qui si vocetur X, ejusque cosinus x, sit $o,60000\,X + o,80000\,(1+x) = o\,r = 1,83800$: pro ista conditione invenitur arcus $agbMs$ proxime $175\frac{1}{2}$ *grad.* incidente puncto s in plagam agM: Et cum arcus ag fuerit $48°, 35'$, erit tandem arcus $gbMs$ $126°, 55'$, qui proinde erit ad circumferentiam circuli præterpropter ut 10 ad 29: similisque ratio intercedit inter arcum helicis opq integramque helicem.

Consequens inde est, singulis revolutionibus cochlea à Vitruvio descripta proxime ejici $\frac{10}{29}$ illius quantitatis, quam helix integra & plena continet, seu paullulum ultra trientem.

Scholium 3.

(IX) Notandum tamen est, quæcunque sit aquæ quantitas, quæ qualibet cochleæ revolutione canalem inferius ingreditur, superiusque ex eodem effluit, nullum nec detrimentum nec lucrum propterea cadere in *potentiam absolutam* si nulla habeatur frictionum ratio, quia *potentia movens* cæteris paribus illi quantitati proportionalis est. At vero quia frictiones semper obstant, eædemque fere sunt ob pondus machinæ proprium, sive major sive minor quantitas aquæ hauriatur, opera utique danda est, ut ista quantitas cæteris paribus fiat maxima: Hâc de re nunc agam paullo disertius.

Scholium 4.

(X) Jam innui suprà, crescere rationem arcus $gbMs$ ad circumferentiam circuli decrescentibus angulis sao & NMG: uterque igitur minimus esset construendus, nisi alia obstarent incommoda, præsertim ratione anguli NMG. Quod ad angulum sao attinet, potest is fere ad lubitum diminui, neque aliud inde incommodum resultat, nisi quod latera canalis circumflectendi nimis ad se invicem accedere possunt: E contrario à diminutione istius anguli aliud obtinetur compendium, nempe quod tunc eo verticalius possit erigi machina ipsaque aqua eo altius elevari, etenim angulus aMH semper major esse debet angulo sao: à verticaliori autem cochleæ positione simul obtinetur, ut minori incommodo sit machinæ proprium pondus eaque facilius sustineatur.

Hæc ita perpendens crediderim fere sufficere posse angulum 5 *graduum*, quem faciat canalis cum base nuclei. Cardanus quoque minorem istum fecit angu-

angulum quam Vitruvius, & cum eo pauciores ſuper eodem nucleo circumflecti poſſint canales, quo obliquius ſunt inſerti, Vitruvius octo, Cardanus tres tantum ponendos ſtatuit: ſunt autem canales longiores in cochlea Cardani, ita ut longitudinibus accedat, quod numero canalium decedit. Ratione alterius anguli N M G obſervari meretur, aquam altius elevari poſſe, quo major iſte fiat angulus, ſed e contrario minorem aquæ quantitatem ſingulis ejici revolutionibus. Juſtum fortaſſe tenebunt medium, qui angulum iſtum 60. facient gradum.

(XI.) Subducemus nunc hujus noſtræ quoque ad normam præcedentis articuli conſtructæ cochleæ calculum, prouti fecimus de cochlea ad Vitruvii præceptum conſtructa, art. VIII. Quia vero per hypotheſin angulus *s a o* eſt 5° & angulus N M G $=$ 60°; reperietur per *art.* IV. arcus *a g* 8°, 43', & linea verticalis *o r* $=$ 1, 00574, cui æqualis erit altera verticalis *q x*, ſi dentur arcui *a g h* M *s* 284°, 57', a quo ſi ſubtrahatur arcus *a g*, remanet arcus *g h* M *s* 276°, 14': qui reſpondet arcui helicis aquam retinere valenti: eſt igitur hæc pars ad totam helicem ut 16574 ad 21600 vel ut 8287 ad 10800, ſic ut ſingulis revolutioniqus ejici poſſint plus quam quatuor quintæ partes integræ helicis capacitatis, duplumque cum triente præterpropter hac machina efficiatur, quam obtinetur ſimili machinatione ad mentem Vitruvii fabricata: altius quoque eodem nucleo elevantur aquæ in ratione ut $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{2}$. Venio jam ad *potentiam* tum *moventem* tum *abſolutam*, quæ in elevandis aquis impenditur.

Problema.

(XII.) Dato pondere aquæ in helice quieſcentis, invenire potentiam tangentialem in *f* in æquilibrio cum illo pondere poſitam.

Solutio.

Vidimus quomodo problema hoc geometrice ſolvendum ſit ratione globi in puncto infimo *p* quieſcentis. In præſenti vero caſu paullo aliter ſe res habet, quod pondus aquæ per magnum helicis arcum eſt diſtributum, neque in puncto aliquo dato concentratum. Facile quidem eſt in anteceſſum prævidere, in utroque caſu easdem fore potentias ex regulis mechani-

cæ

cæ indirectis; placet tamen hujus rei demonſtrationem dare ex natura vectis petitam, quia mechanici eo omnia reducere amant.

Helicem conſiderabimus *a* 1 *b* ex figura quinquageſima ſecunda ſeorſim deſumtam, ad evitandam linearum confuſionem, conſervatis denominationibus *art.* IV. adhibitis. Sic igitur in Figura 53. erit rurſus angulus N M G angulus quem facit nucleus cum horizonte, cujus ſinus = N, ſinusque anguli *a* M H = *n*; *a* 1 *b* eſt una ſpiralis circumvolutio: baſis nuclei eſt circulus *a c* M *p a*; ſinus anguli *p a l* eſt ut ante = *m*, ejusque coſinus M; puncta vero *l* & *o* ſunt extremitates aquæ in ſpirali quieſcentis & in eadem altitudine ab horizonte poſita, ex iſtis punctis ductæ ſunt ad peripheriam baſis rectæ *l c* & *o p* ad baſin perpendiculares. In parte helicis quam aqua occupat ſumta ſunt duo puncta infinite propinqua *m* & *n* & per hæc ductæ ſunt rectæ *n f* & *m g* rurſus ad baſin perpendiculares. Denique ex punctis *c*, *f*, *g*, *p* ductæ ſunt ad diametrum *a* M perpendiculares *c d*, *f h*, *g i* & *p q*; atque centrum baſis ponitur in *e*, radiusque *e a* = 1. Sit jam arcus ſpiralis *l* 1 *o* aqua plenus = *c* & conſequenter arcus circularis eidem reſpondens *c* M *p* = M *c*; *a l* = *e*; *a c* = M *e*; *a d* (ſeu ſinus verſus arcus *a c*) = *f*; *a q* = *g*; pondus aquæ in *l s o* = *p*: arcus *a l n* = *x*; *n m* = *dx*; *a c f* = M *x*; *f g* = M *dx*; *a b* = *y*; *b i* = *dy*; *b f* = $\sqrt{2y-yy}$, erit pondus guttulæ in *n m* = $\frac{p\,dx}{c}$; ſi vero linea *b f* multiplicetur per ſinum anguli *a* M H, dividaturque per ſinum totum, habetur vectis quo particula *n m* cochleam circumagere tentat: eſt igitur vectis iſte = $n\sqrt{(2y-yy)}$ qui multiplicatus per præfatum guttulæ pondus $\frac{p\,dx}{c}$ dat ejusdem momentum $\frac{n\,p\,dx}{c}\sqrt{(2y-yy)}$. Sed ex natura circuli eſt M $dx = \frac{dy}{\sqrt{(2y-yy)}}$: hoc igitur valore ſubſtituto pro *dx*, fit idem guttulæ *n m* momentum = $\frac{n\,p\,dy}{Mc}$, cujus integralis, ſubtracta debita conſtante, eſt $\frac{n\,p\,(y-f)}{M\,c}$, denotatque momentum aquæ in arcu *l n*; hinc igitur momentum omnis aquæ in *l* 1 *o* eſt = $\frac{n\,p\,(g-f)}{Mc}$: quod diviſum per vectem potentiæ in *f* applicatæ ſeu per 1 relinquit potentiam iſtam quæſitam pariter = $\frac{n\,p\,(g-f)}{Mc}$. Q. E. I.

Scholium

Scholium 1.

(XIII.) Ut appareat, non differre valorem istius potentiæ ab illa, quam pro globo ejusdem ponderis p invenimus articulo V. nempe $\frac{mNp}{M}$, demonstranda est æqualitas inter $\frac{np(g-f)}{Mc}$ & $\frac{mNp}{M}$ seu inter $n(g-f)$ & mNc: ista vero æqualitas deducenda est ex eo, quod extremitates aquæ l & o in eadem ab horizonte altitudine positæ sint; inde enim sequitur, ut demonstravimus *art.* IV. esse aggregatum ex arcu ac multiplicato per $\frac{mN}{M}$ & ex linea Md multiplicata per n = aggregato ex arcu $acMp$ pariter multiplicato per $\frac{mN}{M}$ & ex linea Mq multiplicata per n. Adhibitis itaque denominationibus præcedentis articuli, fit $Me \times \frac{mN}{M} + (2-f) \times n = (Me+Mc) \times \frac{mN}{M} + (2-g) \times n$, vel $n(g-f) = mNc$; quæ æqualitas demonstranda erat ad demonstrandam æqualitatem potentiarum tum pro globo tum pro aqua in f applicandarum.

Scholium 2.

(XIV) Quia potentia $\frac{np(g-f)}{Mc}$ non differt ab $\frac{mNp}{M}$ & quantitas $\frac{mN}{M}$ eadem manet, quæcunque aquæ quantitas una revolutione hauriatur aut ejiciatur, erit potentia ista proportionalis eidem quantitati aquæ singulis revolutionibus ejectæ seu ponderi p. Facile quoque demonstratu est, si eadem aquarum quantitas, eadem *potentia movente* eademque velocitate ad parem altitudinem verticalem elevetur super simplici plano, quod ad hunc finem debite versus horizontem inclinatum sit, fore ut tempus elevationis quoque idem sit.

Igitur eadem *potentia absoluta* requiritur in cochlea Archimedis, quam super plano inclinato, ad quod omnes machinæ reduci possunt, nec ullam habet ista cochlea prærogativam præ reliquis machinis in theoria spectatis. Fortasse in praxi minus est obnoxia incommodis §. 26. indicatis: nequaquam improbo ejus usum, sed nec eam præfero præ antliis Ctesibianis.

§. 28. Intelligitur ex hactenus dictis, quibus titulis una machina alteri præferenda sit, quemnam machinæ perfectionis gradum admittant; ad quid potissimum attendendum sit in illarum constructione & usu; quanta *potentiæ absolutæ* pars perdatur, aliaque similia: Equidem machinas tantum consideravimus *potentiis* ut dicuntur *animatis* motas: facile autem apparet iisdem legibus subjectas esse machinas, quæ ab impetu aquarum, venti, aut ab aquarum gravitatione hujusmodique aliis principiis sunt movendæ; semper enim *potentia movens* ducta in tempus & velocitatem puncti cui potentia est applicata, dabit productum ex quantitate aquæ & altitudine ad quam ista quantitas assumto tempore elevari possit ope machinæ propositæ, sepositis impedimentis alienis. Loquor autem de machinis, quibus nihil de *potentia absoluta* perditur; fieri enim potest, ut maxima pars pereat, quod satis ostendimus in superioribus.

§. 29. Apparet exinde aquam ad certam altitudinem elevatam posse rursus suo descensu eundem præstare effectum: effectus autem erit æstimandus ex quantitate aquarum elevandarum & ex altitudine elevationis, sic ut v. gr. descensu 8. pedum cubicorum ex altitudine unius pedis possint totidem rursus elevari pedes cubici ad similem altitudinem aut 4. pedes cubici ad altitudinem duorum pedum, aut unus pes cubicus ad altitudinem 8. pedum & sic utcunque libuerit. Specimen machinæ, quæ possit aquam ad quamcunque altitudinem elevare minimo aquarum descensu, videre est apud D. Perrault in *Comment. ad Vitruvium lib.* 10. *cap.* 12. quam machinam ut incredibile fere paradoxon affert ejusque inventorem facit D. Franchini Italum, cujus industria & consiliis in horto Bibliothecæ Regiæ cum successu constructa fuit. Fundamentum machinæ in eo consistit, ut situlæ concatenatæ, & in circulum redeuntes aquam excipiant eamque in locum transportent infimum, ibique effundant, dum alia situlatum series aquas hauriunt & ad locum longe altiorem, minori tamen copia ferunt atque effundunt: perspicuum autem est, seriem priorem si omnes situlæ descendentes graviores sint omnibus situlis ascendentibus, alteram perpetuo in gyrum acturam esse; Machinæ etiam sunt, quæ idem præstant per simplices tubos ope epistomiorum statis temporibus convertendorum, in quam quidem conversionem nulla potentia impenditur. Hujusmodi machinationes describit Carolus Fontana.

At si quis credat posse ex impetu aquarum ex certa altitudine delapsarum & in machinæ alas impingentium idem obtineri, is longe aberrabit. Talis

lis machinatio pertineret ad illarum classem, quibus maxima *potentiæ absolutæ* pars evanescit sine fructu.

Non abs re erit istud argumentum accuratius prosequi, & ostendere quantus effectus ab impetu aquarum aut venti obtineri possit & sub quibus circumstantiis effectus iste sit omnium maximus dicendus.

(C) *De Machinis, quæ ab impetu fluidi, veluti vi venti moventur.*

§. 30. Postquam aquæ ad certam altitudinem elevatæ ex eâdem rursus decidunt, continueque in alas rotæ circumagendæ impingunt, fieri aliter non potest, quin *potentia absoluta* ad rotam sic circumagendam requisita multo minor sit illa, quæ in elevationem aquarum impensa fuit, cujus rei præcipua ratio est, quod aquæ post impulsum ad latera desilientes velocitatem etiamnum conservent, quæ ad rotæ rotationem nihil confert. Igitur magna *potentiæ absolutæ* pars inutilis fieret, si elevatione aquarum efficiendum esset, ut ab impetu earundem machina circumagatur & ab hac denique aquæ rursus aliæ ad certam altitudinem eleventur; & quidem major minorve pars perit pro diversis circumstantiis, nunquam vero, ut monstrabo, minus quam $\frac{2}{27}$ totius perdetur, si ad normam vulgaris impulsus aquarum æstimationis computus fiat.

§. 31. Statuitur autem communiter si aquæ ex cylindro valde amplo per simplex foramen tota sua velocitate, id est, quæ toti altitudini aquæ supra foramen debeatur, fluant, atque vena statim præ foramine directe impingat in planum, fore ut impetus fluidi contra planum in æquilibrio sit cum pondere cylindri aquei, super foramine ad altitudinem aquæ erecti. Experimento quidem fallaci auctores seducti hanc stabiliverunt theoriam omnino falsam. Nolui tamen hîc ab illa recedere, quia veram theoriam nondum exposui atque deinceps facile erit exposita nostra theoria calculum corrigere. Liceat igitur, donec suo loco rem rectius perpenderimus, vulgari sententiæ, quamvis erroneæ, adhærere. Quo major est impetus fluidi, eo majori ratione erit *potentia absoluta*, quam dabimus, augenda.

§. 32. Finge nunc (Fig. 54.) vas A B C ceu antliam quæ aquas per foramen C in directione tantum non verticali expellat: aquas autem, cum ad summum pervenerint, ab alio vase E D F excipi. In alterius hujus vasis fundo Fig. 54.

concipe foramen D, priori C æquale, & in eadem altitudine positum, ita ut tanta aquarum copia effluat per D, quanta superius injicitur, ipsumque vas EDF constanter plenum servetur. Porro puta aquas per D effluentes perpetuo impingere in alas alicujus rotæ, quæ hoc modo circumacta aquas alias elevet: Loco istius machinæ describitur in figura simplex vectis volubilis circa H, ponendo talem vectem continue alium atque alium adesse præ foramine D, qui aquas excipiat, atque altera sua extremitate aquas hauriat, easdemque ad datam altitudinem elevet.

His ita positis inquiram primo in *potentiam absolutam*, quæ aquas per foramen C ad altitudinem CE elevat; deinde quoque in *potentiam absolutam*, quæ requiritur in G ad vectem eadem velocitate movendum, quâ movetur ab impulsu aquarum DG.

§. 33. Sit amplitudo foraminis C vel D $= n$, amplitudo AB $= m$, velocitas aquarum in C vel D $= v$, pondus cylindri super foramine C aut D ad altitudinem CE extructi $= p$: tempus fluxus $= t$; erit pondus P $= \frac{m}{n} p$: velocitas, qua pondus dum aquæ expelluntur descendit $= \frac{n}{m} v$: est igitur (per §. 3.) *potentia absoluta* in aquas per C ejectas impensa $= \frac{m}{n} p \times \frac{n}{m} v \times t = pvt$.

§. 34. Ut jam *potentia absoluta* in gyrationem vectis GL circa punctum H impensa determinetur, notandum est illam minime sibimet constare; mutari enim à mutata velocitate, quacum vectis circumagitur. Igitur faciemus velocitatem qua extremitas ejus in G movetur $= V$. Hoc autem modo aquæ impingere censendæ sunt in G velocitate $v - V$, atque sic pressionem exercere, quæ fit $= \left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p$: (sunt enim pressiones in ratione quadrata velocitatum fluidi impingentis atque pro velocitate v ponitur pressio $= p$). Ista vero pressio est loco *potentiæ moventis*; possumus nempe loco pressionis fluidi ponere pondus vecti superincumbens in G, quod sit $= \left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p$. Istud vero pondus eadem velocitate movebitur quâ punctum G, nempe velocitate V, agitque durante tempore t: Est *igitur potentia absoluta* ad rotationem vectis durante tempore t & velocitate V requisita $= \left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p \times V \times t$.

§. 35.

