$\frac{2\pi n a}{m m a a} \log. \frac{m a}{n} = \frac{1}{20000} (\log. 100. + \frac{1}{2} \log. 2. ) =$$

0, 0002475 *ped.* seu, 0, 000297 *poll.* & quoniam amplitudinem vasis æqualem inveneram  $6\frac{1}{2}$  *poll.* quadratis, intellexi quantitatem aquæ quæsitam, quæ nempe effluere debuisset priusquam jactus maximus oriretur, exæquare circiter partem quinquagesimam secundam unius pollicis cubici, seu, posito guttam mediocrem sex lineas cubicas efficere, plusquam quinque guttas. In experimento autem nullam observavi, cujus rei rationem esse suspicor, quod primæ guttulæ, quamvis jam ejectæ ab aqua subsequente tamen etiamnum propellantur; nimis enim celeriter alteræ subsequeuntur, quam ut primæ ab illis interea divelli possint. Huc autem facit, quod tempusculum à fluxus initio ad maximam expulsiōem usque ( quod nempe per §. 13. est proxime  $= \frac{2\pi\sqrt{a}}{m a} \log. \frac{m a}{n}$ , ubi per  $2\sqrt{a}$  hic intelligitur tempus, quo corpus per altitudinem dimidii pedis labitur, id est, circiter  $\frac{2}{11}$  unius minuti secundi ) quod inquam tempusculum illud non ultra partem centesimam quinquagesimam octavam unius minuti secundi excurrat.

Fortasse aliquid contribuit, quod non possit digitus sat celeriter à foramine removeri. Præsertim vero huc pertinet, quod maxima pars illius aquæ; quæ ante præsentem maximam velocitatem erumpit, ita ad maximam jactum accedat, ut nulla differentia observari possit & sic vix unica guttula notabili discrimine ab illo defectura fuisset, si se libere ab aqua subsequente separare potuisset.

§. 15. Hactenus de aquis per foramina effluentibus : progrediamur nunc ad effluxum aquarum ex vasis per conos seu convergentes seu divergentes. Quod si autem aquæ effluant per tubum convergentem, dicat eadem ratio à motu particularum convergente petita §. 3. pro foraminibus simplicibus exposita, fore ut aquæ vena præ foramine contrahatur etiamnum ejusque particulæ accelerentur & sic quantitas aquæ dato tempore effluentis minor sit quam mensuræ orificii effluxus & velocitatum, nulla habita ratione ad contractionem venæ, indicant. Parva autem solet esse

esse ista contractio in tubis longioribus. In tubis divergentibus omnia fiunt modo contrario : dilatatur enim vena præ foramine ; aquæ motus retardatur & major aquæ quantitas dato tempore effluit, quam sine ista dilatatione sequeretur ex observatis amplitudine orificii & velocitatibus aquæ per illud effluentis. Ex tubis denique cylindricis effluens vena aquea nec contrahitur nec dilatatur.

Probe est itaque attendendum ad has five contractiones five dilatationes in æstimandis quantitatis aquæ dato tempore effluentis, quam quæstionem obiter tractabimus in fine sectionis.

Nunc autem libet examini subijcere mutationes quæ in effluxus aquarum succedunt ab initio motus. In his vero compendii causa non attendemus ad mutationes venæ ; neque enim res ita est comparata ut possit experimentis satis accurate confirmari neque magni momenti hic sunt præfatæ mutationes ; res autem ipsa digna est, quæ sollicitè perquiratur ut ejus natura animo rectè intelligi possit.

De vasis, quæ tubos habent annexos, jamjam egimus in superiori sectione §. 31. §. 32. §. 33. & quidem paragrapho 31. æquationes dedimus generaliores, quæcunque fuerit ratio inter amplitudines vasis & tubi : sed nimis sunt perplexæ calculumque postulant admodum operosum : In paragrapho, qui hunc sequitur, hypothese pertractavi, quæ vas ubique amplitudinis infinitæ ratione tubi facit, in qua hypothesi dixi, aquam effluere velocitate, qua ad integram altitudinem aquæ supra orificium effluxus ascendere possit ; sed tamen in fine paragraphi expresse monui, *ab initio motus aquam tardius descendere, quam sic definitum fuit, nec regulam istam prius locum habere, quam superficies per spatium aliquod descenderit*, quæ res per se satis patet, quandoquidem non possit in instanti velocitas maxima produci à statu quietis in tubo, quamvis fiat in vase foramine simplici perforato.

Hæc ita perpendens animo concepì mutationes initiales explorare, easque ad certas mensuras reducere. Ad hoc autem minime sufficit præmemorata regula, quæ istarum mutationum initialium nulla ratio habetur, quamvis cæterum exactè vera in vase infinite amplo ; omnes enim mutationes quæ statum maximæ velocitatis præcedunt, fiunt dum superficies per spatium infinite parvum descendunt ; attamen descensus iste, si modo vas fuerit sensu

Geo-

Geometrico infinitum, non solum non fit tempore infinite parvo, prouti in casu foraminis simplicis, sed tempore infinite magno, intereaque etiam quantitas aquæ infinita effluit, cum per foramen quantitas cæteris paribus infinite parva effluat. Hæc autem ut eruerem, opus habui aliam elicere æquationem ex æquatione generali §. 23. *sect.* 3. quam simplicissimam hanc  $s = x$ , posita  $s$  pro altitudine, quæ velocitati aquæ effluentis respondeat &  $x$  pro altitudine aquæ supra orificium effluxus; intelliget autem quisque rem pro instituto nostro ita esse efficiendam, ut habeatur ratio incrementorum velocitatis, quod antea non requirebatur.