§. 35. Quod si igitur vectis L G non immediate circumagitur, sed fluidum ad altitudinem C E elevatur, eo animo, ut vena fluidi suo impulsu in G vectem circumagendo ab altera parte aquam elevet, erit *potentia absoluta* integra ad *potentiam absolutam* utilem, ut $p\,v\,t$ ad $\left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p\,V\,t$, seu ut v^2 ad $(v-V)^2\,V$: eademque se habebit ad partem sui inutilem ut v^3 ad $v^3 - vv\,V + 2\,v\,V\,V - V^3$.

§. 36. In omnibus fere machinis, quarum principium motus consistit in impulsu fluidi fieri solet, ut velocitas vectis, ubi fluidi impetum sustinet, seu V sit admodum parva ratione velocitatis fluidi v; in his autem maxima pars effectus, qui ab eadem fluidi quantitate pari velocitate moti obtineri posset, perditur.

§. 37. Maximus oritur ab impulsu fluidi effectus, sive, quod idem est, maxima fit *potentia absoluta* §. 34. definita, si sit $V = \frac{1}{3}\,v$; & tunc est ista *potentia absoluta* $= \frac{4}{27}\,p\,v\,t$, atque etiamnum viginti tribus vigesimis septimis partibus deficit, à potentia simili, quæ in elevandas aquas ex C in E F impenditur.

Si proinde naturalis habeatur aquarum descensus, atque illo utendum sit ad elevandas aquas aliudve simile quid præstandum, faciendum est ut machina eo in loco, quo fit impulsus, velocitate moveatur subtripla velocitatis fluidi impingentis. Huic vero conditioni semper satisfieri potest, quod ex allato vectis exemplo patet. Si enim majori velocitate moveatur punctum G, diminue partem H G manentibus reliquis aut eam auge, si minori moveatur velocitate punctum G. Vel etiam salva longitudine H G fac, ut aquæ in extremitate L majori minorive quantitate hauriantur.

§. 38. Ista vero ratione fluidorum ad perpendiculum in alas impingentium: alius est computus pro fluidis oblique incidentibus in alas moletrinarum vi venti agitandarum aliarumque similium machinarum. De his nunc pauca quædam superaddam atque iis sectioni huic finem imponam.

Quum fluidum in superficiem totius alæ utcunque positæ & in directione ad motum fluidi perpendiculari rotaturæ impingit, docent auctores, fluidum maximum in alam exercere nisum ad promovendam rotationem, quando ala cum directione venti angulum facit, cujus sinus sit ad sinum totum ut $\sqrt{2}$

ad $\sqrt{3}$; Si vero vena fluidi eadem atque tota excipiatur ab ala, modo ſic modo aliter ad directionem fluidi inclinatâ, maximam preſſionem ſuſtinebit in directione rotationis ala, quæ facit angulum ſemirectum cum directione fluidi.

Prima Regula pertinet ad machinas quæ à vento omnia ambiente circumaguntur: altera ad illas, quæ à vena ſolitaria & à certa determinataque fluidi quantitate moventur. Utraque vero hypotheſi innititur, quod motus alarum admodum parvus ſit reſpectu motus fluidi, ſi enim ad motum alarum reſpicias, ambæ regulæ falſæ ſunt; neque profecto iſte motus negligendus eſt, in moletrinis enim ſæpe obſervavi, extremitates alarum velocitate ferri, ipſam fere venti velocitatem exæquante.

Hæc cum ita ſint, calculum nunc ita ponemus, ut utriuſque motus rationem habeamus.

Fig. 55. §. 39. Sit igitur fluidum D E B A (Fig. 55.) quod ſub directione E B impingit in totum planum A B: moveri autem ponitur planum motu parallelo in directione B *b* ad E B perpendiculari: Sint porro velocitates ejusmodi, ut dum particula fluidi percurrit lineam E B, punctum plani B abſolvat lineam B *b*. His poſitis fingere licet totum ſyſtema, fluidum nempe cum plano moveri à *b* verſus B & quidem velocitate *b* B: Ita vero fiet, ut planum A B quieſcat, particula autem fluidi in punctum B incidens cenſenda ſit veniſſe expuncto *e*, ſumta E *e* $=$ B *b*, & ſic de omnibus guttulis. Igitur loco fluidi D E B A in planum motum A B incidentis velocitate E B concipiendum erit fluidum *d e* B A in idem planum A B ſed immotum incidens velocitate *e* B: Producatur jam A B usque in *b* agaturque D E *d e b* perpendicularis ad E B, erit motus particulæ fluidi repræſentatus per *e* B reſolvendus in *e g* & *g* B, ſibi invicem perpendiculariter inſiſtentes, quorum poſterior nihil in planum A B agit, alter vero *e g* rurſus ex duobus compoſitus eſt motibus *e f* & *fg*, quorum poſterior *fg* planum A B inutiliter in directione E B propellere tentat; dum prior *e f* ſolus idem planum in directione B *b* propellit. Demonſtratum itaque eſt, quamlibet particulam facere impulſum proportionalem lineæ *e f*: Dein patet quoque, ſi linea A B repræſentet totum planum, fore numerum particularum dato tempore in planum impingentium repræſentandum per lineam B N perpendicularem ad A *d* ſeu B *e*. Unde tandem niſus aquarum ad movendum planum in directione B *b* eſt proportionalis lineæ *e f* ductæ in B N. Ut

Ut jam determinetur inclinatio plani ad fluidum ſub his circumſtantiis maxime favorabilis ut motus plani in directione B *b* promoveatur: ponemus A B $=$ 1, D E ſeu A C $= x$, B C $= \sqrt{1-xx}$; lineam E B, quæ repræſentat motum fluidi, $= v$, & B *b* ceu menſuram motus plani $=$ V; atque ſic inſtituto calculo invenitur

$ef = xv\sqrt{(1-xx)} - (1-xx)\,V$, atque $BN = [xv - V\sqrt{(1-xx}]:\sqrt{(vv+VV)}$; unde $ef \times BN = [xv - V\sqrt{(1-xx)}]^2 \times \frac{\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{(vv+VV)}}$, quæ quantitas maxima erit, cum fit

$(9v^4 + 18vvVV + 9V^4)x^6 - (12v^4 + 30vvVV + 18V^4)x^4 + (4v^4 + 16vvVV + 9V^4)xx - 4vvVV = 0$.

§. 40. Calculus ratione inclinationis alarum in moletrinis alius eſt, quia velocitates in diverſis alarum locis variæ ſunt; ſunt enim proportionales diſtantiis à centro, facile autem nunc cuivis erit computum pro moletrinis inſtituere, huic caſui non ulterius inſiſtam, ſufficiat id notaſſe, quod non ſatis accurate ſtatuatur ab auctoribus $xx = \frac{2}{3}$, & quod verus valor ipſius x ſemper minor ſit quam $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Si fuerit v. gr. V $= v$, & omnia alæ puncta ſimili velocitate moveri cenſeantur, fiet $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, quod indicat inclinandam eſſe alam ad directionem venti ſub angulo ſemirecto. Optima alarum conſtructio foret, ſi incurvarentur, ita, ut ſub angulo minori ventus in illas impingat ſuperius quam inferius, aut ſi fiat ut alæ ubique ventum ſub angulo medio quinquaginta præterpropter graduum excipiant.

§. 41. Pergo ad alterum caſum, quo omne fluidum à plano, utcunque id inclinatum ſit, excipi ponitur. Hic autem patet; quia numerus particularum dato tempore impellentium ſemper idem eſt, nullam eſſe attentionem faciendam ad linem B N, atque ſic niſum quem aquæ faciunt ad movendum planum A B in directione B *b* ſimpliciter repræſentari per *ef* ſeu $xv\sqrt{1-xx} - (1-xx)\,V$. Igitur niſus iſte maximus obtinebitur ſumendo $xx = \frac{1}{2} + \frac{V}{2\sqrt{(vv+VV)}}$, atque erit ipſe niſus tunc $= \frac{1}{2}\sqrt{(vv+VV)} - \frac{1}{2}V$, ſi per v intelligatur preſſio directa, quam vena exerit in planum cui perpendiculariter occurrit.

§. 42. Conſideremus nunc venam D E B A tanquam immediate ex ori-

ficio D in figura 54. egreſſam & vocemus rurſus directam preſſionem venæ ita conſideratæ p, ſicut §. 33; atque erit niſus iſtius aquæ, quo conatur planum debito modo, ut niſus maximus fiat, inclinatum propellere in directione ad venam perpendiculari $= \frac{p}{2v} \times (\sqrt{vv+VV} - V)$: Et ſi porro iſte niſus multiplicatur per velocitatem plani V atque tempus, obtinetur *potentia abſoluta*, qua planum eadem velocitate per idem temporis ſpatium moveri queat; ſic igitur præfata *potentia abſoluta* erit $= \frac{pVt}{2v} \times (\sqrt{vv+VV} - V)$.

§. 43. *Potentia abſoluta*, quam modo definivimus, ita eſt comparata, ut continue creſcat creſcente V, atque ſi velocitas V infinita ſumatur, fit eadem potentia $= \frac{1}{4} \times pvt$. Igitur cum in figura 54 vena D G uti volumus ad rotandam machinam per impulſum obliquum, nunquam plusquam quarta pars obtineri poteſt illius *potentiæ abſolutæ*, quæ in elevationem aquarum ex C in E F impenditur. Impulſu vero directo, nunquam plus quam $\frac{4}{27}$ obtineri vidimus §. 37. Ergo effectus fere duplo major impulſu obliquo ſeu motu rotæ horizontali quam impulſu directo, ſeu motu rotæ verticali obtineri poteſt.

Si vero impulſus fluidorum aliter æſtimetur quam §. 31. indicatum fuit, erit ubique in eadem ratione mutandus valor litteræ p, qua impulſus æſtimatio fuit mutata.

Experimentum, de quo §. 27. *ſect.* 9, mentionem feci, hoc eſt. Nempe unus operarius ope antliæ intra ſeptem minuta prima cum dimidio pedes cubicos ſedecim cum dimidio ad altitudinem quatuordecim pedum evexit.

Iſte vero effectus æqualiter diſtributus æquivalet huic actioni, qua dimidius præter propter pes cubicus ſingulis minutis ſecundis elevatur ad altitudinem unius pedis: Hic igitur effectus dimidius admodum eſt illius, quem hominem ſanum & robuſtum calcatura dare poſſe ex aliis deduxi principiis in paragrapho decimo ſeptimo. Non crediderim defectum petendum eſſe omnem à decrementis, quæ in *potentiam abſolutam* ex variis cauſis in iſta ſectione expoſitis cadere poſſunt, ſed potius ab eo, quod plus defatigentur homines ab agitatione emboli in antlia, quam à calcatura in rota calcatoria.

Ex-

Experimentum plane ſimile, ſed cum antlia longe perfectiori artificioque ſingulari fabricata, ante aliquot demum menſes Genevæ ſumſi præſentibus Viris Clariſſimis D. D. De la Rive, Calendrin, Cramer & Jalabert Acad. Genev. Profeſſ. ſucceſſus experimenti talis fuit, ut intellexerim operarium unum ſingulis minutis ſecundis quatuor quintas partes unius pedis cubici ad altitudinem unius pedis elevaſſe vel potius effectum æqualem præſtitiſſe. Notabile eſt experimentum, nec puto ulla alia machina effectum obtineri poſſe admodum majorem. Mirabile quoque id eſt, quod ſic omnis generis machinas, quacunque potentia animatas, ſi obſtacula demas effectum haud multo diſſimilem præſtare appareat. Re bene perpenſa ſtatuo, hominem machina perfectiſſima ſingulis minutis ſecundis pedem cubicum aquæ ad altitudinem unius pedis elevare poſſe aut effectum ſimilem producere.

Huc etiam pertinerent, præſertim ratione paragraphi trigeſimi primi, experimenta quæ accuratiſſime inſtitui ad æſtimandum impetum venæ fluidæ in planum impingentis, quibus confirmatus fui in theoria nova, quam hac de re ſtabiliveram ſimulque edoctus, errorem è Mariotti temporibus communem fuiſſe commiſſum. Quia vero in fine hujus ſectionis hac de re non diſertè ſermo fuit, atque in ſectione decima tertia expreſſe eam pertractare animus eſt, ideo eo usque diſquiſitiones haſce, ex principiis mechanicis nondum obſervatis, erutas differemus.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ

SECTIO DECIMA.

De affectionibus atque motibus fluidorum elasticorum, præcipue autem aëris.

§. I.

EFluida nunc elastica consideraturis licebit nobis talem iis affingere constitutionem, quæ cum omnibus adhuc cognitis conveniat affectionibus, ut sic ad reliquas etiam nondum satis exploratas detur aditus. Fluidorum autem elasticorum præcipuæ affectiones in eo positæ sunt: 1°. ut sint gravia, 2°. ut se in omnes plagas explicent, nisi contineantur, & 3°. ut se continue magis magisque comprimi patiantur crescentibus potentiis compressionis: Ita comparatus est aër, ad quem potissimum præsentes nostræ pertinent cogitationes.

§. 2. Finge itaque vas cylindricum verticaliter positum A C D B (Fig. 56.) atque in illo operculum mobile E F, cui pondus P super incumbat: contineat cavitas E C D F corpuscula minima motu rapidissimo hinc inde agitata: sic corpuscula, dum impingunt in operculum E F idemque suis sustinent impetibus continue repetitis fluidum componunt elasticum quod remoto aut diminuto pondere P sese expandit: quod eodem aucto condensatur & quod in fundum horizontalem C D haud aliter gravitat, ac si nulla virtute elastica esset præditum: sive enim quiescant corpuscula sive agitentur, non mutant gravitatem, ita ut fundum tum pondus tum elasticitatem fluidi sustineat. Tale igitur fluidum quod cum primariis convenit fluidorum elasticorum affectionibus substituemus aëri, atque sic alias, quæ jam in aëre detectæ fuerunt explicabimus aliasque nondum satis perpensas ulterius illustrabimus proprietates.

Fig. 56.

§. 3. Corpuscula cavitati cylindri inclusa considerabimus tanquam numero infinita, & cum spatium E C D F occupant, tunc aërem illa dicemus formare naturalem, ad cujus mensuras omnia sunt referenda: atque sic pondus

dus P operculum detinens in ſitu E F non differt à preſſione Atmoſphæræ ſuperincumbentis, quam proinde per P in ſequentibus deſignabimus.

Notetur autem hanc preſſionem minime æqualem eſſe ponderi abſoluto cylindri verticalis aërei operculo E F in atmoſphæra ſuperincumbentis, quod hactenus inconſiderate affirmarunt auctores : ſed eſt preſſio iſta æqualis quartæ proportionali ad ſuperficiem terræ, magnitudinem operculi E F & ponderi totius atmoſphæræ in ſuperficiem terræ.

§. 4. Quæratur jam pondus π, quod aërem E C D F in ſpatium e C D f condenſare valeat, poſitis velocitatibus particularum in utroque aëre, naturali ſcilicet & condenſato, iisdem : ſit autem E C $=$ 1 & e C $= s$: Cum vero operculum E F transponitur in $e f$, majorem à fluido patitur niſum duplici modo : *primo* quod numerus particularum ratione ſpatii, cui includuntur, major nunc eſt, & *ſecundo* quod quævis particula ſæpius impulſum repetit : ut recte calculum ponamus incrementi, quod à *prima* pendet cauſa, particulas conſiderabimus ceu quieſcentes, atque numerum earum, quæ operculo in ſitu E F ſunt contiguæ, faciemus $= n$, & erit numerus ſimilis pro ſitu operculi in $ef = n : \left(\frac{eC}{EC}\right)^{\frac{2}{3}}$, ſeu $= n : s^{\frac{2}{3}}$:

Notetur autem fluidum à nobis conſiderari non magis condenſatum in parte inferiori, quam in ſuperiori, quale eſt, cum pondus P veluti infinitè majus eſt pondere proprio fluidi : Perſpicuum hinc eſt, hoc nomine vim fluidi eſſe, ut ſunt numeri n & $n : s^{\frac{2}{3}}$, id eſt, ut $s^{\frac{2}{3}}$ ad 1. Quod vero attinet ad alterum incrementum à *ſecunda* proveniens *cauſa*, invenitur id reſpiciendo motum particularum ; atque ſic apparet impulſus eo ſæpius fieri, quo propius ad ſe invicem ſitæ ſunt particulæ : Erunt ſcilicet impulſuum numeri reciproce ut diſtantiæ mediæ inter ſuperficies particularum : Iſtæque diſtantiæ mediæ ita determinabuntur.

Particulas ponemus eſſe ſphæricas, diſtantiamque mediam inter centra globulorum pro ſitu operculi E F vocabimus D ; diametrumque globuli deſignabimus per d: ita erit diſtantia media inter ſuperficies globulorum $=$ D $- d$: patet vero in ſitu operculi ef fore diſtantiam mediam inter centra globulorum $= D \sqrt[3]{s}$, atque proinde diſtantiam mediam inter ſuperficies globulorum $= D \sqrt[3]{s} - d$. Igitur reſpectu ſecundæ cauſæ erit vis aëris natu-

turalis E C D F ad vim aëris compreſſi *e* C D *f* ut $\frac{1}{D-d}$ ad $\frac{1}{D\sqrt[3]{s}-d}$, ſeu ut $D\sqrt[3]{s}-d$ ad $D-d$: Conjunctis vero ambabus cauſis erunt prædictæ vires, ut $s^{\frac{2}{3}}\times(D\sqrt[3]{s}-d)$ ad $D-d$.

Rationi D ad *d* aliam ſubſtituere poſſumus magis intelligibilem: nempe ſi putemus operculum E F pondere infinito depreſſum deſcendere usque in ſitum *m n*, in quo particulæ omnes ſe tangunt, atque lineam *m* C vocemus *m*, erit D ad *d* ut 1 ad $\sqrt[3]{m}$, quâ ratione ſubſtituta, erunt tandem vires aëris naturalis E C D F & compreſſi *e* C D *f* ut $s^{\frac{2}{3}}\times(\sqrt[3]{s}-\sqrt[3]{m})$ ad $1-\sqrt[3]{m}$, ſeu ut $s-\sqrt[3]{m}\,s\,s$ ad $1-\sqrt[3]{m}$. Eſt igitur $\pi = \frac{1-\sqrt[3]{m}}{s-\sqrt[3]{m}\,s\,s}\times P$.

§. 5. Ex omnibus phænomenis judicare poſſumus aërem naturalem admodum condenſari poſſe, & fere in ſpatiolum infinite parvum comprimi; facta igitur $m = o$, fit $\pi = \frac{P}{s}$, ita ut pondera comprimentia ſint fere in ratione inverſa ſpatiorum, quæ aër diverſimode compreſſus occupat; quod multiplex experientia confirmavit. Et poteſt certe hæc regula tuto accipi in aëre rariore quam eſt naturalis; an vero etiam poſſit in aëre admodum denſiori, non ſatis exploratum habeo: nec dum enim fuerunt experimenta ea accuratione, quæ hic requiritur, inſtituta: unico opus eſt ad definiendum valorem litteræ *m*, ſed eo accuratiſſime inſtituendo & quidem cum aëre vehementer compreſſo; gradus autem caloris in aëre, dum comprimitur, ſollicitè invariatus conſervetur.

§. 6. Elaſticitas interim aëris nonſolum à condenſatione augetur, ſed & ab aucto calore, & quia conſtat calorem intendi ubique creſcente motu particularum inteſtino, ſequitur, elaſticitatem aëris ſpatium non mutantis auctam, intenſiorem arguere motum in particulis aëris, quod cum hypotheſi noſtra recte convenit: perſpicuum enim eſt, eo majus requiri pondus P ad continendum aërem in ſitu E C D F, quo majori velocitate particulæ aëreæ agitantur: Imo non difficile eſt videre pondus P ſecuturum rationem duplicatam iſtius velocitatis, ideo quod ab aucta velocitate tum numerus impetuum tum intenſitas eorundem æqualiter creſcat, utrumq; vero ſeorſim proportionale ſit ponderi P.

Igitur

Igitur si velocitas particularum aërearum dicatur v, erit pondus, quod in situ operculi E F sustinere valet, $= v\,v\,P$ & in situ $ef = \frac{1-\sqrt[3]{m}}{s-\sqrt[3]{m\,s\,s}} \times v\,v\,P$, vel proxime $= \frac{v\,v\,P}{s}$, quia ut vidimus m numerus admodum exiguus est ratione unitatis & numeri s.

§. 7. Istud theorema, quod in præcedente paragrapho apposui, quo nempe indicatur, *in omni aëre cujuscunq; densitatis sed eodem caloris gradu prædito elasticitates esse ut densitates, atq; proinde etiam incrementa elasticitatum, quæ fiunt à calore æqualiter aucto proportionalia esse densitatibus*, Istud, inquam, theorema experientia edoctus fuit D. Amontons idemque recensuit *dans les mémoires de l'Acad. R. des Sc. de Paris pour l'année* 1702. Sensus istius theorematis est, si v. gr. aër naturalis mediocris caloris pondus 100 lb. datæ superficiei impositum sustinere valeat, atque deinde calor ipsius augeatur donec 120 lb. eadem superficie eodemque volumine ferre possit, fore ut idem aër in dimidium spatium condensatus, & iisdem caloris gradibus præditus respective ferre possit 200 lb. & 240 lb. ita ut incrementa 20 lb. & 40 lb. utrobique ab aucto calore genita sint densitatibus proportionalia. Affirmat porro aëris, quem vocat temperatum, elaterem esse ad elaterem aëris ejusdem cum aqua bulliente caloris, proxime ut 3. ad 4 vel accuratius ut 55 ad 73. At ego institutis experimentis cognovi aërem calidissimum, qualis maxime fervente in hisce terris est æstate, tanti nondum esse elateris, quantum D. Amontons aëri tribuit temperato; imo nec sub ipso æquatore aërem unquam ejus esse caloris mihi persuadeo. Meis autem magis fidendum esse puto experimentis quam Amontonianis, ideo quod in his aër non conservarit suum volumen ejusque variationis nulla ab Auctore habita fuerit ratio in calculo. Aëris qui hic Petropoli frigidissimus fuit die 25. Decembr. 1731. s^{t}. vet. elaterem deprehendi esse ad elaterem similis aëris, communi cum aqua bulliente calore prædiți, ut 523 ad 1000.

Sed anno 1733. d. 21. Jan. multo intensius fuit frigus eique respondere observavi aëris elasticitatem infra dimidiam ejus quam habet similis aër ad aquam bullientem calefactus. Sed cum esset maximus aëris calor in loco umbroso ann. 1731. elasticitatem habuit proxime $\frac{4}{7}$ & accuratius $\frac{100}{76}$, ejus quam habuit aër frigidissimus & $\frac{3}{7}$ ejus quam habet aër ejusdem cum aqua bulliente

caloris : maximæ igitur caloris variationes in aëre hic locorum continentur intra terminos 3 & 4, quos in Anglia non ultra terminos 7 & 8 excurrere legi. Calor autem aëris, cujus elaſticitas tres quartas exæquet partes elaſticitatis aëris inſtar aquæ bullientis calidi, corpori animali fere intolerabilem eſſe puto.

§. 8. Ex cognita ratione inter diverſas ejusdem aëris eodemque ſpatio incluſi elaſticitates, facile eſt deducere menſuram caloris, qui ad aërem pertineat, ſi modo conveniamus in definiendo calore duplo, triplo &c. quæ definitio arbitraria eſt, neque in rerum natura poſita; mihi quidem videtur non incongrue aëris calorem ſi communis ſit denſitatis proportionalem ſtatui ejus elaſticitati. Primus autem caloris gradus, à quo reliqui menſuram accipiant, ſumetur ab aqua pluviali bulliente, quia huic procul dubio ubique terrarum idem proxime caloris gradus eſt.

His ita acceptis erunt calores aquæ bullientis, aëris tempore æſtivo calidiſſimi & aëris tempore hyemali frigidiſſimi in hiſce terris proxime ut 6, 4 & 3. Dicam nunc quemadmodum hoſce invenerim numeros, ut de accuratione experimentorum, quorum ſucceſſus ab Amontonianis diverſus admodum eſt, judicium ferri poſſit.

Fig. 57. §. 9. Barometro nempe uſus ſum ordinario A C B E, (Fig. 57.) idque hermetice ſigillari curavi in *m*; hoc modo inſtrumentum mutavi in thermometrum aëreum mutationibus barometricis non obnoxium : Creſcente enim calore intenditur elaterium aëris A *m* F altiorque fit columna mercurii B D, quam aër captus ſuſtinet & ſi ſpatium A *m* F veluti infinitum cenſeri poſſet, eſſet calor in ratione altitudinis B D (per §. §. 7. & 8.) atque hujus thermometri ope poterit menſura caloris ubique ſpecifice definiri. Si enim immergatur inſtrumentum aquæ bullienti pluviali in ſitu verticali obſerveturque punctum G ad quod ſuperficies mercurii aſcendit ; fueritque deinde alius caloris gradus qualiscunque definiendus, qui mercurium ſuſtinuiſſe ad punctum D usque obſervatus fuerit, erit utique calor iſte ad calorem aquæ ferventis ut B D ad B G. Et cum ratio B D ad B G conſtans ſit, quæcunque fuerit altitudo B G, erit idem caloris gradus, de quo ſermo eſt, ubique locorum facile imitabilis. Poterit autem B G in centum aut mille dividi particulas atque hujusmodi particulis altitudo B D definiri.

Nihil

Nihil dico de modis hujusmodi thermometra ſenſibiliora reddendi; eorum quisque facile excogitabit plures, qui volet. Curetur autem, ut altitudo B E non ſit infra 4 pedes, imo ut major ſit, ſi etiam aliorum fluidorum bullientium gradus caloris, qui ſæpe major eſt quam in aqua, experiri animus ſit. Si minora hujusmodi thermometra deſiderentur, poterunt ea ita fieri, ut tempore ſigillationis in *m* ampulla vitrea A F igni lampadis apponatur ad rarefaciendum aërem in illa contentum, tuncque protinus ſigillatio fiat, & ne ſigillationi mora injiciatur, poterit prius ampulla vitrea in tubulum capillarem duci, qui vel leviter flammæ admotus illico colliqueſcat. Hoc modo thermometra obtinui non ultra quatuor aut ſex pollices longa, ſed parvæ virtutis. Cæterum multum refert, ut ſpatium E D ſit ab omni aëre, quantum fieri poteſt, vacuum, neque de iſto vacuo ſatis certi erimus cum viderimus in ſitu inſtrumenti horizontali mercurium extremitatem E attingere, quia fieri poteſt, ut aër, qui antea in ſpatio E D fuit, ſeſe in poros mercurii recipiat, rurſusque priſtinum ſpatium occupet deſcendente mercurio: tutius erit examen admovendo partem D E flammæ: ſi enim à calore flammæ ſuperficies D locum non mutet, indicium erit certum vacuum eſſe ab aëre ſpatium E D.

§. 10. In præcedente paragrapho conſideravimus ſpatium A *m* F ab aëre occupatum veluti infinitum ratione ſpatii D G aut D E: Quod ſi vero fuerit tantum octuplo vel decuplo majus, nondum licebit illud ſine notabili errore tanquam infinitum conſiderare: atque hinc conjicio ortum eſſe errorem aliquem in definiendo elatere aëris mediocriter calidi in experimentis Amontonianis.

Ut igitur accuratiſſime fiat experimentum, ita procedendum erit: Fuerit ſuperficies mercurii inferior in A F ducaturque horizontatis in A L: deinde pro caloris gradu qualicunque definiendo inclinetur inſtrumentum, donec ſuperficies mercurii ſit in puncto *g*, (quod idem eſt in quo mercurius ſubſiſtebat à gradu caloris aquæ ferventis in ſitu thermometri verticali) tuncque capiatur menſura altitudinis verticalis *g h*, quæ erit ad altitudinem G B vere ut elater aëris, cujus calor definiendus eſt, ad elaterem aëris inſtar aquæ ferventis calidi. Sic igitur calores erunt proprie in ratione altitudinem *g h*. Priusquam hoc argumentum abrumpam, notaſſe conveniet (quandoquidem aliquibus fortaſſe videbitur *primum*, qui à nobis poſitus fuit, *caloris gradum* ab aqua bulliente deſumtum non ſemper nec ubique ſibi omnino conſtare) quod

loco caloris aquæ bullientis thermometrum etiam poſſit certis & fixis menſuris fieri, ſi experimento denſitas aëris exploretur ſeu ejus gravitas ſpecifica ſimulque altitudo barometri notetur. Si enim thermometrum inclinetur, donec ſuperficies mercurii fuerit in *g* & eo tempore altitudo barometri fuerit 28. *poll. Paris.* atque pes cubicus aëris, in quo thermometrum poſitum eſt, pondus habuerit 600. gran. Norimb. poterit altitudo verticalis *g h* ceu *primus* caloris gradus conſiderari. Si autem alio loco & tempore altitudo barometri fuerit 29. *poll. Paris.* & pondus pedis cub. aëris, qui ambit aliud thermometrum (in quo *primum* caloris *gradum* definire animus eſt) ſit 500. gran. Norimb. ac denique ſuperficies mercurii in thermometro rurſus ſit in *g*, erit altitudo verticalis primo caloris gradui conveniens $\frac{29.600}{28.500} \times g\,h$. In uſu thermometri inclinetur ſemper inſtrumentum, donec ſuperficies mercurii ſit in *g*: Volui methodum hanc apponere ut appareret quam facile ſit in theoria fixam dare caloris menſuram : In praxi vero alteram multo faciliorem ſatisque accuratam huic prætulerim.

§. 11. Veniamus nunc ad aëris conſiderandam atmoſphæram, quæ non à ſuperincumbente pondere alieno, ſed propria coërcetur mole : *Primò* autem examinabimus preſſiones columnarum aërearum verticalium atque æquilibria earum tum inter ſe tum cum columna mercuriali in barometris : *Secundò* elaſticitates aëris in variis atmoſphæræ altitudinibus ſupra mare atque altitudines reſpondentes barometricas rimabimur : Atque his præmiſſis, plurimis ſatisfaciemus phænomenis aliis ad mutationes atmoſphæræ pertinentibus.

§. 12. Sint duo tubi æqualis amplitudinis verticales A C & B D
Fig. 58. (Fig. 58.) uterque indefinitæ altitudinis : Deinde finge tubulos ſtrictiores horizontales *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, *lm*, *&c.* numero veluti infinitos, utrinque apertos & hiantes in tubos verticales. Puta præterea ubique aëreas particulas hos tubos occupantes eadem velocitate agitari, eundemque adeo caloris gradum habere: Ita dubium nullum eſt, quin funda A & B æqualiter premantur ſimulque ipſis æquale pondus (quod ſcilicet ipſum eſt pondus columnæ aëreæ indefinitæ A C vel B D) ſuperincumbat.

Intelligis etiam, ſi in æqualibus altitudinibus veluti in *g* & *h* diaphragmata fingas atque abeſſe putes aërem inferiorem *g* A & *h* B, etiamnum iſta diaphra-

phragmata utrinque æqualiter premi & æqualia esse pondera columnarum aërearum *g* C atque *h* D diaphragmatibus superjacentium. Si igitur pondus totius columnæ aëreæ A C vel B D dicatur A, & pondus columnæ aëreæ *g* C vel *h* D ponatur B, erit pondus aëris inter A & *g* sive B & *h* intercepti = A—B, pondus fundo A vel B superjacens = A, & pondus diaphragmati in *g* vel *h* incumbens = B.

§. 13. At si inæquali velocitate in tubis A C & B D particulæ agitentur, res alia erit: tamen quæcunque fingatur velocitatum & calorum in singulis locis diversitas, patet nihilominus utrobique æqualiter pressum iri partes tubi in eadem altitudine positas, veluti in *g* & *h*, atque proinde diaphragmata, si fingantur utrobique in eadem altitudine posita, æqualem pressionem sustentura esse. Si enim dicas minorem esse pressionem in *g* quam in *h*, nihil erit quod fluxum aëris ex B D in A C per tubulum transversum *h g* impediat, sicque ista positio contra statum *permanentiæ*, quem supponimus, pugnabit.

Cum itaque loca in eadem altitudine posita æqualiter à superincumbente aëre premantur, erunt (p. §. 6.) densitates in locis homologis quibuscunque, veluti in *g* & *h*, proxime in reciproca ratione quadrata velocitatum, quibus in illis locis particulæ agitantur.

§. 14. Consequens est ex præcedente paragrapho, ubique locorum eandem esse aëris pressionem in æqualibus à superficie maris altitudinibus, si atmosphæra in statu permanente æquilibrii posita nullisque agitata ventis putetur, quæcunque fuerit caloris differentia in diversis atmosphæræ partibus: Igitur ubique terrarum sub æquatore & sub polo eadem sit oportet altitudo mercurii in barometris, quæ in superficie maris aut in æqualibus super illam altitudinibus posita sunt, si atmosphæra nullis obnoxia sit mutationibus. Pono autem aquas à superficie maris terminatas ad commune æquilibrium esse positas, non quod id omnino necesse sit, sed quod nulla adhuc observata fuerit differentia: imo cursus (*les courans*) aquarum in multis oceani locis, qui ad eandem perpetuo diriguntur plagam, hanc hypothesin non omni rigore accipiendam esse ostendunt.

§. 15. Jam notavi densitatem aëris in quovis tuborum verticalium loco pendere à calore respondente: Et cum diversi esse possint caloris gradus manente

nente æquilibrio, diverſæ quoque eſſe poterunt denſitates : ponantur itaque denſitates in $g = D$, in $b = \delta$; finganturque utrobique duo ſtrata altitudinis æqualis & infinitè parvæ dx, poſita altitudine Ag vel $Bb = x$: Ita erit pondus columnæ aëreæ $Ag = \int D\,dx$ & columnæ $Bb = \int \delta\,dx$: atque hoc modo poterit tum integræ columnæ tum cujusvis partis pondus definiri : Interim apparet, minime requirere rei naturam, ut ſint pondera columnarum AC & BD vel Ag & Bb vel denique gC & hD inter ſe æqualia, quamvis (per §. 13.) preſſiones tam in funda A & B quam in diaphragmatr g & b ſint inter ſe æquales ; mirum id primo intuitu quibusdam fortaſſe erit, fieri poſſe ut fundum A aliam ſuſtineat preſſionem quam eſt pondus columnæ aëreæ indefinitæ AC ei ſuperincumbentis, quandoquidem omnibus in ſtatu ſuo permanentibus, ut fere videtur, concipi poſſint orificia a, c, e, g, &c. ſingula obturata, quo ſane in caſu dubium nullum eſt, quin preſſio fundi A ſit ipſum columnæ aëreæ ſuperjacentis pondus : hunc vero ſcrupulum ſibi quisque eximet hunc in modum : fingamus utramque columnam terminatæ altitudinis (quamvis enim ſine fine aſſurgant quamdiu particulæ motum aliquem ſervant, attamen terminatæ erunt, ſi eædem particulæ in ſuprema columnarum parte motu deſtitutæ ſint, ſicque ſimplex fluidum grave omni elaſticitate deſtitutum efficient) hoc poſito apparet 1°. columnam utramque ad communem aſſurgere altitudinem apertis tubulis transverſalibus, qui ubique adſunt. 2°. ſuprema ſtrata utrobique eſſe æque denſa, quia ſunt ad æquilibrium poſita & communem habent altitudinem. Ex hoc jam obvium eſt, quare non liceat tubulos transverſales conſiderare ceu obturatos, quod oſtendere conſtitui. Perſpicuum quoque eſt ex ſe, preſſiones ubique proportionales eſſe ponderi ſupremi ſtrati, ex quo conſequens eſt, quod jam §. 13. indicatum fuit, preſſiones ab utraque parte æquales inter ſe eſſe ſub æqualibus altitudinibus. Si jam columnæ nusquam terminatæ ſint, licebit mente ultima concipere ſtrata aut ſub æqualibus altitudinibus diaphragmata fingere utrobique æquali pondere onerata, ſic ut nihil vi demonſtrationis inde decedat.