§. 16. Fuerit igitur ut in paragrapho 22. *sect.* 3. cylindrus AEHB (Fig. 18.) isque censeatur infinite amplius & aqua plenus, habeatque tubum annexum FMNG finitæ amplitudinis formæ conii truncati, siue crescentis amplitudine siue decrescantis versus orificium MN, per quod aquæ effluunt: fit ut ibi altitudo initialis aquæ supra foramen MN, nempe  $NG + HB = a$ ; altitudo superficiæ aqueæ in situ CD supra MN, id est,  $NG + HD = x$ ; longitudo tubi annexi seu  $NG = b$ , amplitudo orificii MN  $= n$ , amplitudo orificii FG  $= g$ , amplitudo cylindri, quæ est infinita,  $= m$ ; sitque tandem velocitas superficiæ aquæ in situ CD talis quæ conveniat altitudini  $v$ , quæ altitudo utique infinite parva erit. His positis vidimus loco citato obtinere generaliter hanc æquationem:

$$m(x-b)dv + \frac{bmm}{\sqrt{gn}}dv - \frac{m^3}{nn}vdx + mvd x = -mxdx$$

in quâ patet, posse nunc negligi terminum primum  $m(x-b)dv$  præ secundo  $\frac{bmm}{\sqrt{gn}}dv$ , ut & quartum  $mvd x$  præ tertio  $-\frac{m^3}{nn}vdx$ , atque sic assumi

$$\frac{bmm}{\sqrt{gn}}dv - \frac{m^3}{nn}vdx = -mxdx.$$

in qua æquatione si rursus negligatur primus terminus, quod fieri potest, nisi mutationes etiam desiderantur, quæ durante primo descensu, etsi infinite parvo fiunt, orietur regula vulgaris *ascensus potentialis* aquæ effluentis ad altitudinem integram aquæ: nunc vero pro nostro negotio, quo mutationes illas primas desideramus, terminus iste retinendus erit, atque sic æquatio ultima in tota sua extensione pertractanda.

Ponatur autem pro separandis ab invicem indeterminatis  $\frac{mm}{nn} v - x = s$ , five

$$v = \frac{nn}{mm} (s + x), \text{ atque } dv = \frac{nn}{mm} (ds + dx) \text{ ficque fiet}$$

$$dx = \frac{-nnbds}{nnb - ms\sqrt{gn}},$$

quæ ita est integranda, ut facta  $x = a$ , prodeat  $v = 0$ , hincque  $s = -a$ , ita vero fit

$$x - a = \frac{nnb}{m\sqrt{gn}} \log. \frac{nnb - ms\sqrt{gn}}{nnb + ma\sqrt{gn}}$$

& posito pro  $s$  valore ejus assumto  $\frac{mm}{nn} v - x$ , prodit

$$x - a = \frac{nnb}{m\sqrt{gn}} \log. \frac{n^4b - m^3v\sqrt{gn} + mnnx\sqrt{gn}}{n^4b + mnnx\sqrt{gn}}$$

Hic rursus in quantitate signo logarithmicali involuta potest ex nume-  
ratore eliminari terminus  $n^4b$ , infinities nempe minor termino  $mnnx\sqrt{gn}$   
nec non ex denominatore terminus  $n^4b$  infinities pariter minor altero  
 $mnnx\sqrt{gn}$ . Et sic fit

$$x - a = \frac{nnb}{m\sqrt{gn}} \log. \frac{nnx - mma}{nna}$$

Inde habetur, posito  $c$  pro numero cujus logarithmus est unitas :

$$v = \frac{nnx}{mm} - \frac{nna}{mm} \times c \frac{m.(x-a)\sqrt{gn}}{nnb}$$

aut posita  $a - x = z$ , sic ut  $z$  denotet spatium, per quod superficies aquæ  
jam descendit, poterit æquationi hæc conciliari forma :

$$v = \frac{nn.(a-z)}{mm} - \frac{nna}{mm} : c \frac{mz}{nb} \sqrt{\frac{g}{n}}$$

de qua iterum liquet quod cum  $z$  vel minimam habuerit rationem ad  $b$ , fiat  
denominator alterius termini infinitus &  $v = \frac{nn.(a-z)}{mm} = \frac{nnx}{mm}$  : at vero ali-  
ter se res habet, quamdiu descensus  $z$  infinite parvus est, quem casum nunc  
consideramus.