§. 16. Igitur quum in barometro ex loco humiliori veluti A in altiorem g transportato mercurius deſcendit, non ſequitur pondus columnæ mercurialis, quæ in barometro deſcendit æquale eſſe ponderi columnæ aëreæ ejusdem diametri & altitudinis Ag, quod ab aliquibus ita aſſeritur. Et profecto cæteris paribus columna mercurii deſcendens eadem erit tam tempore hye-

hyemali quam æſtivo cum ex ſententia illa deberet tempore calido eſſe minor, quam tempore frigido: Eadem quoque erit in locis meridionalibus & ſeptentrionalibus.

Patet exinde quid cenſendum ſit de illa methodo, qua in Anglia aliquando uſos eſſe recenſet D. *Du Hamel in hiſt. Acad. Sc. Pariſ.* ad indagandam rationem inter gravitates ſpecificas aëris & mercurii: Obſervata nimirum altitudine mercurii in loco humiliori, tum etiam in altiori, gravitates ſpecificas in aëre & mercurio ſtatuerunt, ut erat differentia altitudinum mercurii in barometro ad altitudinem inter locos obſervationum interceptam: Etiamſi aër ejuſdem denſitatis ponatur ab imo obſervationis loco ad alterum uſque, non licet tamen inde judicare de ejus gravitate ſpecifica ratione mercurii. Quicquid ab experimento colligere licet, hoc ſolum eſt:

Conſideremus ſcilicet integram cruſtam aëream terram ambientem atque inter ambo obſervationis loca interceptam, & erit pondus iſtius cruſtæ ad ſuperficiem terræ, ut pondus columnæ mercurialis, qualis in barometro deſcendit ad baſin ejus; Manifeſta hæc ſunt ex eo quod ſumma baſium A & B ſuſtinent quidem ſummam ponderum, quæ habent columnæ aëreæ AC & BD, neque tamen quævis baſis premitur ſuæ columnæ pondere ſeorſim, & quod idem refectis columnis Ag & B *h* intelligi debet de columnis *g* C & *h* D, diaphragmatis in *g* & *h* poſitis, incumbentibus. Igitur experimentum non tam gravitatem ſpecificam aëris, in quo factum eſt, indicat quam omnis aëris terræ proximi gravitatem ſpecificam *mediam* determinat; prior admodum variabilis eſt, altera procul dubio conſtanter eadem fere permanet.

Faciamus computum *gravitatis ſpecificæ* iſtius *mediæ* aëris omnis, qui terram ambit: Multis vero experimentis, quæ in diverſis locis parum ſupra mare elevatis ſumta fuerunt, id conſtat, elevationi 66 pedum proxime deſcenſum reſpondere unius lineæ in barometro. Sequitur inde, quod aëris gravitas ſpecifica media ratione mercurii ſit, ut altitudo unius lineæ ad altitudinem 66. ped. id eſt, ut ut 1 ad 9504; ergo poſita gravitate ſpecifica mercurii = 1, erit gravitas ſpecifica *media* aëris = 0, 000105. Notabile eſt profecto tantam eſſe hanc gravitatem mediam aëris: certus enim ſum vel maxime ſæviente hic locorum frigore, aëris gravitatem ſpecificam vixdum tantam eſſe, quantam nunc exhibuimus pro ſtatu medio omnis aëris terram ambientis: at ſub æqua-

tore multo erit minor & omnibus recte perpenſis non crediderim *gravitatem mediam* aëris, qui inter utramque latitudinem 60. gr. continetur, ultra 0,000090 excurrere; quo poſito erit *gravitas media* aëris ab utroque polo ad 30. gradus, terram cingentis, (quod ſpatium paullo pluſquam octavam totius terræ ſuperficiei efficit partem) = 0,000210, quæ dupla eſt aëris hic locorum denſiſſimi: ſub ipſo autem polo, præſertim antarctico admodum gravior erit aër & fortaſſe aqua vix decies levior, cum eſt frigidiſſimus atque denſiſſimus.

§. 17. Veniamus nunc ad mutationes tum atmoſphæræ tum barometri: Conſiderabimus ergo duo barometra utrobique in imo aëris loco poſita, alterum in A, alterum in B, & in utroque mercurium ad eandem altitudinem ſuſpenſum ponemus: Poſtea in A ſubito aërem admodum calefieri fingamus: Ita videmus fore, ut idem aër rarefiat: neque tamen inde ulla barometri mutatio proditura eſſet, ſi nullam aër haberet inertiam ad motum, etiamſi omnis aër ex AC in BD tranſpellatur: poſita autem iſta inertia ſupervenit quædam preſſio in omnes plagas eaque maxime ſenſibilis in regione A. Creſcet igitur ad tempus altitudo mercurii in utroque barometro, magiſque creſcet in A quam in B. Contrarium erit, ſi extemplo magna quædam aëris maſſa barometro A vel B vicina à frigore condenſetur.

§. 18. Hæc unica videtur cauſa, quæ aliquam in barometris in A vel B poſitis, efficere poſſit mutationem, quia hâc remotâ funda A & B ſemper æqualiter premuntur, nempe unuſquiſque pondere, quod ſit dimidium columnarum aërearum AC & BD ſimul ſumtarum, quæ quidem ponderum ſumma conſtans eſt. Si hæc ad atmoſphæram applicare velimus, notandum eſt funda A & B repræſentare loca ima atmoſphæræ, quæ quidem in ſuperficie terræ poſita forent, ſi aër terræ viſcera penetrare nequiret: quia vero res ſecus ſe habet, erunt loca fundis A & B analoga intra ſuperficiem terræ cenſenda.

§. 19. Putentur nunc barometra in *g* & *h* poſita; ſitque in ambobus mercurius ad eandem altitudinem ſuſpenſus: his poſitis cauſa fingatur ſupervenire, qua columna A*g* ſive ſola ſive conjunctim cum ſocia B*h* calefiat atque ſeſe expandat. His perſpicuum eſt, ſi vel nulla aëris ſit inertia fore, ut preſſiones aëris in *g* & *h* creſcant, quia his locis major nunc aëris quantitas ſupereminet quam antea; acceſſit nimirum pondus omnis aëris, qui ex A*g* & B*h* à calore fuit ſurſum propulſus. Atque ut hæc ſymbolis indicemus, faciemus pon-

dus

dus columnæ A g, antequam novus caloris gradus superveniret, $=$ A, alterius B $b = \alpha$, pondus columnæ g C $=$ B, columnæ b D $= \zeta$: pondus columnæ A g rarefactæ $=$ C, pondus columnæ B b itidem rarefactæ $= \gamma$: altitudo mercurii in g ante expansionem aëris A g & B $b = l$, altitudo similis post istam expansionem $= x$ & habebimus hanc analogiam
$B + \zeta : l :: B + A - C + \zeta + \alpha - \gamma : x$: unde est

$$x = \frac{B + A - C + \zeta + \alpha - \gamma}{B + \zeta} l.$$

Igitur ascendet mercurius ab rarefacto aëre inferiore per altitudinem $x - l = \frac{A - C + \alpha - \gamma}{B + \zeta} l =$ (positis omnibus in utroque tubo paribus) $\frac{A - C}{B} l$.

Refrigescente autem rursus aëre in A g & B b iterum descendet mercurius in utroque barometro.

Notandum hic est, posse hoc modo à parvula caloris mutatione in A g atque B b notabilem oriri in barometro variationem ob insignem aëris densitatem in partibus inferioribus, qua fieri potest, ut in parte A g multo plus aëris contineatur (imo infinities, si aër vi infinita pressus in infinitè parvum spatium condensari ponatur) quam in reliqua g C, etiamsi longitudine infinita. Unde si pondus A admodum majus sit pondere B, simulque manente causa aërem rarefaciente, pondus C datam servet rationem ad A, quod ita fere fit, apparet ascensum mercurii à minimo caloris gradu superveniente in A g posse utcunque magnum esse.

Equidem si fingatur, partes A g & B b strictiores admodum esse præ amplitudinibus in g C & b D, intelligitur variationes barometi ab aucto diminutove caloris gradu in A g & B b ita fieri minus notabiles, quia pondera A & α ipsaque C & γ prioribus proportionalia hoc modo decrescunt; attamen variationes barometricæ, quæ ab hac causa proveniant, etiamnum utcunque magnæ concipi poterunt.

§. 20. Hæc dum ita perpenduntur, verisimile fit variationes barometricas maxima parte petendas esse à celeribus caloris mutationibus in cryptis subterraneis. Multas esse easque permagnas hujusmodi cryptas jam diu notum est: in terra etiam solida pori facere possunt quod cryptæ: si omnes cavitates (tum quæ à cavernis, tum quæ à poris aërem continentibus formanan-

mantur) ad altitudinem infra ſuperficiem terræ 20000. aut 30000. pedum colligas earumque capacitatem compares cum ſoliditate cruſtæ terreſtris ejuſdem altitudinis, hancque vel millies aut centies millies altera majorem ponas, erit profecto etiamnum ſufficiens cauſa iſta ad maximas barometri mutationes explicandas. Hæc ut puto ex præcedente paragrapho unicuique perſpicua erunt.

Cæterum loca quæ ſunt cryptis propiora, ea magis & ventis & barometri mutationibus erunt obnoxia, ob aëris ad motum inertiam, quæ fortaſſe ratio eſt, quod verſus æquatorem, ubi omnia fere pontus, minores variationes in barometro obſerventur quam in locis hiſce ſeptentrionalibus.

§. 21. Ex eodem fonte deducitur, aliquid etiam ad variationes barometricas conferre poſſe exhalationes aqueas ex terræ poris: ſed certe parum id erit: ſi enim tantum aquæ vapores ſuppeditârint, quantum maxima pluria decidere poteſt, vix inde unica linea mercurius aſcendet in barometro, præterquam quod hæc cauſa non ſit ita celeris, quin illius effectus in totam atmoſphæram ſimul fere diſtribuatur, atque ſic pro certo quodam loco totus evaneſcat. Si enim totam conſideramus Atmoſphæram, quæ terram ambit, animadverti certe non poterit eſſe eam vaporibus nunc minus nunc magis oneratam. Equidem rationem §. 20. expoſitam omnibus reliquis prætulerim, magnas enim & celeres in terræ viſceribus fieri poſſe mutationes indicant terræ motus, qui ſæpe ad centum usque milliaria eodem tempore ſentiuntur, & alia hujuscemodi phænomena.

Ad mutationes barometricas explicandas imprimis requiritur cauſa quædam ſubita; jam enim monui lentas in integram diſtribui aëris maſſam nulliusque eſſe effectus, idque demonſtravi §. 14. Atque hanc ob cauſam parvi faciendas eſſe mutationes, quæ immediate fiant in atmoſphæra ſupra terræ ſuperficiem.

§. 22. Et hæc videtur pariter cauſa quod luna, quæ tantæ eſt efficaciæ ad oceani aquas agitandas, nullum, qui obſervationibus diligentiſſimis obſervari potuerit, effectum exerat in barometrum: ſique cauſæ etiam reliquæ, quæ mutationem aliquam alicubi in Atmoſphæra producere valent paullatim agerent, foret procul dubio in omnibus locis à ſuperficie maris æque diſtantibus eadem conſtanter mercurii altitudo ad ſenſus. Hæc altitudo *media*

vocari

vocari poteſt & proxime determinabitur eo modo quo uſus eſt Joh. Jacobus Scheuchzer, obſervando quotidie altitudinem barometricam per longum temporis tractum ſumendoque inter omnes mediam.

Atque hâc circumſpectione uſus celeberrimus Auctor ex multis obſervationibus, quæ ad ipſum ex pluribus transmiſſæ fuerunt locis, poſuit altitudinem mediam.

Patavii - - - - - - 27 *poll.* 11½ *lin. Pariſ.*
Pariſiis - - - - - - 27 *poll.* 9½ *l.*
Turini - - - - - - 27 *poll.* 1¼ *l.*
Baſileæ - - - - - - 26 *poll.* 10⅛ *l.*
Tiguri - - - - - - 26 *poll.* 6½ *l.*
In monte Gothardi - 21 *poll.* 27½ *l.*

§. 23. Diverſitates iſtarum altitudinum *mediarum* ab inæqualibus locorum ſupra mare elevationibus provenire notum eſt. Jam enim Paſcalii tempore experimenta ſumta fuere de deſcenſu mercurii in barometro ex loco profundiori in altiorem lato. Inde Philoſophi in mutuam cauſæ & effectus proportionem inquirere : Diverſæ in hanc rem variis auctoribus prodiere regulæ: Præcipua, cui etiamnum plurimi adhærent, hæc eſt, quod altitudines locorum proportionem ſequantur logarithmorum, qui altitudinibus barometri reſpondent. Fundata eſt hæc regula præcipue ſuper eo, quod denſitas aëris ubique proportionalis ſit ponderi aëris ſuperincumbentis : male autem hic applicatur iſtud principium, quod pro aëre ejuſdem caloris tantum valet, neque res certa eſt in omni altitudine aëris, quamvis in eadem columna verticali exiſtentis; ſi vero ita ſit, calorem æqualem eſſe, fatendum eſt, ſic ſatis recte regulam ſe habere.

At experimenta regulæ plane ſunt contraria; igitur non eſt ubiquè idem caloris gradus per totam columnæ aëreæ verticalis altitudinem, quod ut nunc planum faciam, apponam experimenta quædam accurate, ut mihi perſuadeo, inſtituta, ſed tamen, quod doleo, diverſis temporibus lociſque: magis utique inſtituto noſtro convenirent experimenta eodem tempore in eodemque monte, diverſis tantum altitudinibus, ſumta; talia autem, niſi pro mediocribus locorum altitudinibus, nulla adhuc quantum ſcio extant cum omnibus quæ ſcire oportet circumſtantiis. (I.)

(I) In altitudine 1070 *ped. Paris.* à ſuperficie maris barometrum deſcendit $16\frac{1}{3}$ *lin.* cum in ſuperficie maris altitudinem teneret 28 *poll.* $4\frac{2}{3}$ *lin.* (alii ponunt ſimpliciter 28 *poll.* in ſchedis autem quas D. De Lisle mecum communicavit habetur 28 *poll.* $4\frac{2}{3}$ *lin.*). Igitur poſita elaſticitate aëris in ſuperficie maris, uti deinceps ſemper ponam, $=1$; inventa fuit elaſticitas in loco ſuperiori quam deſignabo per $E=0,9520$.

(II) In altitudine à ſuperficie maris 1542 *ped. Paris.* deſcendit Mercurius in barometro $21\frac{1}{2}$ *lin.* qui in mari ad altitudinem 28 *poll.* 2 *lin.* ſuſpenſus hæſit: hic igitur fuit $E=0,9364$.

(III) In altitudine montis Pici ſuper Inſula Teneriffa 13158 *ped. Paris.* à ſuperficie maris ſtetit mercurius ad altitudinem 17 *poll.* 5. *lin.* dum in ſuperficie maris teneret altit. 27 *poll.* 10 *lin.* unde eo in loco fuit $E=0,6257$.

(IV) Si in minoribus altitudinibus accurate deſcenſus Mercurii obſerventur, reperitur deſcenſum unius lineæ reſpondere altitudini 65 aut 66 *ped.* Igitur in altitudine 65 *ped.* eſt $E=0,9970$. Extant paſſim hæ obſervationes: tertiam autem habeo à D^no^. De Lisle fuitque à R. P. Feuillée inſtituta atque coram *Societate Reg. Scient. Paris.* prælecta: eſtque illa ſcopulus, ad quem omnes, quæ adhuc lucem aſpexerunt, theoriæ illidunt.

§. 24. Ut jam pateat, quouſque hæc cum poſitione logarithmicæ, ceu ſcalæ altitudinum elaſticitatibus reſpondentium conveniant, ponemus altitudinem loci à ſuperficie maris certo numero pedum Pariſinorum definiendam $=x$: elaterem aëris in ſuperficie maris deſignabimus per 1, & elaterem aëris in altitudine x ponemus $=E$. Notetur autem atmoſphæram nunc nobis conſiderari invariatam aut ſaltem ſibi conſtanter ſimilem, ita ut elateres aëris in ſuperficie maris & in altitudine quacunque x conſtantem ſervent rationem. Si enim admodum inæqualiter in diverſis atmoſphæræ altitudinibus, nulla ſervata proportione elateres inconſtantia temporis mutentur, ſane nulla excogitari poterit regula. His præmiſſis ponamus nunc æquationem $\alpha \log. E = x$ ubi coëfficiens α unica determinabitur obſervatione: utamur obſervatione prima & erit $\alpha \log. 0,9520 = 1070$, hincque α (ſecundum logarithmos Vlacquianos) $= -50194$. Igitur pro hoc negotio, ſi logarithmica ſatisfacere debeat, ponendum eſſet $-50194 \log. E = x$, ſive $\log. \frac{1}{E} = \frac{x}{50194}$: Ad

hujus

hujus autem æquationis normam, ſi ponatur pro ſecunda obſervatione $x = 1542$, invenitur $E = 0,9317$, ipſa autem obſervatio indicat $E = 0,9364$: differentia inter hypotheſin & obſervationem eſt plus quam ſeſquilineæ, quæ ſane notabilis eſt reſpectu habito ad differentiam parvam altitudinum verticalium.

Si jam porro pro tertia obſervatione ponatur $x = 13158$, fit ex hypotheſi $E = 0,5469$, dum experimentum indicavit $E = 0,6257$: quæ differentia nimia eſt, quam ut ullo modo logarithmica ſervari poſſit: valet enim hæc differentia plus quam duos pollices cum duabus lineis.

§. 25. Rejecta logarithmica conſequens eſt elaſticitates in diverſis atmoſphæræ altitudinibus nequaquam eſſe denſitatibus proportionales, aut quod eodem recidit, diverſum eſſe in diverſis altitudinibus medium caloris gradum. Aliæ igitur ab aliis, quibus defectus iſte probe fuit notatus, fuerunt excogitatæ regulæ: earum tamen nulla ad experimentum III. (§. 23.) ſatis accommodata dici poteſt. Veram, quam natura ſequatur, legem invenire, rem eſſe puto vix ſperandam: quis enim aliter quam levibus conjecturis aſſequetur rationem velocitatum mediarum in particulis aëreis: Incidi tamen forte in aliquam hypotheſin, quæ phænomenis non male reſpondet: prius autem pro quacunque velocitatum lege curvam dabo, quam ad ſpecialem iſtam hypotheſin deſcendam.

§. 26. Sit linea verticalis AD (Fig. 59.); QF horizontalis radat ſuperficiem maris: Denotet BF velocitatem mediam particularum aërearum in ſuperficie maris: BM denſitatem mediam & BQ elaſticitatem, quæ in omni loco æque alto eadem eſt. Deinde per puncta F, M, Q ductæ concipiantur curvæ EFH, LMO, PQS ceu ſcalæ, quæ in omnibus altitudinibus, veluti BC, applicatis CG, CN, CR denotent velocitates medias particularum aërearum, denſitates medias & elaſticitates medias. Datis nunc duabus curvis tertiam licet determinare ex eo, quod elaſticitates (ceu experientia docuit & §§. 3. 4 5. & 6. explicatum fuit) ſint proxime in ratione compoſita ex quadrato velocitatum modo dictarum & ſimplici denſitatum. Fig. 59.

Ipſe quidem monui prædicto loco hanc proportionem non poſſe exacte eſſe veram, quia aër quidem elaterem poteſt habere infinitum ſeu vi infinita comprimi, non poteſt autem in ſpatium plane infinite parvum condenſari

fari: quia tamen in aëre qui fit naturali vel quadruplo denfior, hæc proprietas, *quod nempe elaſticitates ſint in ratione compoſita ex quadrato velocitatum particularum & ſimplici denſitatum* experimentis etiamnum ad ſenſus omnino reſpondere viſa fuit, illa ſine ullo ſenſibili errore uti poterimus pro aëre naturali atmoſphæræ mari incumbentis, ſiquidem eo accuratius vera ſit quo rarior eſt aër.

His ad calculum præparatis ponemus BF $=$ a, BM $=$ b, BQ $=$ c, BC $=$ x, Cc $=$ dx; CG $=$ v, CN $=$ z, CR $=$ y, & erit $y : c = vvz : aab$ ſeu $y = \frac{cvvz}{aab}$. Quia porro elaſticitatis menſura eſt pondus ſuperincumbentis aëris, erit qR$(-dy) =$ ponderi ſtrati aërei intercepti inter C & c, quod proportionale eſt aëris denſitati z & altitudini ſtrati dx: eſt igitur $-dy = \frac{zdx}{n}$ ſeu $z = \frac{-ndy}{dx}$, quo valore ſubſtituto in æquatione $\left(y = \frac{cvvz}{aab}\right)$ habetur $y = \frac{cvv}{aab} \times \frac{-ndy}{dx}$ vel

$$-\frac{dy}{y} = \frac{aabdx}{ncvv}.$$

§. 27. Si ponatur velocitas particularum aërearum in omni altitudine eadem, nempe $= a$, fiet $\frac{-dy}{y} = \frac{bdx}{nc}$, vel, facta debita integratione, $log.\frac{c}{y} = \frac{bx}{nc}$; Iſtam vero hypotheſin non ſatis experimentis confirmari vidimus §. 24. Igitur alia tentata, poſui $v = \sqrt{(aa+mx)}$ vel $vv = aa+mx$, quæ lex eſt in motibus corporum libere cadentium: neque id ſine ſucceſſu; ita vero fit

$$\frac{-dy}{y} = \frac{aabdx}{naac+mncx}$$

$$\text{vel } log.\frac{c}{y} = \frac{aab}{mnc} log.\frac{aa+mx}{aa}.$$

In hac æquatione paullo generaliori in qua m & n etiamnum arbitrariæ ſunt, porro periculum feci, num non poſſet poni $\frac{a}{m}\frac{a}{n}\frac{b}{c} = 1$, atque id etiam apte fieri vidi: ſic vero obtinui

$$log.\frac{c}{y} = log.\frac{aa+mx}{aa} \text{ vel } \frac{c}{y} = \frac{aa+mx}{aa} \text{ aut } \frac{y}{c} = \frac{aa}{aa+mx}.$$

In-

Indicat ista hypothesis esse elasticitates aeris ubique in ratione reciproca quadrata velocitatum, quibus particulæ aëreæ agitantur, sive esse CR ad BQ ut BF^2 ad CG^2, atque cum EFH ex hypothesi parabola est super axe AD verticem habens infra punctum B ad distantiam $\frac{aa}{m}$, sequitur esse curvam PQS hyperbolam; Dictam vero distantiam $\frac{aa}{m}$ sumendam esse $=$ 22000 pedum animadverti, ut observationibus §. 23. proxime satisfiat. Inde talis jam prodit æquatio specifica

$$\frac{y}{c} = \frac{22000}{22000+x}.$$

Pro curva vero LMO invenitur $\frac{z}{b} =$ (per §. 26.) $\frac{aay}{cvv}$, seu

(quia $\frac{aa}{vv} = \frac{22000}{22000+x} = \frac{y}{c}$) prodit post hanc substitutionem

$$\frac{z}{b} = \left(\frac{22000}{22000+x}\right)^2.$$

§. 28. Ut appareat, quousque hypothesis nostra conveniat cum experimentis §. 23. ponemus in æquatione pro elasticitatibus succesive pro x, 1070; 1542; 13158, & 65; ita invenitur *respective* $\frac{y}{c} = 0,9536$; $\frac{y}{c} = 0,9345$; $\frac{y}{c} = 0,6257$, atque $\frac{y}{c} = 0,99705$: observationes autem indicant $\frac{y}{c} = 0,9520$; $\frac{y}{c} = 0,9364$; $\frac{y}{c} = 0,6257$, atque $\frac{y}{c} = 0,9970$. Observatio tertia aliis hypothesibus inimicissima cum nostra plane conspirat, nec reliquæ plusquam 0,0019 particulis dissentiunt, quæ in altitudine barometri tres quintas unius lineæ partes valent. Nemo autem qui expertus fuerit, quam vagæ & parum inter se consentientes fuerint observationes barometricæ, tantillam differentiam admodum curabit. Ipse interim hanc rem non aliter quam hypothesin precariam considero, neque aliam ob causam calculum §§. 26. & 27. præmisi, quam ut rationem darem, quâ fieri possit ut altitudines verticales non respondeant logarithmis altitudinum barometricarum, prouti deberet fieri, si per totam atmosphæram uniformis esset calor: instituto enim calculo factaque comparatione ejus cum experimentis mihi videre visus sum, non posse rem hanc à

diverſa particularum aërearum gravitatione in diverſis à centro terræ diſtantiis ſufficienter explicari, prouti Newtonus tentavit ſtatuendo gravitationes harum particularum decreſcere in ratione quadrata diſtantiarum à centro terræ, quæ hypotheſis in altitudinibus 13000 pedes *Pariſ.* non excurrentibus ſenſibilem differentiam non efficit ab hypotheſi uniformis gravitationis. Similiter ego aliquando incidi in opinionem auctam vim centrifugam particularum aërearum in majoribus altitudinibus aliquid hic contribuere poſſe; at pariter inſtituto calculo opinioni huic non amplius adhæſi. Interim non puto, abſurdum eſſe, ſi dicamus calorem aëris medium eo majorem eſſe, quo magis à ſuperficie maris diſtet. Velim autem ut probe notetur, hic ſermonem eſſe de calore *medio* in libera atmoſphæra: ſic enim fieri poteſt, ut calor realis quidem in montibus non creſcat ex cauſis aliis, nec tamen inde hypotheſis evertatur, quandoquidem §. §. 15. & 16. jam demonſtratum fuerit, pondus columnæ mercurii in barometro non præciſe cenſendum eſſe æquale ponderi columnæ aëreæ in illa regione ſumtæ, ſed ponderi medio omnium columnarum terræ inſiſtentium: De diverſis denſitatibus itaque ſic ſentio.

§. 29. Si æqualis eſſet ubique calor, forent utique denſitates elaſticitatibus ad ſenſus proportionales, reſponderentque altitudines verticales logarithmis altitudinum barometricarum: At vero id experimentis repugnare pono: neque tamen crediderim in duobus locis parum à ſe invicem diſſitis notabilem intercedere poſſe caloris differentiam, quia calor in corpore rariore ut eſt aër, mox uniformiter diſtribuitur, niſi perpetua adſit cauſa, quæ aërem vicinum calefaciat.

Alia autem res eſt in locis remotioribus, nec enim abſurdum puto aërem vel decies denſiorem ſtatuere ſub polis, quam ſub æquatore, ſi modo aër utrobique accipiatur ſuperficiei terræ proximus; at in magnis altitudinibus minor utique erit differentia inter denſitatem aëris qui polis & ejus qui æquatori reſpondet cæteris paribus, & propterea inæqualiter admodum decreſcent à ſuperficie terræ denſitates aëris & multo magis decreſcent ſub polis quam ſub æquatore: hoc igitur modo fieri poſſet, ut ſub polis denſitates aëris reales in parvis altitudinibus v. gr. decreſcant in ratione ut $(22000+x)^4$ ad 22000^4 ob auctum calorem, & ſub æquatore vix ſenſibiliter decreſcant, ob diminutum calorem, quæ caloris diminutio prope æquatorem con-

confirmatur ex eo quod culmen montis Pici per decem fere menſium ſpatium ſit nive obtectum, dum in ipſa Teneriffæ inſula nunquam ut ferunt ningit. Igitur non abſurde denſitates mediæ cenſeri poſſunt diminui in ratione ut $(22000+x)^2$ ad 22000^2, ut §. 27. aſſumtum fuit; dum elaſticitates ubique decreſcant in ratione ut $22000+x$ ad 22000; neque enim hæ in iisdem à ſuperficie terræ altitudinibus differre poſſunt, niſi à cauſis fortuito ſupervenientibus & parum durantibus.

§. 30. In terris, quæ intra quadrageſimum & ſexageſimum latitudinis gradum continentur, probabile eſt denſitates in eadem proxime ratione decreſcere qua elaſticitates; hancque ob rationem volui periculum facere, quænam inde refractionum theoria oriatur, qua de re nunc quædam adjiciam.

Digreſsio de refractione radiorum per atmoſphæram transeuntium.

(α) Proprietas eſt notiſſima radiorum ex uno medio in aliud incidentium eaque innumeris experimentis confirmata, quod angulus incidentiæ ad angulum refractionis conſtantem ſervat rationem: præterea etiam patet, ſi refractio fiat infinite parva, id eſt, ſi differentia utriusque ſinus rationem habeat infinite parvam ad alterutrum ſinum, fore ut ſinus anguli, qui intercipitur inter radium incidentiæ prolongatum & radium refractum, eandem habeat rationem ad ſinum totum, quam habet differentia ſinuum angulorum incidentiæ & refractionis ad coſinum anguli incidentiæ. Illum vero, quem modo allegavi, angulum interceptum inter radium incidentiæ prolongatum & radium refractum, deinceps vocabo *angulum refractionis differentialem.* Exinde ſequitur, quod ſit cæteris paribus ſinus *anguli refractionis differentialis* proportionalis ſinui anguli incidentiæ diviſo per coſinum ejusdem anguli.

(β) Experimenta porro docent, ſi radius ex aëre in aërem diverſæ ab altero denſitatis incidat, eſſe *angulum refractionis differentialem* cæteris paribus differentiæ denſitatum proportionalem.

Experimenta autem hanc in rem, quantum fieri poteſt, ſumta fuerunt à D. Hauksbée, accuratiſſime, tum de aëre admodum condenſato, tum

etiam de aëre rariſſimo, qui tandem pro nullo haberi poterat: modus quo inſtituta fuerunt deſcribitur in *transactionibus Anglicanis*: Succeſſus autem omnium experimentorum huc redit, ut arguant fuiſſe ſinum *anguli refractionis differentialis* ad ſinum totum ut $5\frac{1}{8}$ pollices ad 2588. pedes, cum radius incideret ex aëre naturali in ſpatium ab aëre vacuum ſub angulo triginta duorum graduum, id eſt, ut 1 ad 6060 & iisdem poſitis, mutato angulo triginta duorum graduum in ſemirectum, ut 1 ad 3787 (per §. α). Inde deducitur, ſi radius ex *aëre naturali* in vacuum ſub angulo quocunque incidat, eſſe ſinum anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis ut 3787 ad 3786.

Neutonus loco hujus rationis aſſumit in *tract.* ſuo *optico* illam, quæ eſt inter 3201 & 3200, eamque deducit ex refractionum quantitate ab Aſtronomis obſervata: ſtatuit autem quantitatem refractionis eandem eſſe, ſi ſtrata radium refringentia ſint parallela, in quacunque cæterum ratione denſitates medii decreſcant, ſi modo in primo & ultimo ſtrato denſitatum differentia eadem maneat (vid. *Neut. tract. opt. pag.* 321. *edit. gall.*). De reliquo ſub diverſis circumſtantiis non poteſt non admodum eſſe variabilis refractio, quod aër, quem vocamus naturalem, multis mutationibus ſit obnoxius, tum à calore & frigore, tum à preſſione atmoſphæræ, quæ ambo concurrunt ad denſitatem aëris formandam, cui denſitati refractiones radiorum in vacuum incidentium ſunt proportionales cæteris paribus. Eadem etiam monuit D. Hauksbée in recenſione experimentorum, quæ modo allegavimus, eamque ob rationem ſtatum aëris, qui erat, cum experimenta ſumeret, probe definivit.

Fig. 60. (γ) Fuerit nunc A C (Fig. 60.) arcus circuli terreſtris centro B ductus, in cujus plano radius luminis A G eſt: erit autem iſte radius incurvatus A G ejus indolis, ut convergat ad aſymptoton, huicque aſymptotæ parallela putetur A H; ducatur horizontalis A E, rectaque A F quæ tangat in A curvam A G. Ita videmus fore angulum H A E menſuram altitudinis aſtri veræ, & angulum F A E menſuram altitudinis apparentis, angulumque F A H fore angulum refractionis: eſt autem angulus F A H idem quod ſumma omnium *angulorum refractionis differentialium*, ſeu augulorum contactus qualis eſt angulus *c b o*.

Conſiderentur duo elementa curvæ *a b*, *b o*, & per puncta *a*, *b*, *o*, ducti inteligantur centro communi B arcus $\alpha\alpha$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}$, $\gamma\gamma$: ſitque denſitas aëris

aëris $\alpha\alpha\,\zeta\zeta = D$; denſitas aëris $\zeta\zeta\gamma\gamma = D - dD$, erit (per §. §. α, ζ) ſinus anguli contactus in b diviſus per ſinum totum, ſeu ipſe angulus contactus proportionalis differentiæ denſitatum dD multiplicatæ per rationem ſinuum angulorum incidentiæ & refractionis, id eſt, multiplicatæ per $\frac{be}{eo}$. Si vero ducatur B D perpendicularis ad F A productam, perſpicuum eſt, vix differre $\frac{be}{eo}$ & $\frac{BD}{Do}$, ideo quod radius fere ſit rectus ſicque poſſit triangulum B D o pro rectilineo haberi & ſimili cum triangulo beo. Igitur erit angulus quæſitus F A H proportionalis $\int \frac{BD}{Do} \times dD$.

(δ) Hiſce veſtigiis inſiſtendo ponendoque eſſe ubique denſitatem $D = \frac{22000}{22000+x} G$, ubi x exprimit lineam na numero pedum Pariſinorum & G denotat denſitatem aëris in loco obſervationis, inveni quod ſequitur. Sit ſinus altitudinis aſtri apparentis $= f$, coſinus $= F$, radius terræ $= r$ numero pedum Pariſinorum exprimendus: indicetur numerus 22000 per a: ponatur porro ſinus totus $= 1$, *angulus refractionis differentialis* pro radio ex aëre naturali in vacuum ſub angulo ſemirecto incidentis $= g$: Denique brevitatis ergo fiat $2r - 2a = \alpha$; $-FFrr + 2ar - aa = \zeta$: & erit ζ aut numerus affirmativus aut negativus; affirmativus erit, ſi altitudo apparens ſideris parva fuerit & quidem infra 2°, 44′: ſecus erit negativus: In priori caſu obtinebitur angulus quæſitus F A H hunc in modum: Fiat nempe ſemicirculus M L F (Fig. 61.) cujus radius A M $= 1$: ſumatur A C $= \frac{\alpha}{2fr}$; Fig. 61.

A B $= \frac{2\zeta - \alpha a}{2afr}$, ducanturque C D, B T ad M C perpendiculares & erit angulus F A H $= \frac{-fFrr}{2\zeta} g + \frac{far}{\zeta} g + \frac{far\alpha \times DT}{2\zeta\sqrt{\zeta}} g$.