§. 17. Hisce præmissis facile nunc est definire per quantum spatium  
descendat fluidum, dum maximam velocitatem acquirit, faciendo nempe

$$dv = 0,$$

$$dv = 0, \text{ five } -\frac{n n dz}{m m} + \frac{n a}{m b} \sqrt{\frac{g}{n}} : c \frac{m z}{n b} \sqrt{\frac{g}{n}} = 0, \text{ id est,}$$

$$z = \frac{n b}{m} \sqrt{\frac{n}{g}}, \times \log. \left( \frac{m a}{n b} \sqrt{\frac{g}{n}} \right).$$

Hæc autem altitudo multiplicata per altitudinem cylindri  $m$  dat quantitatem aquæ interea effluentis, nempe  $n b \sqrt{\frac{n}{g}} \times \log. \left( \frac{m a}{n b} \sqrt{\frac{g}{n}} \right)$  quæ quantitas, ut supra §. 15. præmonui, est infinita, quamvis tantum logarithmicè, cujusmodi infinitum minus est, quam radix cujuscunque dimensionis data ex eodem infinito; est scilicet  $\log. \infty$  minor quam  $\infty^{\frac{1}{n}}$ , quantuscunque fuerit numerus  $n$  assignabilis. Atque hoc ideo moneo, ut sic intelligatur, qui fiat, ut, si à vero infinito ratiocinamur ad quantitates valde magnas, quantitas ista aquæ sat parva evadat. Cæterum corollaria formulæ hæc sunt.

(I) Si tubus annexus est cylindricus, fit  $z = \frac{n b}{m} \log. \frac{m a}{n b}$  :

Igitur cæteris paribus hæc quantitas se habet, ut longitudo tubi annexi, quod generaliter etiam verum est: nam à mutato valore ipsius  $b$  censenda est non mutari quantitas  $\log. \frac{m a}{n b} \sqrt{\frac{g}{n}}$  ob valorem infinitum numeri  $\frac{m}{n}$ .

(II) Pro eodem orificio  $g$  cæterisque etiam paribus, sequitur quantitas zesquiplatam rationem orificii extremi: atque si idem tubus modo orificio strictiori modo ampliori vasi applicetur, erit quantitas aquæ in casu priori ad similem quantitatem in posteriori, ut quadratum orificii amplioris, ad quadratum orificii minoris.

(III) Denique observandum est valere totum ratiocinium pro omnibus directionibus tubi, quod quivis perspiciet qui §. 22. *sect.* 3. recte examinabit. Poterit igitur tubus adhiberi etiam horizontalis aut sub quâcunque alia directione & utcunque incurvus, ad quod præsertim in instituendis experimentis animus erit advertendus. Semper autem intelligetur per  $b$  longitudo tubi, per  $a$  vero altitudo aquæ verticalis supra orificium extremum.

§. 18. Venio nunc ad tempus, quo istæ mutationes à quiete ad ma-

ximam velocitatem fiunt : Dico autem posse in calculo hujusmodi temporum simpliciter poni  $v = \frac{n n}{m m} a$ ; Reliquæ enim quantitates in æquatione ultima §. 16. evanescunt, quantumlibet parva sumatur altitudo  $z$ , modo habeat rationem vel minimam assignabilem ad altitudinem illam infinite parvam, quæ respondet maximæ velocitati, nempe ad  $\frac{n b}{m} \sqrt{\frac{n}{g}} \times \log. \left( \frac{m a}{n b} \sqrt{\frac{g}{n}} \right)$ . Sequitur exinde esse prædictum tempus, quod vocabo

$$t = \frac{b \sqrt{n}}{\sqrt{g a}} \times \log. \left( \frac{m a}{n b} \sqrt{\frac{g}{n}} \right)$$

& pròinde infinitum, quamvis idem tempus admodum exiguum sit, quum amplitudo vasis non est infinita, sed utcunque magna, quod rursus ex natura infiniti logarithmicalis est deducendum.

§. 19. Quia altitudo velocitatis, ut vidimus in proximo paragrapho, potest statim censerì  $= \frac{n n}{m m} a$ , id est, æqualis maximæ, cum superficies per minimam partem assignabilem descensus infinite parvi, post quem velocitas [maxima plena adest, descendit, sequitur mutationes plerasque à quiete usque ad statum maximæ velocitatis esse insensibiles, id est, infinite parvas, imo non solum plerasque, sed & omnes præter particulam infinite parvam : res scilicet sic se habet : velocitas à primo initio plane nulla est, & postquam aqua per spatium infinite parvum descendit, jam est tantum non maxima; deinde per aliud spatium rursus quidem infinite parvum priori tamen infinite majus, descendit, pergit velocitate sua moveri, incrementa sumens infinite parva, & tunc demum vere maximam velocitatem attingit : Cum vero posteriores illæ mutationes ceu infinite parvæ non possint sensibus percipi, aliter pertractabimus ea quæ à §. 17. dedimus theoremata, considerando loco mutationum à quiete usque ad punctum maximæ velocitatis, easdem mutationes usque ad datum gradum velocitatis.

§. 20. Indagabimus itaque, per quantum spatium  $z$  superficies aquæ à statu quietis descendere, quantaque aqua effluere, ac denique quantum tempus præterire debeat, ut aqua interna velocitate moveatur, quæ generetur lapsu libero per datam altitudinem, quam vocabimus  $\frac{n n}{m m} e$ , ita ut ipsa  $e$  denotet similem altitudinem pro velocitate aquæ effluentis. Ad hoc requi-

quiritur, ut in æquatione ultimâ paragraphi decimi sexti ponatur  $\frac{n n e}{m m}$  pro  $v$ , sic autem erit

$$\frac{n n e}{m m} = \frac{n n (a - z)}{m m} - \frac{n n a}{m m} : c \frac{m z}{n b} \sqrt{\frac{g}{n}}$$

hincque deducitur  $\frac{m z}{n b} \sqrt{\frac{g}{n}} = \log. \frac{a}{a - e - z}$ ; hic vero cum  $e$  ponatur deficere notabiliter ab  $a$  potest rejici littera  $z$  signo logarithmicali involuta, unde obtinetur

$$z = \frac{n b}{m} \sqrt{\frac{n}{g}} \times \log. \frac{a}{a - e}$$

Hæc vero æquatio jam indicat spatium, quod est infinite parvum, & per quod descendit superficies aquæ, dum à quiete velocitas aquæ effluentis tanta fit, quæ debeat altitudini  $e$ ; seque habet hoc spatium ad illud paragrapho decimo septimo indicatum, quo nempe velocitas maxima oritur, ut  $\log. \frac{a}{a - e}$  ad  $\log. \left( \frac{m a}{n b} \sqrt{\frac{g}{n}} \right)$  ita ut primum fit infinities minus altero, etfi pariter infinite parvo.