In caſu, quo ζ eſt negativus, erit idem angulus

F A H $= \frac{-far}{\zeta} g + \frac{fFrr}{\zeta} g + \frac{far\alpha}{2\zeta\sqrt{\zeta}} g \times log. \frac{(\alpha - 2\sqrt{\zeta}) \times (Fr - a + \sqrt{\zeta})}{(\alpha + 2\sqrt{\zeta}) \times (Fr - a - \sqrt{\zeta})}$.

(ε) Secundum iſtas hypotheſes ponendo pro radio terræ 19600000, poterit pro omni altitudine ſideris apparentis ejus determinari refractio aſtronomica, ſi bene experimento inventus fuerit valor anguli g: quia vero difficile admodum eſt hunc valorem cum ſufficiente accuratione definire, conſultius erit

erit in casu aliquo particulari astronomice refractionem definire, & ex hoc reliquos calculo subducere. Assumamus v. gr. in altitudine decem graduum refractionem esse 5 *min.* 28 *sec.* cui hypothesi plerique Astronomi Parisiis adhærent. Inveniemus hancce refractionis tabulam.

altit. sid. appar.	refract.	altit. sid. appar.	refract.
0 *grad.*	34 *min.* 53 *sec.*	50 *grad.*	0 *min.* 53 *sec.*
5	9 - - - - 59 - -	55	- - - - - 44½
10	5 - - - - 28 - -	60	- - - - - 36½
15	3 - - - - 44 - -	65	- - - - - 29½
20	2 - - - - 52 - -	70	- - - - - 23
25	2 - - - - 12 - -	75	- - - - - 17
30	1 - - - - 47 - -	80	- - - - - 11¼
35	1 - - - - 29 - -	85	- - - - - - 5½
40	1 - - - - 15 - -	90	- - - - - - 0.
45	1 - - - - - 3 - -		

Quia vero refractiones sequuntur rationem litteræ g, id est, *anguli refractionis differentialis* radii sub angulo semirecto ex aëre naturali in vacuum incidentis & quia iste angulus proportionalis est densitati aëris naturalis, seu aëris, quem observator respirat, patet si vel aër constanter similiter vaporibus esset oneratus (à quibus animum adhuc abstraximus) non posse tamen fieri, quin refractiones astronomicæ sint admodum variabiles. Majores nempe erunt in superficie maris quam in montibus, eritque notabilis differentia vel in mediocribus montium altitudinibus : majores præterea erunt tempore frigido quam calido, hæcque sola causa in hisce terris refractiones minimum quarta parte augere potest : denique majores etiam erunt refractiones barometro alto quam humili. Poterunt autem si vapores nullo sint obstaculo, refractiones omni tempore recte definiri, si instrumentum, quod §. 9. descriptum fuit quodque Fig. 57. repræsentat simul adhibeatur cum barometro; si enim altitudinem mercurii in barometro dividas per altitudinem mercurii in altero instrumento, habebis densitatem aëris, cui cæteris paribus refractio proportionalis est facienda. Neque dubito, quin refractio solis minor sit refractionibus reliquorum siderum, quod calor solis aërem non mediocriter expandit aërisque densitatem diminuit.

§. 31. Ex iis quæ de agitatione particularum aërearum, à quâ utique calor aëris pendet, præsertim vero, quæ §. 10. monita fuerunt, apparet gradum eundem caloris aëri inesse, quoties eadem ratio intercedit inter ejus elasticitatem atque densitatem; elasticitatem indicat barometrum; densitatem concludimus ex gravitate aëris specifica; atque inde ut vidimus §. 10, gradus obtineri poterit caloris fixus, si aquæ bullientis calor incertus videatur, prouti D°. Fahrenheid observatus fuit pendere à pondere atmosphæræ incumbentis. Instrumenta quæ singulis momentis densitatem aëris indicant facile excogitari possunt atque à multis descripta fuerunt.

Notandum hic est rationem illam modo dictam inter aëris elasticitatem ejusque densitatem simul exhibere altitudinem aëris homogenei, & quia nobis deinceps sermo erit de ista altitudine, convenit illam recte prius definire, quam ad alia pergamus.

§. 32. Si fingamus columnam aëream verticalem uniformis densitatis & cum mercurio barometri ad æquilibrium compositam, erit altitudo illius columnæ *altitudo* quam voco *aëris homogenei* pro data densitate.

Et quia aëris mediocriter densi gravitas specifica est ad gravitatem specificam mercurii ut 1 ad 11000 ipsaque altitudo media mercurii in barometro pro locis parum à superficie maris elevatis sit $2\frac{1}{4}$ ped. *Paris.* erit altitudo aëris homogenei mediocriter densi 25666 pedum.

Patet ex ista definitione altitudines illas, de quibus nunc dicimus, eo minores esse, quo densior est aër, cui altitudo respondere debet, & quo minor est altitudo mercurii in barometro. Igitur si idem sit caloris gradus in montibus & in superficie maris, eadem quoque erit utrobique altitudo aëris homogenei, quia pro eodem caloris gradu aëris densitas rationem sequitur aëris elasticitatis seu altitudinis mercurii in barometro. Apparet porro altitudinem aëris homogenei in superficie maris admodum decrescere ab æquatore versus polos, quia frigus intenditur densitasque aëris augetur manente elasticitate & in iisdem regionibus minorem esse tempore hyemali quam æstivo.

§. 33. Multa sunt quæ ad motum aëris definiendum pertinent, quorum solutio pendet ab altitudine aëris homogenei: Inter hæc etiam est propagatio soni ejusque celeritas: Quamvis enim celeritas soni diversimode definiatur

niatur à diverſis, quos concipere poſſumus de ejus propagatione modis ita, ut nunc videatur celeritatem eam eſſe quæ debeatur altitudini aëris homogenei, nunc quæ dimidiæ altitudini reſpondeat, aut etiam dimidiæ altitudini multiplicatæ per rationem quadrati circulo circumſcripti ad aream circuli, omnes tamen opiniones in eo conveniunt, quod celeritas ſoni proportionalis ſit radici altitudinis aëris homogenei cum eo, in quo propagatur. Si ita ſe res habeat, celerius propagatur ſonus in aëre calido quam frigido, barometro alto quam humili, (nihil dicam de ventis ſecundis aut contrariis); multa in hanc rem partim in Italia partim in Anglia ſumta fuerunt experimenta, hæcque poſteriora docuerunt celeritatem ſoni mediam reſpondere 1140 ped. *Angl.* intra minutum ſecundum perficiendis. At quia in uno eodemque loco variabilis eſt altitudo atmoſphæræ homogeneæ nominatimque hic locorum excurrit à mutationibus barometricis junctis cum mutationibus caloris à 3 uſque ad 4, variabilis erit ubique celeritas ſoni, ſi vel nihil mutent venti, eaque celeritas in hiſce terris continebitur intra terminos $\sqrt{3}$ & $\sqrt{4}$, ſeu 173 & 200.

§. 34. Venio jam ad varias quæ fingi poſſunt de motu aëris quæſtiones ſolvendas ſimiles illis, quas de motu fluidorum non elaſticorum in præcedentibus habuimus.

Problema.

Sit motus definiendus aëris ex vaſe per foramen exiguum erumpentis in ſpatium infinitum ab aëre vacuum.

Solutio.

Apparet ex natura quæſtionis inſenſibilem eſſe motum localem aëris interni quo ſeſe expandit, dum certa ſui quantitas per foramen erumpit: Igitur hic ſolus *aſcenſus potentialis*, quem particula aërea, dum expellitur, acquirit conſiderandus eſt, atque comparandus cum *deſcenſu actuali* vel potius cum diminutione elaſticitatis, quam aër internus habet. Ut vero totam rem ad methodum noſtram pro fluidis non elaſticis adhibitam reducamus, conſiderabimus cylindrum verticalem communis cum vaſe propoſito amplitudinis atque tantæ altitudinis, quanta eſt altitudo aëris homogenei cum aëre interno, is vero cylindrus, ſi ſimili aëre plenus cenſeatur, ſed non elaſtico, eadem velocitate

tatè ſuo pondere aërem infimum expellet per foramen, qua aër in vaſe propoſito ſua elaſticitate ſe ipſum expellit. In priori autem caſu ejicitur velocitate quæ debetur ipſi altitudini cylindri, ergo & in poſteriori. Notandum autem eſt, altitudinem quam pro cylindro finximus, perpetuo eandem eſſe, quia aëris elaſticitas & denſitas in eadem ratione diminuuntur, calorem autem non mutari ponimus. Igitur ſi altitudo aëris homogenei (quæ à calore aëris interni pendet) dicatur A, effluet aër conſtanter velocitate $\sqrt{A}$. Nec tamen, quod calculus oſtendit, vas ipſum unquam evacuatur, quia aër effluens fit continue rarior, quod ut æquatione comprehendamus, ponemus denſitatem ſeu quantitatem aëris à fluxus initio $= 1$; denſitatem ſeu quantitatem aëris poſt definitum tempus reſidui $= x$, tempusque ipſum $= t$, erit, quia velocitas conſtans eſt, $-dx = axdt$, ubi per a intelligitur quantitas conſtans definienda ex magnitudine vaſis, amplitudine foraminis & altitudine A: hinc $\frac{-dx}{x} = adt$ & $log. \frac{1}{x} = at$. reperitur autem valor coëfficientis a hoc modo. Quia poſitum à nobis fuit $-dx = axdt$; erit ab initio effluxus $-dx = adt$. Jam mutetur elementum primum $(-dx)$ in cylindrum foramini ceu baſi ſuperinſtructum; erit autem altitudo iſtius cylindruli $= -Ldx$, ſi L ſit altitudo cylindri ſuper eodem foramine extructi & communem cum vaſe propoſito capacitatem habentis: hæc porro longitudo $-Ldx$ illa eſt, quæ tempuſculo dt percurritur, & quia poni ſolet tempuſculum æquale ſpatio percurſo diviſo per velocitatem, erit hic $dt = \frac{-Ldx}{\sqrt{A}}$; ſubſtituatur iſte valor in æquatione $-dx = adt$ & habebitur $-dx = \frac{-aLdx}{\sqrt{A}}$, ſive $a = \frac{\sqrt{A}}{L}$. Eſt proinde æquatio finalis hæc:

$$log. \frac{1}{x} = \frac{t\sqrt{A}}{L}.$$

Si tempus exprimere lubeat per certum minutorum ſecundorum numerum, quem vocabimus n, & intelligatur per s ſpatium quod mobile abſolvit cadendo libere à quiete intra unum minutum ſecundum, erit ponendum $t = 2n\sqrt{s}$, ſicque fiet

$$log. \frac{1}{x} = \frac{2n\sqrt{As}}{L}.$$

Problema.

§. 35. Quæritur motus aëris denſioris in aërem extérnum raríorem infinitum ex vaſe per foramen valde parvum erumpentis, poſito in utroque aëre eodem caloris gradu.

Solutio.

Sit denſitas aëris interni initialis $=$ D; denſitas aëris externi $= \delta$: denſitas aëris interni poſt datum tempus t reſidui $= x$, altitudo aëris homogenei, (ſive ratione aëris interni ſive externi, nec enim diverſa eſſe poteſt, ſi uterque aër eodem calore præditus ſit, ſicque denſitates & elaſticitates in pari ratione decreſcant) $=$ A. Quæratur ubique altitudo aëris homogenei, qui habeat eandem preſſionem ſeu elaterem cum aëre externo & cujus denſitas eadem ſit cum aëre interno: hæc altitudo ab initio erit $\frac{\delta A}{D}$, & poſt tempus t erit $\frac{\delta A}{x}$. Patet autem velocitatem aëris erumpentis talem ubique fore, quæ reſpondeat differentiæ definitarum altitudinum A & $\frac{\delta A}{x}$; eſt itaque poſt tempus t velocitas aëris erumpentis $= \sqrt{\left(A - \frac{\delta A}{x}\right)}$.

Sunt porro decrementa denſitatum $(-dx)$ proportionalia quantitatibus aëris erumpentis, quæ rationem habent compoſitam ex velocitate $\left(\sqrt{\left(A - \frac{\delta A}{x}\right)}\right)$ ex denſitate (x) & ex tempuſculo (dt): ſic igitur eſt $-dx = a\left(\sqrt{\left(A - \frac{\delta A}{x}\right)}\right) x\,dt$, ubi a eſt numerus conſtans qui per methodum præcedentis paragraphi fit $= \frac{1}{L}$, retenta ſignificatione hujus litteræ ibidem adhibita; hocque valore ſubſtituto oritur

$$-dx = \frac{dt}{L} \times \sqrt{(A x x - \delta A x)} \text{ ſeu } \frac{-dx}{\sqrt{(x x - \delta x)}} = \frac{dt\sqrt{A}}{L}:$$

Factaque debita integratione fit:

$$\log. \frac{[\sqrt{x} - \sqrt{(x-\delta)}] \times [\sqrt{D} + \sqrt{(D-\delta)}]}{[\sqrt{x} + \sqrt{(x-\delta)}] \times [\sqrt{D} - \sqrt{(D-\delta)}]} = \frac{t\sqrt{A}}{L},$$ aut poſito rurſus, ut in præcedente paragragho, $t = 2n\sqrt{s}$, erit

log.

$$log. \frac{[\sqrt{x}-\sqrt{(x-\delta)}]\times[\sqrt{D}+\sqrt{(D-\delta)}]}{[\sqrt{x}+\sqrt{(x-\delta)}]\times[\sqrt{D}-\sqrt{(D-\delta)}]} = \frac{2n\sqrt{As}}{L}$$

Corollarium 1.

§. 36. Omnis effluxus fit tempore finito quâ in re ista quæstio ab altera præcedente differt: Cessat autem aër effluere, cum est $x = \delta$, & tunc fit $n = \frac{L}{2\sqrt{As}} \times log. \frac{\sqrt{D}+\sqrt{(D-\delta)}}{\sqrt{D}-\sqrt{(D-\delta)}}$.

Sit v. gr. $A = 26000$ *ped. Paris.* contineat vas propositum unum pedem cubicum, foramen autem habeat amplitudinem unius lineæ quadratæ, erit $L = 20736$; ponatur insuper aërem internum ab initio duplo fuisse densiorem externo; est autem ut constat $s = 15\frac{1}{12}$ *ped. Paris.* Fiet igitur

$$n = \frac{20736\sqrt{3}}{\sqrt{(181.26000)}} log. \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 29,2,$$

quod significat aërem utrumque ad æquilibrium compositum iri tempore paullo majori quam viginti novem minutorum secundorum, post idque omnem effluxum cessaturum. Fieri autem potest à contractione, quam fluida præ foramine patiuntur (*vid. sect. IV.*) & ad quam nullam fecimus in computo attentionem, ut tempus istud augeatur fere in in ratione ut 1 ad $\sqrt{2}$.

Corollarium 2.

§. 37. Si fingatur aërem non immediate per foramen effluere, sed per longum tubum, non mutabitur propterea velocitas, si modo totius tubi capacitas sit veluti infinite parva ratione capacitatis, quæ in vase ipso est; Videtur autem densitatem aëris, quamdiu in tubo est, eandem esse cum densitate aëris vasi inclusi, nec tamen, quod demonstrabo inferius, elasticitas aëris in tubo major est elasticitate aëris externi, qui tubum circumdat. Consequens inde est, ventum aërem esse densiorem aëre quiescente, sed non magis elasticum: attamen densitatum differentia parvula quoque erit; ventus enim, qui vel 30. pedes singulis minutis secundis conficit, aërem vicinum, æque calidum & quietum, vix una millesima septingentissima parte densitate superabit.

Problema.

§. 38. Definire influxum aëris per foramen valde parvum in vas aëre rariore plenum, posito rursus utrobique eodem caloris gradu.

Solutio.

Fuerit vas ab initio omnino vacuum, & poſt tempus t ponatur denſitas aëris interni $= x$; ſic reperietur iiſdem fere veſtigiis inſiſtendo, quibus in trigeſimo quinto paragrapho uſi ſumus retentisque iisdem denominationibus $\frac{dx}{\sqrt{(\delta - x)}} = \frac{dt\sqrt{AD}}{L}$ ſive $t = 2n\sqrt{s} = \frac{2L}{\sqrt{A}} - \frac{2L\sqrt{(D-x)}}{\sqrt{AD}}$.

Numerus igitur minutorum ſecundorum, quo totum vas impletur, donec inter utrumque aërem æquilibrium ſit exprimitur per $\frac{L}{\sqrt{As}}$: & eſt tempus repletionis duplum illius quo repleretur ſi velocitate initiali conſtanter influeret aër. In caſu quo capacitas vaſis pedem cubicum continet & foramen lineam quadratam æquat, fit repletio tempore propemodum triginta trium minutorum ſecundorum, niſi contractione venæ aëreæ influentis repletio retardetur.

§. 39. Expoſuimus varias fluidorum elaſticorum ſive motorum ſive quieſcentium proprietates: Unum ſupereſt non omittendum, quo fluida elaſtica differunt à non-elaſticis, hoc ſcilicet, quod fluido elaſtico vel quieſcenti *vis viva* inſita ſit, non quod inſtar aliorum corporum motorum ſe ad certam altitudinem elevare poſſit, neque enim motum localem in illo hic conſideramus, ſed quod elatere ſuo talem aſcenſum in aliis corporibus gravibus generare poſſit. Licebit autem, quod ſpero, in ſequentibus uti vocabulo *vis vivæ corpori elaſtico compreſſo inſitæ*, quando nihil aliud eo intelligitur quam *aſcenſus potentialis*, quem corpus elaſticum aliis corporibus communicare poteſt priuſquam totam ſuam vim elaſticam perdiderit.