Si porro definita quantitas  $z$  multiplicetur per  $m$ , obtinetur quantitas aquæ effluentis dum illa velocitas altitudini  $e$  debita producitur, quæ proin quantitas est æqualis

$$n b \sqrt{\frac{n}{g}} \times \log. \frac{a}{a - e}$$

atque sic finitæ magnitudinis, & quidem eo majoris, quo longior fumitur tubus, & quo major jactus expectatur.

Denique tempus, quo idem fit, si recte seligantur termini rejiciendi, reperitur æquale

$$2 \sqrt{\left( \frac{n b b}{a g} \log. \frac{a}{a - e} \right)}$$

atque sic finitum sed admodum parvum & in nullo exemplo ultra minutum secundum facile extendendum.

§. 21. Hæc omnia accurate examinare ac prosequi volui, tum quod multorum phænomenorum, quæ in effluxu aquarum observari solent, solutio inde pendeat, tum etiam ut illas mutationes, quæ sensibus plane sunt imperceptibiles, animo recte assequeremur. Multi fuerunt, qui transitus ab infini-

to ad finitum aut vicissim à finito ad infinitum in aquis fluentibus non recte affecti à plurimis difficultatibus se extricare non potuerunt, quæ aliàs facile admittunt solutionem, si autem loco vasis fere infiniti, cujusmodi nulla sunt, sumatur vas valde amplum, aut etiam quod in multis casibus sufficit, mediocriter amplum, erunt formulæ proxime veræ, & modo magis modo minus ad verum accedent pro indole quæstionis: de his quædam monebo in sequentibus experimentis. Interim sic satis jam apparet ex theoria, quod potissimum explicare constitueram, cur aqua ex vase amplissimo simplici omni statim velocitate effluat, & cur secus sit de aquis ex vase per tubum ejectis: Mensuræ vero præcisæ de his quæstionibus ex æquationibus ipsis erunt deducendæ.

§. 22. Tandem quod pertinet ad tempus depletionis, patet cum amplitudo vasis vel mediocriter superat amplitudinem tubi annexi, posse sine sensibili errore cenferi illud  $= \frac{m a}{n} \theta$  intelligendo per  $\theta$  tempus, quo corpus à quiete libere cadendo absolvit altitudinem, quam aqua ab initio fluxus habuit supra orificium tubi extremum, atque sumendo pro  $\frac{m a}{n}$  rationem quæ est inter amplitudinem vasis & sectionem venæ, sive contractam sive dilatatam. Impedimenta vero, quæ in his casibus fortuito superveniunt, tempus istud admodum augment. Si vero tempus desideretur, quo superficies aquæ per datam descendat altitudinem erit illud sumendum  $= \frac{m a}{n} (\theta - T)$  sumto pro  $T$  tempore quod corpus infumit libere cadendo per altitudinem, quam aqua in fine fluxus supra foramen habet.

### *Experimenta quæ ad Sect. IV. pertinent.*

**Q**Uum magna pars hujus sectionis posita sit in contractione venæ aqueæ per foramen in lamina tenui factum fluentis, animo concepì de ista contractione experimenta instituere accurata, non quidem mensuras accipiendi diametrorum, quam methodum non sufficienti accuratatione fieri posse expertus sum, sed observando velocitates *actuales* ex amplitudine jactus, & quantitates datis temporibus effluentes; In experimentis automato usus sum, quod tempore unius minuti primi 144. vicibus pulsabat, atque sic sequentia sumsi.

*Ad*

# *Ad Theoriam Contractionis Venarum aquearum* Experimentum 1.

Tubum cylindricum adhibui, cujus diameter erat 4. poll. 3. lin. mens. Angl. è lamina tenui factum quique foramen habebat in latere, id est, in superficie cylindrica: erat diameter foraminis  $= 4 \frac{52}{125}$  lin. aquæ effluebant horizontaliter ex cylindro verticaliter posito, & fuit ab initio fluxus altitudo aquæ supra centrum foraminis  $= 4$ . poll. 8. lin. similisque altitudo in fine fluxus  $= 3$ . poll. duravit autem omnis fluxus intervallo undecim automati pulsuum, quæ proxime efficiunt tempus 4. minutorum secundorum cum dimidio.

Porro repetito sæpius experimento observatisque tum altitudine foraminis supra tabulam horizontaliter positam, tum amplitudine jactus, hacque tam in principio quam in fine fluxus, vidi ex *Lemm. in principio Experimentorum præcedentis Sect. indicato* velocitatem aquæ effluentis in loco venæ maxime contractæ constanter talem fuisse, quantum quidem sensibus dijudicari potuit, quæ deberetur altitudini aquæ supra eundem locum, qui in eadem altitudine est quâ foramen.