Meretur hic in anteceſſum notari, quod ſicut deſcenſus corporis dati per datam altitudinem, utcunque fiat, eandem conſtanter vim vivam in corpore producit, ita quoque elaſtrum ſive fluidum elaſticum poſtquam à dato tenſionis ſeu condenſationis gradu ad datum alium gradum fuit reductum utcunque, id ſemper eandem vim vivam in ſe recipiat rurſuſque contraria mutatione alii corpori communicare poſſit.

De hujuſmodi viribus vivis fluido elaſtico compreſſo inſitis earundemque menſuris paucis nunc agam: dignum attentione argumentum eſt, quod eo reducantur menſuræ virium prò machinis aëre, aut igne aut aliis hujuſmodi

di viribus motricibus, quarum fortaſſe plures novæ non ſine inſigni mechanicæ practicæ incremento & perfectione excogitari poterunt, movendis.

§. 40. Ut incipiamus ab aëre in vacuo, conſiderabimus cylindrum verticaliter poſitum ABCD (Fig. 62.) cum ſuſtentaculo EF, quod omni pondere deſtitutum liberrime ſurſum deorſumque moveri poſſit. Sit ſpatio EBCF aër incluſus, totus autem cylindrus in vacuo poſitus fingatur: Sit preſſio aëris EBCF tanta qua ſuſtinere poſſit pondus p, quod æquale erit preſſioni columnæ atmoſphæræ, ſi aër iſte ſit naturalis. Superveniat jam aliud pondus P: ita fiet ut operculum deſcendat in GH motibuſque reciprocis ad puncta H & F agitetur. Ut motum definiamus, utemur hypotheſi ordinaria, quod preſſiones aëris cæteris paribus ſint denſitatibus proportionales. Fig. 62.

Fuerit itaque $FC = a$, $FH = x$; velocitas ſuſtentaculi in ſitu $GH = v$, erit preſſio, qua ſuſtentaculum GH ad ulteriorem deſcenſum urgetur $= P + p - \frac{a}{a-x}\,p$, huicque preſſioni æqualis cenſenda eſt vis, quæ pondus ſuſtentaculo incumbens animat; igitur ſi hanc vim dividas per maſſam habebis vim accelerantem, quæ multiplicata per tempuſculum ſeu per $\frac{dx}{v}$, dabit incrementum velocitatis dv, eſt itaque

$$dv = (P + p - \tfrac{ap}{a-x}) \times \tfrac{dx}{v} : (P+p), \text{ vel}$$

$$\tfrac{1}{2}(P+p)\,vv = (P+p)\,x - ap\,log.\,\tfrac{a}{a-x}.$$

Sed ex deſcenſu ponderis $(P+p)$ per altitudinem x generatur *vis viva potentialis* $(P+p)\,x$, & cum ſuſtentaculum eſt in ſitu GH, ineſt corpori $(P+p)$ *vis viva actualis* $\frac{1}{2}(P+p)\,vv$, id eſt, $(P+p)\,x - ap\,log.\,\frac{a}{a-x}$, quæ à priori deficit quantitate $ap\,log.\,\frac{a}{a-x}$, hæcque in compreſſionem aëris tranſiit.

Dico itaque *non poſſe aërem occupantem ſpatium* a *condenſari in ſpatium* $a - x$, *quin vis viva impendatur, quæ generatur ex deſcenſu ponderis* p *per altitudinem* a *log.* $\frac{a}{a-x}$ *quocunque modo illa compreſsio facta fuerit; poteſt autem modis fieri infinitis.* Iſtam vero regulam uno nunc alterove exemplo illuſtrabo.

Sit basis cylindri unius pedis quadrati, altitudo initialis FC duorum pedum: contineaturque in spatio BF aër qualis in superficie terræ medius esse solet, qui ferre possit superficie EF 2240 libras: ponatur $x = 1$, ut sic habeatur *vis viva*, qua duo pedes cubici aëris naturalis in spatium unius pedis cubici coërceri possunt in vacuo: eritque ista *vis viva* $= 2 \times 2240 \times log. 2 = 3105$, id est, talis quæ generatur lapsu libero corporis 3105 librarum per altitudinem unius pedis. Ergo & vicissim, si habeatur pes cubicus aëris naturali duplo densioris, poterit illius ope pondus elevari 3105 librarum ad altitudinem unius pedis in vacuo, dum aëris naturalis densitatem assumit.

Sit porro sub iisdem reliquis circumstantiis idem aër in spatium duplum, quam antea fuit, expansum, occupans nunc in cylindro altitudinem quatuor pedum, isque rursus condensetur in spatium unius pedis cubici, requiretur ad hanc compressionem *vis viva*, quæ exprimitur per 4×1120 *log.* 4, quæ priore duplo major est. Igitur in vacuo si habeatur pes cubicus aëris naturali duplo densioris, poterit illius ope pondus elevari 6210 librarum ad altitud. unius pedis, dum aëris naturalis dimidiam densitatem assumit, aut pondus 9315 lib. dum aëre naturali fit quadruplo rarior.

Consequens inde est, si aër in spatium expandere se possit infinitum & ubique elasticitatem servet densitati proportionalem, quantitati aëris finitæ vim vivam inesse infinitam.

§. 41. Hæc autem pertinent ad æstimationem vis vivæ, quæ aëri in vacuo posito insita sit: paullo alius fit computus pro aëre densiore, qui in atmosphæra positus est: hic enim maximus expansionis gradus non ultra æquilibrium cum aëre atmosphæræ extendi potest: facile hinc est in antecessum prævidere, si v. gr. habeatur pes cubicus aëris naturali duplo densioris, vim vivam quæ in atmosphæra ab hoc aëre compresso elici possit, minime esse infinitam. Poterunt autem hujusmodi vires vivæ hunc in modum determinari.

§. 42. Sit aër EBCF naturalis & in æquilibrio cum aëre externo; intelligatur autem per *p* pressio atmosphæræ, in sustentaculum EF, quæ quidem cum pressione aëris interni nondum condensati in æquilibrio est. Imponatur eidem sustentaculo pondus P; fuerit jam aër condensatus in spatium GBCH; habeatque sustentaculum pondere P oneratum in situ GH velocitatem *v*, erit retentis reliquis denominationibus

$dv =$

$$dv = (P + p - \frac{ap}{a-x}) \times \frac{dx}{v} : P, \text{ vel}$$

$$P\,v\,dv = (P - \frac{xp}{a-x})\,dx, \text{ quæ integrata dat}$$

$$\tfrac{1}{2} P\,vv = P\,x + p\,x - ap\,log.\,\frac{a}{a-x}.$$

Jam vero descensu ponderis P per altitudinem x genita fuit *vis viva* $P\,x$, de qua eidem ponderi ceu velocitate v moto inest pars $\frac{1}{2} P\,v\,v$ seu $P\,x + p\,x - ap\,log.\,\frac{a}{a-x}$; pars igitur vis vivæ quæ ad aërem transiit, est $= -p\,x + ap\,log.\,\frac{a}{a-x}$, quæ minor est altera §. 40. definita.

Habeatur v. gr. pes cubicus aëris naturali duplo densioris, invenietur vis viva, quam iste aër amittit, dum aëris naturalis circumfusi densitatem assumit, ea quæ lapsu libero corporis 865. lib. per altitudinem unius pedis generatur.

Pari sensu pes cubicus aëris naturali triplo densioris vim vivam habere intelligitur talem quæ respondeat lapsui libero corporis 2898 lib. per altitud. unius pedis, qui numerus nempe prodit cum ponitur $p = 2240$, ut §. 40; $a = 3$. & $x = 2$.

§. 43. Perspicuum est ex hoc consensu inter conservationem virium vivarum aëri compresso & corpori à data altitudine delapso insitarum, nullam esse ad usum machinarum perficiendum prærogativam sperandam ex principio aëris comprimendi, & ubique valere regulas in præcedente sectione exhibitas. Quia vero multis modis fit, ut aër non vi sed natura sit compressus aut elaterem naturali majorem acquirat, spes certe est, posse hujusmodi rebus naturalibus magna ad machinas movendas compendia excogitari, prouti D. Amontons jamjam docuit modum movendarum machinarum vi ignis. Mihi persuadeo si omnis vis viva, quæ in carbonum pede cubico latet, ex eodemque combustione elicitur, utiliter ad machinam movendam impendatur, quod plus inde profici possit, quam labore diurno octo aut decem hominum. Etenim carbones dum comburuntur aëris elasticitatem nonsolum insigniter augent, sed & ingentem aëris novi quantitatem generant.

Ita Halesius in *veget. statiks* deprehendit ex semipollice carbonis 180. polli-

pollices aëris ejuſdem cum aëre naturali elaſticitatis fuiſſe generatos; ergo pes cubicus carbonum aërem dabit ad 360. ped. cub. Sed ſi §. 41. quæratur vis viva quæ generari poſſit à pede cubico aëris naturali 360. vicibus denſioris, invenietur illam convenire cum pondere 3938000. librarum ab altitudine unius pedis delapſo: atque ſi præterea aëris illius elaſticitas à calore carbonum incenſorum quadruplo fieri major ponatur, conveniet iſta vis viva cum pondere 15752000. lib. ab eadem altitudine delapſo. Difficile autem eſt machinam ad hunc finem aptam excogitare. Multæ præterea aliæ ſunt res naturales, quæ non ſolum aërem fovent compreſſum, ſed & aërem circumfuſum calefaciendo eundem magis elaſticum reddere valent: tales ſunt calx viva cum aqua dulci miſta, omniaque fermentantia, aquæ in vapores vi ignis redactæ incredibilis vis ineſt; machina ad hoc eſt Londini ingenioſiſſima quæ hoc principio motus aquas toti urbi erogat eamque deſcripſit Cl. Weidlerus. Præſertim vero conſiderari meretur ſtupendus, qui à pulvere pyrio expectari poſſit effectus: Calculo enim quorundam ſumtorum experimentorum ſubducto, quem infra adjiciam, edoctus fui elaſticitatem pulveris pyrii accenſi plus decies millies ſuperare elaſticitatem aëris naturalis, imo omnibus bene perpenſis probabile fit, elaſticitatem ejus eſſe incredibiliter majorem: ponamus autem auræ pulveris pyrii accenſi expanſæ elaſticitatem decreſcere in ſimili ratione cum denſitate: hiſce poſitis invenietur vis viva pedi cubico pulveris pyrii inſita, ſi in §. 42. ponatur $a = 10000$; $x = 9999$, $p = 2240$ & ſumatur $-px + a\,plog.\frac{a}{a-x}$, quæ quantitas ſic fit æqualis 183913864. Igitur machina datur in theoria, quæ ope unius pedis cubici pulveris pyrii poſſit elevare 183913864 libras ad altitudinem unius pedis, quem laborem vel centum homines robuſtiſſimi intra unius diei ſpatium perficere poſſe non crediderim, quâcunque machina utantur. Probabile autem eſt, ut dixi, effectum pulveris pyrii longe majorem eſſe; certe autem non minor eſt, calculus enim innititur altitudini, ad quam globus ferreus ex tormento bellico ejectus in vacuo aſcendere poſſit, in quo experimentorum genere maxima pulveris pyrii pars perit.

Iſta vero magis percipientur, ſi notetur eundem calculum (quem antea fecimus pro effectu, qui ex aëre condenſato ſeſe reſtituente oritur, demonſtrando) procedere etiam pro aëre qui naturali circumfuſo non quidem magis denſus ſed tamen ab aucto calore magis elaſticus fit: ita v. gr. quoties pes cubicus aëris ordinarii augmento caloris duplum elaterem acquiſivit, po-

poteſt ejus ope pondus 865 librarum ad altitudinem unius pedis elevari, ſi modo machina adhibeatur perfectiſſima.

Ab auctis autem aëris tum denſitate tum calore pendent omnium rerum hic expoſitarum effectus.

§. 44. Interim non ſolum ab aëre condenſato calefactove vis viva pro machinis movendis impendenda obtineri poteſt, ſed & ab aëre rariore aut frigidiore. Ubicunque enim æquilibrium ſublatum eſt, *vis viva* adeſt, quæ impendi poteſt, ſi debita machina excogitetur, ad onera elevanda machinamentaque circumagenda. Methodus autem determinans *vim vivam*, quæ ab aëre datæ denſitatis datique caloris ſpatium datum occupante elici poteſt, mutatis mutandis eadem eſt cum illa quam §. 42. adhibuimus.

45. Fuerit nempe rurſus cylindrus verticalis ABCD (Fig. 63.) cum diaphragmate mobili EF: puta aërem EBCF, ut §. 42. naturalem & in æquilibrio cum aëre externo: preſſio autem aëris cujusvis in EF dicatur p: Finge dein pondus P, quod mediante fune trans duas trochleas M & N ducto cum diaphragmate cohæreat, idemque verſus AD trahat, perveneritque ſic diaphragma ex ſitu EF in GH: Denique ponatur rurſus $FC = a$, $FH = x$: velocitas diaphragmatis in ſitu GH ſeu ponderis in ſitu $P = v$; His poſitis ſi conferantur §. §. 40. & 42. patebit fore nunc Fig. 63.

$$dv = \left(P + \frac{ap}{a+x} - p\right) \times \frac{dx}{v} : P \text{ vel}$$

$$P v dv = \left(P - \frac{px}{a+x}\right) dx, \text{ quæ integrata dat}$$

$$\tfrac{1}{2} P v v = P x - p x + a p \log. \frac{a+x}{a}.$$

At rurſus deſcenſus ponderis P per altitudinem x producta fuit *vis viva* Px, dum ipſi interim ponderi velocitate v moto ineſt tantum *vis viva* $\frac{1}{2} P v v$ ſeu $Px - px + ap \log. \frac{a+x}{a}$, Igitur *vis viva*, quæ reſidua eſt, nempe $px - ap \log. \frac{a+x}{a}$, ad aërem tranſiit rurſusque reſtitutione æquilibrii inter aërem internum & externum, illa *vis viva* ad alia corpora pro lubitu transfundi poterit: Igitur ſi habeas ſpatium GBCH aëre plenum cujus denſitas ſit ad denſitatem aëris externi ut CF ad CH, in poteſtate erit *vis viva* $px - ap \log. \frac{a+x}{a}$.

An vero iſta vis viva aëri inhæreat proprie externo an interno, logomachia eſt; ſufficit quod à ſublato æquilibrio inter utrumque aërem talis vis viva obtineri poteſt, dum reſtitutio permittitur.

Habeatur v. gr. pes cubicus aëris naturali duplo rarioris, cui hypotheſi quadrabunt poſitiones $p = 2240$ lib. $a = \frac{1}{2}$ ped. & $x = \frac{1}{2}$ ped. & erit vis viva, de qua ſermo eſt, $= 1120 - 1120\ log.\ 2 = 344$, id eſt, ea quæ generatur lapſu libero 344 lib. ab altitudine unius pedis.

Si pes cubicus ſit aëre repletus, qui naturali ſit quadruplo rarior, erit jam vis viva quæſita (poſito nempe $p = 2240$, & $a = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$) $= 1680 - 560.\ log.\ 4 = 904$, ſeu talis quæ oritur lapſu libero ponderis 904 lib. per altit. unius pedis.

Si denique habeatur pes cubicus ab aëre omnino vacuus, ponendum eſt $p = 2240$; $a = 0$, & $x = 1$: atque ſic erit vis viva quæſita $= 2240 \times (1 - 0\ log.\ \frac{1}{0})$ conſtat autem eſſe $0\ log.\ \frac{1}{0}$ infinite parvum præ unitate; eſt igitur numerus iſte $= 2240$, qui indicat poſſe hac vi viva 2240 libras ad altitudinem unius pedis elevari.

§. 46. Pertinet ad præſens argumentum ſtupenda vis aëris admodum condenſati, ſed præſertim auræ pulveris pyrii accenſi in uſu ſclopetorum pneumaticorum & tormentorum bellicorum. De his quæ ſeorſim commentatus ſum huic ſectioni adjiciam.

De vi aëris condenſati & auræ pulveris pyrii accenſi ad globos projiciendos in uſu ſclopetorum pneumaticorum & tormentorum bellicorum.

Fig. 64. (I) Sit AG (Fig. 64.) longitudo animæ in tormento ſclopetove horizontaliter poſito, voceturque $= a$: denotet A C longitudinem ſpatii, quod aër condenſatus ſeu aura pulveris pyrii accenſi occupat ab initio exploſionis, ſitque $AC = b$: pondus globi ejiciendi $E = 1$; ponimus autem, globum cavitatem animæ exacte replere & liberrime in illa moveri: denſitas aëris condenſati in ſpatio A D ſe habeat ad denſitatem aëris naturalis ut n ad 1: Denique

que ponatur pondus columnæ mercurii (cujus baſis eſt CD & cujus altitudo eadem ſit quæ in barometro) = P. Utemur autem hypotheſi, ſive globus propellatur ab aëre condenſato ſive à pulveris pyrii aura, potentiam illius fluidi propellentis proportionalem eſſe denſitati.