Igitur si contractionem venæ aquæ ubique eandem fuisse ponamus & huic casui applicemus æquationem ultimam paragraphi decimi tertii, nempe  $t = \frac{2m}{n} (\sqrt{a} - \sqrt{c})$  erit ponendum  $t = 4\frac{1}{2}$  min. sec.  $\frac{m}{n} = 133$ ;  $2\sqrt{a}$  (=temperi quod corpus insumit libere cadendo per altitudinem aquæ initialem)  $= 0,1483$  &  $2\sqrt{c}$  (=temperi simili pro altitudine aquæ ultima)  $= 0,1246$ : fit  $4\frac{1}{2} = 3,15\alpha$ ; unde  $\alpha = 1,43$ . Exinde consequens est, amplitudinem foraminis fuisse ad sectionem venæ contractæ ut 143. ad 100; hæc ratio tantillo major est quam quæ intercedit inter  $\sqrt{2}$  & 1 nempe inter 141 & 100; sed si accuratissime velocitates observari potuissent, dubium non est, quin illæ paullo minores futuræ fuissent, quam quæ toti altitudini aquæ debeantur; & cum hujus rei ratio habetur, deprehenditur valorem ipsius  $\alpha$  sic pauxillum diminuendum esse; potest igitur ex toto experimento colligi tutissime rationem præmemoratam fuisse ut  $\sqrt{2}$  ad 1.

Expe-

## Experimentum 2.

Deinde experimento explorare volui, an in omnibus jactibus sub quacunque directione contractio eadem sit, & hunc in finem existimavi rem sic esse aggrediendam, ut præter directionis istius mutationem circumstantiæ cæteræ omnes essent prorsus similes. Id vero sic obtinui.

Eodem scilicet, quo antea cylindro usus sum, eum autem arcæ prismaticæ verticaliter positæ implantavi, ita, ut axis cylindri esset horizontalis, sicque implantatum circumverti, ut centrum foraminis, aquarum effluxui destinati, modo locum summum, modo medium, modo imum occuparet: in primo casu aquæ verticaliter sursum effluebant, in secundo horizontaliter, in tertio verticaliter deorsum ejiciebantur; in singulis vero feci ut altitudines aquæ in arca supra centrum foraminis essent perfecte æquales: successus hic fuit.

Observavi æqualibus temporibus superficiem aquæ in singulis casibus per spatia æqualia in arca descendere. Igitur in venis sursum projectis aqua superior non resistit sensibilibiter aquæ inferiori subsequenti, quod idem alio intellexi modo, quod scilicet, si ad parvam à foramine distantiam veluti 3. linearum nummo aliquo venam aqueam cujuscunque directionis excipiebam, ita ut vena in nummum perpendiculariter incideret, effluxus aquarum non fuerit retardatus. Porro nec aqua in venis verticaliter descendentes anterior posteriorem post se trahit; ipsaque venæ contractio similis ubique est, non considerata retardatione accelerationeque aquarum sursum vel deorsum ejectarum, quæ faciunt ut vena in aliqua à foramine distantia vel intumescat, vel gracilescat. Hic enim sermo est de illa modo contractione, quæ oritur à motu particularum obliquo in regione foraminis.

## Experimentum 3.

Eadem machina prædicto modo præparata usus sum ad explorandum, num contractio venæ cæteris paribus mutaretur ab aucta altitudine aquæ supra foramen. Hunc in finem duas acus infixi lateribus internis arcæ ad perpendicularum sibi respondentes, prior eminebat supra centrum foraminis 13 *poll.* cum 10. *lineis*, altera 12. *poll.* \* 1  $\frac{3}{4}$  *lin. mens. Angl.* amplitudo arcæ erat ad amplitudinem foraminis ut 404. ad 12. vidi autem superficiem aquæ à superiore  
acu

acu ad inferiorem descendisse post intervalla 24. automati pulsum, quæ faciunt tempus 10. minutorum secundorum.

Quod si vero tempus idem quærat ad Hypothesin, venam se nihil contraxisse, simulque aquas omni velocitate, quam vi theoriæ nullo præsentis impedimento alieno habere debuissent, effluxisse, reperitur illud  $\equiv 6\frac{7}{8}$  min., sec.

Sic igitur concludi potest, fuisse amplitudinem foraminis ad sectionem venæ contractæ ut 10. ad  $6\frac{7}{8}$ , id est,  $\alpha \equiv 1,45$ , cum in primo experimento fuerit pro eodem foramine perpenſis omnibus circumſtantiis  $\alpha \equiv 1,41$ .

Postquam hæc ita expertus fuiſſem, reſiduum erat explorare, an aquæ omni velocitate ad ſenſus effluerint, qua de re eo magis dubitavi, quod creſcentibus velocitatibus aquæ, creſcant ſimul impedimenta, hæcque proin notabilia eſſe poſſint in majoribus aquæ altitudinibus, qualia in minoribus non ſunt.

Feci itaque omni adhibita cura (quod potiſſimum ad præciſionem experimenti requiritur) ut aquæ ſub directione perfecte horizontali effluerent, & acceptis menſuris tum amplitudinis jactus, tum altitudinis foraminis ſupra tabulam horizontalem, vidi ſubducto calculo, quod cum altitudo aquæ erat  $\equiv 13$ . poll. cum 10. lin. ſeu 166. lin. aquæ effluerint, ſeu potius per ſectionem venæ contractam tranſfluxerint, velocitate, quæ convenit altitudini  $158\frac{1}{2}$  lin. igitur velocitas in calculo diminuenda eſt in ratione ſubduplicata harum altitudinum atque in eadem ratione proxime decreſcit valor inventus litteræ  $\alpha$ , qui ita fit paullo minor quam 1,42 ſeu rurfus 1,41 & ſic colligere licet, ſolam altitudinem aquæ mutatam ad ſenſus non mutare contractionem venæ.

### Experimentum 4.

Tubum habui cylindricum altitudinis 4 poll. cujus ſectio per axem reſentatur per (Fig. 28. b.) CABD, amplitudo cylindri erat ad amplitudinem foraminis  $\alpha c$  ut 110 ad 1. Cylindrus iſte aqua plenus omnis evacuatus fuit tem-  
pore 21. minutorum ſecundorum cum dimidio. Notari autem debet, non prius aquis effluxum concedendum eſſe, quam nullus in illis motus turbine-  
torius obſervetur; ſecus enim aqua mox in turbinem vertitur, durante effluxu

Fig. 22.  
b

L

fat

fat celerem, effluxusque valde retardatur, eoque magis, quo celerius aqua interna in Gyrum agitur: quia porro nunquam omnis aqua effluit, effluxus tempus consideravi, usquedum stillatim effluere inciperet.

Indicat hoc experimentum minorem hic aquæ fuisse contractionem quam pro ratione  $\sqrt{2}$  ad 1; Expectaveram tempus evacuationis fore admodum 23. *min. sec.* sed eventus paullo alius fuit ut dixi, cujus rei rationem esse postmodum animadverti, quod labia foraminis elongata tubulum fere quamvis brevissimum formarent, ut Figura ostendit, qui venæ aqueæ contractionem impediēbat: interim latitudo istorum labiorum duas tertias lineæ non attingebat.

### Experimentum 5.

Feci ut aquæ ex vase amplissimo per tubulum effluerent horizontaliter: erat autem tubus brevissimus, longitudinem nempe 3. *lin.* non excedens, habebatque in diametro fere 5. *lin.*

Effluxit data aquæ quantitas tempore 11  $\frac{1}{4}$  *min. sec.* quæ effluere debuisset tempore 10  $\frac{2}{3}$  *min. sec.* si neque contractam fuisse venam, neque ulla adfuisse impedimenta statuatur.

Velocitates reales aquæ non censui opus esse ut experirer, nullus dubitans tales fuisse, quales esse debeant, ut observato tempore per observatum orificium data quantitas aquæ, nulla facta ad contractionem venæ attentione, efflueret.

Alios insuper alius diametri longitudinisque adhibui tubulos & vidi quantitates aquæ dato tempore datisque velocitatibus effluentis recte respondere orificiis effluxus: velocitates autem eo magis defecisse à velocitate integræ altitudini aquæ debita, quo strictior & quo longior erat tubus, ut & quo altior erat aqua.

### *Ad Theoriam aquarum per tubos effluentium.*

### Experimentum 6.

Vasa, quorum sectiones per axem representant Fig. 24. & 25. cylindrica, altitudinem habebant 4. *poll. Angl.* tubosque annexos longitudinis unius pedis, amplitudines cylindrorum erant ad amplitudines orificiorum A, ut 110  
ad

ad 1; Orificium autem B erat ad orificium A proxime ut 25 ad 16; tempus evacuationis repletis antea cylindris fuit in Fig. 24, *sex min. sec.* cum dimidio, in altera præterpropter 4 hujusmodi minutorum cum triente.

In his casibus vasa satis ampla fuere ratione tuborum annexorum, ut veluti infinita censerī possent; debuissetque proin per Regulas passim à nobis indicatas aqua effluere per orificia extrema velocitatibus respondentibus toti altitudini aquæ, si modo excipias prima fluxus momenta, quæ ipsa tam brevia hic sunt, ut observari non possint. Et cum præterea, ut passim monui, quantitas aquæ dato tempore per tubos effluentis simpliciter æstimanda sit ex celeritatibus & magnitudine orificiorum inveni per regulam §. 22. exhibitam, tempus evacuationis in primo casu  $4\frac{1}{2}$  minsec. in posteriori — fere 3. *m. sec.*

Quod in experimento majora paullo fuerint observata in Fig. 24. maximam partem adhæfioni aquæ ad latera tubi, in Fig. autem 25. alii in super rationi in paragrapho 34. *sect.* 3. indicatæ est tribuendum.

Phænomena alia in his vasis sunt notanda: nempe cum vasa sunt tantum non evacuata, percipitur sonus quidem ab aëre, qui tunc aquæ in orificio superiori se miscet. hunc vero sonum pro ultimo fluxus momento accipi: facile fit porro, ut aquæ effluxus concedatur priusquam ad perfectam quietem fuerit reducta (nam ab impletionē agitantur & in turbinem moventur aquæ); tunc autem effluxus admodum retardatur & cataractæ species interne formatur, continueque aër aquæ effluenti se permiscet. Ita potest pro lubitu retardari effluxus, si in vorticem aquæ agantur antequam effluant.

## Experimentum 7.

Vase usus sum Prismatico, cui tubulus infixus erat horizontaliter ut in Fig. 19. Habebat orificium G F in Diametro præcise quinque lineas; alterum N M  $6\frac{1}{2}$  lin. Erant proin ipsæ amplitudines orificiorum G F & N M ut 100. ad 169. amplitudo vero vasis continebat amplitudinem orificii N M ducentis & una vicibus. Longitudo tubuli G N erat 4. *poll.*

Denide vas aquâ implevi usque in C D, cujus altitudo supra axem tubi, erat 13. *poll.* 10. *lin.* Aperto orificio N M effluerunt aquæ descenditque  
L 2 super.

superficies usque in EH tempore  $8\frac{1}{2}$  min. sec. erat vero altitudinum differentia CE vel DH duorum pollicum cum octo lineis.

Subducto calculo ad normam paragraphi 22. ubi neque ad impedimenta, neque ad mutationem venæ attenditur, videmus prædictum tempus descensus esse debuisse proxime  $\equiv 5$  min. sec. cum fere dimidio. Igitur statuum est hoc modo, velocitatem mediam totalem se habuisse ad velocitatem integram, quam theoria indicat, ut  $5\frac{1}{2}$  ad  $8\frac{1}{2}$  seu proxime ut 2 ad 3; hincque concludi potest, aquam per orificium MN effluxisse velocitate, quæ conveniat  $(\frac{2}{3})^2$ , seu quatuor nonis partibus altitudinis aquæ supra foramen MN, per alterum vero orificium GF transfluxisse velocitate quinque præter propter quartis ejusdem altitudinis partibus debita.

Apparet itaque rursus effluxum aquarum promoveri ab auctâ amplitudine orificii tubi versus exteriora, quamvis nec orificium quo tubus in vas est implantatus, nec situs tubi sit mutatus.

Porro in tabula horizontaliter posita PQ observavi amplitudinem jactus PQ pro altitudine o P, quæ erat 4. poll. 8. lin. Inveni autem PQ  $\equiv$  9. poll. 6. lin.

Sequitur ex ista observatione, quod si dilatationis venæ consideratione feposita aquæ in NM velocitatem debuerint habere, qualis debetur altitudini 4. poll. 10. lin. cum tamen vi præmissi experimenti certe habuerit velocitatem debitam altitudini fere 6. poll. 2. lin. Confirmat hæc observatio id quod §. 15. dixi, nempe in tubis divergentibus venam aqueam dilatari veluti in m, ipsiusque motum retardari. In præfenti vero casu, ut ambæ observationes concilientur, dicendum erit venam ita dilatam fuisse, ut amplitudinem haberet ratione orificii NM reciproce ut prædictæ velocitates seu reciproce ut radices altitudinum istis velocitatibus deuitarum, nempe ut  $\sqrt{74}$ . ad  $\sqrt{58}$ . proindeque diametros venæ dilatatæ & orificii fuisse ut  $\sqrt[4]{74}$  ad  $\sqrt[4]{58}$ . seu ut 100 ad 941.

## Experimentum 8.

Aliud feci experimentum quod, quamvis huc nondum pertineat, nihilominus recensebo: nempe in ortu prope orificium GF tubum perforavi foramine e duarum fere linearum, rursusque descensum superficiei ex CD in EH

EH observavi effluente aqua per NM, simulque amplitudinem jactus examinaui.

Duo hæc vidi, quæ prima fronte sibi contradicere fere videntur; descensus ex CD in EH tardior factus est quam in præcedenti experimento fuerat, & nunc duravit 10. min. sec. & tamen amplior fuit jactus PQ pro eadem altitudine o P; jam enim erat  $PQ = 10. \text{ poll. } 10. \text{ lin.}$

Ambo Phænomena ita explico: ob foramen e, quod fuit factum prope GF quodque aëri liberum transitum concedit, solvitur nexus, quem alias inter se habent aquæ in tubo, nec proin aliter transfluunt aquæ ubi est foraminulum e, quam si eo ipso in loco esset rescissus tubus; fluere autem tardius, quod passim demonstravi, si tubus GNM F ceu divergens brevior fieret. Quod porro aquæ quamvis minori quantitate, tamen majori impetu per orificium NM non mutatum fluere possint sine implicita contradictione, ratio est permixtio aëris cum aqua; nam aër perpetuo irrumpit in tubum per foraminulum e & una cum aqua effluit per NM. Denique phænomenon illud, quod aquæ actu celerius fluant per MN aperto, quam clauso foramine e, aliter explicari non posse mihi videtur, quam quod impedimenta extrinseca minus agant in aquam aëre rarefactam quam naturalem.

*Ad theoriam aquarum, quæ ex vasis amplissimis à puncto quietis usque ad datum velocitatis gradum effluunt.*

### Experimentum 9.

Quum aquæ per foramen in lamina tenui factum ex vase amplissimo effluunt, prima statim guttula omni velocitate, quæ altitudini aquæ supra foramen debetur, erumpit.

Conforme hoc est cum theoria §. 11. indicata, si vas sit revera infinitum, & quamvis etiam non fuerit sensu Geometrico infinitum, dummodo sit valde amplum, nulla pariter guttula ab initio fluxus observari potest, quæ non maxima velocitate effluerit: Phænomenon hoc explicui §. 14. cum nempe vi theoriæ in casu particulari aliquo ibidem recensito vix una aut duæ guttulæ sensibilibiter à jactu maximo deficere debuissent,

sent, dixi non posse tantillam aquæ quantitatem se ab aqua subsequente separare ob mutuam aquearum particularum attractionem seu adhæSIONem.

## Experimentum 10.

Quum vero aquæ ex vase amplissimo per tubum vasi horizontaliter insertum effluebant, observavi priusquam vena effluens jactum formaret, maximum  $omQ$  (vid. Fig. 19,) sat notabilem aquæ quantitatem in tabulam horizontalem subjectam delabi mediam inter  $P$ . &  $Q$ . eo majorem esse hanc quantitatem quo longior est tubus  $GN$  & quo magis versus  $N$  divergit, ac denique inæqualiter aquam illam distribui, multo copiosius scilicet decidere in locum, qui est remotior à puncto  $P$ , quam qui eidem est propior; Ratione autem temporis, quo omnes istæ mutationes fiunt, vidi illud brevissimum esse, & tale ut ejus mensura percipi non posset.

Omnia ista phænomena ex asse satisfaciunt propositionibus, quas dedimus à paragrapho undecimo usque ad finem sectionis. Mensuræ autem ibidem exhibitæ experimentis recte confirmari non possunt, præsertim illæ, quæ §. 15. 16. & 17. indicatæ sunt, ubi scilicet formulæ communicantur, quæ exprimant quantitatem aquæ effluentis, dum à quiete maximus fit jactus: ratio est primò, quod primæ guttulæ quæ prope punctum  $P$  in tabulam decidere deberent ab aqua subsequente non libere se separant; secundo, quod aquæ quantitas venæ  $OQ$  proxima (quæ quidem maximam vi ipsius theoriæ partem constituit) intercipi non queat, & denique, quod motus aquarum per tubos admodum tetardari solet, ab impedimentis extrinsecis, imprimis si tubi divergant, atque sic motus realis sit admodum diversus à motu quem aquæ habituræ essent, remotis omnibus impedimentis. Reliquæ mensuræ à nobis indicatæ paucioribus iisque minoris momenti difficultatibus sunt subjectæ; continentur autem §. 20. & exprimunt potissimum aquæ quantitatem, quæ à primo motus puncto effluit, dum aqua datum velocitatis gradum attingit.

Quamvis ob rationes modo dictas, præsertim in casu tuborum divergentium perfectus consensus theoriæ cum experimentis minime expectari possit, talem tamen expertus fui successum, ut facile intellexerim integrum futurum fuisse consensum si impedimenta omnia una cum aquearum particula-

cularum mutua adhæsione præveniri potuissent. Experimenta autem summi-  
tum de tubo divergente, tum de cylindrico: singula nunc exponam:

## Experimentum I I.

In Figuræ 19. tubus formâ conî truncati horizontaliter vasi erat in fer-  
tus, vas ipsum aqua implevi usque in CD, ita, ut altitudo ejus supra axem  
tubi esset æqualis 433. particulis æqualibus, quibus in toto experimento  
usus sum. Pro illa altitudine experimento inquisivi in punctum Q maximo  
jactui respondens, & fuit PQ = 287. part. dum altitudo o P erat = 146.  
part. Sic vidi motum aquæ tum propter aquæ adhæsionem, tum propter Fi-  
guram tubi fuisse valde retardatum, quod in his casibus fieri debere aliquo-  
ties monui. Debuisset autem, si nihil obstitisset motui, esse PQ = 503. part.

Deinde Patinam posui in tabulam horizontalem, cujus ora erant in S  
& R: Patinam autem prius madefeci, omnemque aquam ex illa depluere rur-  
sus fivi: sumtaque mensura PR, illam inveni 206 part.

Denique diameter GF erat = 13. part & MN = 17 part. longitudo  
tubi autem erat = 125 part.

His omnibus ita præparatis, dum orificium MN dignito obturarem,  
remoto confestim digito aquæ ejiciebantur, earumque pars aliqua in patinam  
decidebat: hanc sollicitè in tubum vitreum collegi cylindricum, cujus diame-  
ter erat = 8½ part. tubus iste impletus fuit ad altitudinem 210 part. fuit igitur  
quantitas aquæ in patinam delapsæ = 11922 particulis cubicis.

Jam vero deberet ista quantitas per §. 20. esse =  $n b \sqrt{\frac{n}{g}} \times \log. \frac{a}{a-e}$ ,  
ubi per  $n$  intelligitur amplitudo orificii NM seu 227. part. quadratæ per  $g$  am-  
plitudo orificii GF = 133. part. quadr. denotat porro  $b$  longitudinem tubi,  
quæ fuit = 125 part. per  $a$  proprie intelligitur altitudo superficiei CD, supra  
axem tubi, hic vero intelligenda potius est altitudo conveniens velocitati  
aquæ in punctum Q incidentis, seu 141. part. similiterque pro  $e$  sumenda est  
altitudo conveniens velocitati particulæ in punctum R incidentis, nempe 73 part.  
Denique vox abbreviata  $\log.$  significat logarithmum Hyperbolicum. Factis  
istis substitutionibus numericis, fit

$$n b \sqrt{\frac{n}{g}} \times \log. \frac{a}{a-e} = 227 \times 125 \times \frac{17}{13} \times \log. \frac{141}{68} = 26830.$$

Fuit