His ad calculum præparatis, globum conſiderabimus in ſitu e, ponendo $Ac = x$, velocitatemque globi in hoc ſitu $= v$, ſic erit potentia globum in ſitu e propellens $= \left(\frac{nb}{x} - 1\right) \times P$, quæ diviſa per maſſam 1 ductaque in elementum ſpatii dx dat incrementum dimidium quadrati velocitatis; unde fit $v\,dv = \left(\frac{nb}{x} - 1\right) \times P\,dx$, ſive $\frac{1}{2} vv = \left(b - x + nb\ log.\ \frac{x}{b}\right) P$. Ponatur $x = a$, habetur altitudo debita velocitati, quacum globus exploditur; vocetur iſta altitudo α & erit

$$\alpha = \left(b - a + nb\ log.\ \frac{a}{b}\right) \times P.$$

(II) Sit v. gr. in ſclopeto pneumatico longitudo animæ ſeu $a = 3$ *ped. Paris.* longitudo $AC = 4$ *poll.* fueritque aër captus in AD naturali decies denſior ſeu $n = 10$, diameter animæ ſeu globuli ejiciendi trium linearum ejusque gravitas ſpecifica ratione mercurii ut 10 ad 17. Erit P præterpropter = 286; indeque invenitur $\alpha = 2788$, indicio globum ejectum iri velocitate qua in vacuo ad altitudinem 2788 *ped.* aſcendere poſſit. Ex præcedente formula colligitur jactum globi vehementiſſimum fore pro eadem auræ elaſticæ quantitate, ſi longitudo animæ fiat $= nb$. Si vero animus ad impedimenta alia, quæ globus præter inertiam ſuam & reſiſtentiam aëris externi in tranſitu ſuo per Sclopeti animam patitur, advertatur, apparet longitudinem animæ ad jactum vehementiſſimum producendum requiri longe minorem. Si longitudo nb admodum major ſit longitudine a, quod ita eſt in jactibus fortioribus, erit ſine ſenſibili errore $\alpha = nb\,P\ log.\ \frac{a}{b}$.

Si tormentum ſit verticaliter erectum, fit aliquantum diverſus calculus ſed pro vehementioribus jactibus differentia nequit eſſe ſenſibilis. Igitur quia jactus deinceps conſiderabimus tantum vehementiſſimos, brevitatis ergo ponemus $\alpha = nb\,P \times log.\ \frac{a}{b}$.

(III) Prouti in præcedentibus altitudinem determinavimus debitam ve-

locitati qua globus exploditur, ex data vi elaſtica auræ globum ejicientis, ita viciſſim patet, ex obſervata illa altitudine vim auræ elaſticam deduci poſſe, eſt enim

$$n = \alpha : \left(b \, P \, log. \, \frac{a}{b} \right).$$

Exinde poterit vis elaſtica pulveris pyrii ſi non accurate definiri, ſaltem ad terminos reduci, quos certe ſuperabit. At quæres, qui altitudo α experimento determinari poſſit; ad quod reſpondeo, poſſe eam ſat accurate colligi ex tempore, quod globus verticaliter ſurſum ejectus ab exploſionis puncto inſumit, dum in terram delabitur habita in calculo aëris reſiſtentiæ ratione. Tranſcribam huc experimenta in *comm. Acad. Petrop. tom. 2. p. p.* 338 & 339 recenſita, quorum calculum inſtitui factis, ratione aëris reſiſtentiæ hypotheſibus, gravitates ſpecificas ferri & aëris eſſe ut 7650 ad 1 & aërem, in quo globus aſcendit, uniformis eſſe denſitatis: gravitatum ſpecificarum ratio paullo major aſſumta fuiſſe videtur quam debebat, ſed compenſabitur in altiſſimis jactibus error à diminutione aëris denſitatum verſus ſuperiora.

„ Tormenti ſitus omni accuratione ad perpendiculum erat accommo-
„ datus & ſingulis vicibus in hunc ſitum reponebatur atque firmabatur: ſin-
„ gula experimenta fuerunt repetita: Erat autem longitudo animæ 7, 7. *ped.*
„ *angl.* diameter globi erat 0, 2375 *ped.* diameter animæ menſurata non fuit
„ neque magnitudo luminis accenſorii: qualibet vice ponderabatur quantitas
„ pulveris pyrii adhibiti & pendulo definiebatur tempus à puncto exploſionis
„ ad punctum, quo globus in terram cecidit: tabula ſequens exhibet, tum
„ quæ obſervata, tum quæ calculo inde eruta fuerunt.

quant. pulv. pyr. numero unciar. holl. expreſſ.	tempus aſc. & deſcens. in min. ſec. obſerv.	altit. jactus in aëre reſiſt. per calculum in ped. Angl.	temp. aſc. in aëre reſiſt. per calculum in min. ſec.	temp. deſc. in aëre reſiſt. per calculum in min. ſec.	altit. jactus in vacuo per calculum in ped. Angl.	temp. aſcenſ. & deſc. in vacuo per calc. in min. ſec.
I	II	III	IV	V	VI	VII
½	11	486	5, 42	5, 58	541	11, 6
2	34	4550	14, 37	19, 63	13694	58
4	45	7819	16, 84	28, 16	58750	121

„ Pro

„ Pro eodem tormento eodemque globo, ſed priori diminuto pede uno „ cum ſeptem decimis partibus, ſic ut longitudo animæ reſidua eſſet præciſe „ 6. *ped. Angl.* inſervit ſequens tabula eadem lege conſtructa.

I	II	III	IV	V	VI	VII
½	8	257	3 ,95	4 , 05	274	8 ,2
2	20, 5	1665	9 ,74	10, 76	2404	24, 5
4	28	3187	12, 5	15, 5	6604	40, 5
6	32, 5	4304	13, 9	18, 6	11810	54, 3
8	38	5643	15, 54	22, 46	22394	74

Multa ſunt, quæ ſucceſſum horum experimentorum ita reddunt dubium, ut nullum ſit, quod eandem auræ elaſticitatem arguat. Maximam ego inæqualitatem ex eo oriri crediderim; quod minima pars pulveris inflammetur ſtatim ab exploſionis initio, quod magna pars tum demum accendatur, cum globus orificio tormenti jam proximus eſt, & quod maxima denique pars non inflammata ejiciatur: facit fortaſſe hæc ſola ratio, ut vis elaſtica auræ globum propellentis ſit centies major, quam quæ vi experimenti, nulla habita iſtius rei ratione, prodit: id mihi valde probabile fit, ex eo quod adhibito in tormento 7, 7 *ped.* longo pulvere ad 4 uncias globus in vacuo jactu ſuo aſcendere potuerit ad altitudinem 58750 *ped.* cum eadem pulveris quantitate eodemque tormento ſed 1, 7 pede decurtato jactus reſponderit altitudini in vacuo 6604 pedum, quæ altitudo vix ultra nonam partem prioris excurrit: Ex comparatione utriusque experimenti conjicio, maximam pulveris quantitatem in tormento longiore inflammatam fuiſſe dum globus jamjam eſſet orificio proximus neque ab ipſo ultra 1, 7 *ped.* amplius diſtaret.

Diminuitur quoque jactus globi à magnitudine luminis accenſorii, ut & ab hiatu qui inter globum & internam animæ ſuperficiem relinquitur, per quod utrumque notabilis auræ pars inutilis avolat: tanta autem inde diminutio non oritur, quantam illam nondum poſito calculo præſumſeram: adjiciam tamen inſequentibus calculum, ut methodus habeatur vi pulveris pyrii longiſſimos ſtatuendi limites, quos etiamnum certe transgrediatur.

(IV) Quod maximam oſtendit auræ elaſticitatem eſt experimentum tertium cum tormento nondum decurtato ſumtum, quod indicat aſcendere potuiſſe globum accepto impetu ad altitudinem $\alpha = 58750$ *ped. Angl.* Erat autem longitudo animæ A G ſeu $a = 7,7$: longitudo A C (quantum ex amplitudine animæ & gravitate pulveris pyrii conjicio) erat $= 0,08$. Denique valor ipſius P (ſeu ponderis columnæ mercurialis, cujus baſis ſit circulus maximus globi & cujus altitudo ſit 30. *poll. Angl.* ratione ponderis globi ferri deſignati per unitatem) invenitur poſita gravitate ſpecifica inter mercurium & ferrum ut 17 ad $10 = 26,8$: Et cum per §. *III.* ſit proxime $n = \alpha : \left(b\,P \log. \frac{a}{b} \right)$ erit $n = 6004$. Unde ſequitur, ſi aura pulveris pyrii inflammati elaſticitatem habeat ſuæ denſitati proportionalem, eſſe illius maximam elaſticitatem minimum ſexies millies majorem elaſticitate aëris ordinarii.

(V) At vero ſi jam conſideremus partem auræ inutilem, quæ avolat per lumen accenſorium & hiatum à globo relictum, majorem elaſticitatem inveniemus : Calculus qui ad hanc quæſtionem ſolvendam requiritur, cum non parum prolixus atque intricatus ſit, non hæſitavi hypotheſes adhibere paullo liberiores, quibus admodum facilitatur : quamvis ipſæ hypotheſes non ſint omni rigore veræ, errorem tamen notabilem producere non poſſunt. *Primo* ponam utramque aperturam, per quam aura evolare poſſit, eſſe veluti infinite parvam ratione animæ amplitudinis; hoc poſito poterit ſingulis momentis velocitas, cum qua aura avolat, æſtimari immediate ex preſſione ſola : hujusmodi autem hypotheſin ſine ullo ſenſibili errore fieri poſſe pro omni fluido, tunc etiam cum foramina non ſunt admodum exigua, paſſim ut corollarium ex theoria noſtra deduximus, & multo facilius aſſumi poſſe in fluido valde elaſtico facile quisque videbit ex eo, quod incrementum *aſcenſus potentialis* ratione motus interni longe minus eſt ratione *aſcenſus potentialis* particulæ per foramen exilientis in fluido, quod à propria elaſticitate expellitur, quam quod gravitatis vi ejicitur : in priori enim minor eſt motus localis internus quam in altero. *Secundo* auræ pulveris pyrii inflammati vim elaſticam tantam eſſe, ut niſus atmoſphæræ contrarius attendi non mereatur : *tertio* velocitatem globi in tormento utut permagnam, tamen minimam cenſeri poſſe ratione velocitatis, qua aura per hiatum utrumque avolat, quia nempe inertia iſtius auræ non poteſt non admodum eſſe exigua ratione inertiæ

ertiæ quæ globo ineſt : vi iſtius hypotheſeos avolabit aura per utramque aperturam eadem velocitate , cum alias poſita velocitate in lumine accenſorio $= \sqrt{A}$, & velocitate globi $= v$, velocitas auræ in hiatu à globo ad ſuperficiem animæ relicto dicenda eſſet $= \sqrt{A} - v$. Venio nunc ad ſolutionem.

(VI) Primo notandum eſt, ſi elaſticitates auræ cenſeantur denſitatibus proportionales , fore ut aura conſtanter eadem velocitate per utramque aperturam avolet, uti vidimus in problemate §. 34. iſtaque velocitas nominatim talis erit , quæ generetur ab altitudine auræ homogeneæ , cujus pondus auram captam coërcere poſſit , ne ſe expandat. Igitur determinabitur dicta velocitas hoc modo : ſit gravitas globi $= 1$, elaſticitas ſeu pondus quod auram pulveris modo inflammati A C D B in illo compreſſionis ſtatu coërcere poſſit $= P$: pondus pulveris adhibiti $= p$; erit pondus auræ pulveris modo inflammati etiam $= p$: ſique longitudo A C ponitur $= b$, patet altitudinem auræ homogeneæ, quæ pondus P habeat, fore $= \frac{P}{p} b$; Igitur velocitas quacum aura recens nata per lumen accenſorium avolat eſt $= \sqrt{\left(\frac{P}{p} b\right)}$, eademque velocitate durante tota exploſione ejicietur, idque non ſolum per lumen accenſorium, ſed & proxime per hiatum inter globum & animam relictum.

(VII) Sit nunc porro amplitudo animæ $= F$; hiatus interceptus inter globum & animam $= f$: amplitudo luminis accenſorii $= \phi$: longitudo animæ $= a$, quantitas auræ ab initio exploſionis $= g$. Intelligatur deinde globus perveniſſe ex E in e, dicaturque A C $= x$: quantitas auræ eo temporis puncto in tormento reſidua $= z$: velocitas globi in iſto ſitu $= v$, reliquæ denominationes fuerunt jam antea explicatæ.

Quoniam elaſticitas per hypotheſin eſt directe ut quantitas & reciproce ut ſpatium, erit elaſticitas auræ in A c d B reſiduæ $= \frac{z\,b}{g\,x} P$: quæ quidem non tota in propellendum globum impenditur, ſed tantum pars ejus, quæ ſe habeat ad totam ut $F - f$ ad f. Eſt itaque poſito dt pro elemento temporis

$$dv = \frac{F-f}{F} \times \frac{z\,b}{g\,x} P \times dt.$$

Per methodum autem §. 34. exhibitam, ubi quantitas aëris dato tempuſculo effluens ſpecifice definita fuit, invenitur $-dz$

$$-dz = \frac{f+\phi}{F} \times \frac{z}{x} \times \sqrt{\left(\frac{P}{p} b\right)} x\,dt;$$

Ex comparatione harum duarum æquationum oritur

$$-dz = \frac{f+\phi}{F-f} \times \frac{g}{b} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{Pp}} \times dv,$$

quæ cum debitæ conſtantis additione integrata dat

$$z = g - \frac{f+\phi}{F-f} \times \frac{g}{b} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{Pp}} \times v.$$

Si jam in æquatione prima ſubſtituatur valor iſte inventus pro z, ſimulque ponatur $\frac{dx}{v}$ pro dt, fiet

$$v\,dv = \frac{F-f}{F} \times \frac{b}{x} \times P \times dx - \frac{f+\phi}{F} \times \frac{\sqrt{(bP)}}{x\sqrt{p}} \times v\,dx, \text{ ſive}$$

$$\frac{F v\,dv \sqrt{p}}{(F-f) \times bP\sqrt{p} - (f+\phi) \times v\sqrt{(bP)}} = \frac{dx}{x},$$

quæ æquatio poſt debitam ſui integrationem, facta $x = a$, abit in hanc

$$log.\ \frac{a}{b} = \left[-F(f+\phi) v\sqrt{p} - F(F-f) p\sqrt{(Pb)} \times log.\left(1 - \frac{(f+\phi) v}{(F-f)\sqrt{(bPp)}}\right)\right] :$$

$$(f+\phi)^2 \times \sqrt{Pb}.$$

(VIII) Si jam per experimentum innotuerit valor ipſius v, poterit inde deduci valor ipſius P, qui denotat elaſticitatem auræ pulveris pyrii nondum expanſæ: Quod ut exemplo illuſtremus, eodem utemur experimento, quod jam articulo IV. expoſuimus, ut appareat inde, quodnam ab avolatione auræ elaſticitatis augmentum arguat. Sic igitur ponetur calculus.

Quia pondus globi, quod erat trium librarum, indicavimus per unitatem, erunt quatuor unicæ pulveris adhibitæ exprimendæ per $\frac{1}{12}$: igitur $p = \frac{1}{12}$. Menſuras aperturarum, quas conſideramus, non accepi: ſolet autem hiatus à globo relictus conſtituere in ſimili tormento præterpropter partem decimam quintam amplitudinis animæ; amplitudinem luminis accenſorii hic fere negligi poſſe puto; itaque ſtatuam $F = 15$; $f = 1$; $\phi = 0$: Deinde habetur rurſus $a = 7,7$; $b = 0,08$; altitudo ad quam globus in vacuo aſcendere poſſit ſeu $\frac{1}{2} vv = 58750$, ſeu $v = 343$: Igitur æquatio ultima ſuperioris articuli hæc erit

$$log.\ 96 = \frac{-5251}{\sqrt{P}} + 17,5\ log.\ \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P-300}},$$

cui proxime ſatisfit cum ſumitur $\sqrt{P} = 534$ & proinde $P = 285156$, quod efficit pondus columnæ mercurialis ejusdem cum anima tormenti ampli-

plitudinis, cujus altitudo ſit plusquam 10000 vicibus major altitudine communi barometri, invenimus autem ſupra *art. IV.* numerum n (qui idem ſignificabat) $=$ 6004. Ergo jam tuto affirmabimus (ubique enim quæ negleximus majorem vim pulveri arguunt) ineſſe pulveri pyrio vim elaſticam, minimum decies millies majorem vi elaſtica aëris ordinarii. Apparet autem ſimul ex comparatione numerorum 10000 & 6004, quantum circiter vi pulveris decedat ab hiatibus ſæpe dictis. Equidem iſtud decrementum majus putaſſem: Confirmatus autem ſum hoc calculo in re de qua aliquando me certiorem voluit vir harum rerum gnarus, nullum nempe ſe in tormentis notabile obſervaſſe decrementum, cum lumen accenſorium diuturno uſu ſupra modum amplificatum eſſet in obſidio.

(IX) Verum ut ex æquatione noſtra quædam corollaria deduci poſſint faciliora quamvis proxime tantum vera, mutabimus quantitatem logarithmicalem in ſeriem. Eſt autem

$$-log.\left(1-\frac{(f+\phi)v}{(F-f)\sqrt{(bPp)}}\right)=\frac{(f+\phi)v}{(F-f)\sqrt{(bPp)}}$$

$$+\frac{(f+\phi)^2vv}{2(F-f)^2\times bPp}+\frac{(f+\phi)^3v^3}{3(F-f)^3\times bPp\sqrt{(bPp)}}+\&c.$$

Iſtoque valore ſubſtituto in æquatione ultima *art.* (*VII*) fit

$$log.\frac{a}{b}=\frac{Fvv}{2(F-f).bP}+\frac{F.(f+\phi)v^3}{3.(F-f)^2bP\sqrt{(bPp)}}+\&c.$$

Notabimus hic iſtam æquationem perfecte convenire cum æquatione ultima *art.* (*II*) ſi aperturæ f & ϕ ponantur $=o$: quod enim hic indicatur per $\frac{1}{2}vv$ & n P ibi eſt α & P, convenientibus denominationibus reliquis.

(X) Ut appareat, quantum proxime altitudo jactus ab aperturis diminuatur, ſi iſtæ aperturæ ſint minimæ, inſerviet hæc æquatio. Intelligatur per α altitudo ad quam globus pervenire poſſit in vacuo, ſi nulla auræ quantitas per aperturas avolare ponatur, & erit decrementum iſtius altitudinis ab eruptione auræ per easdem aperturas oriundum proxime hoc

$$[(2\alpha)^{\frac{3}{2}}\times(f+\phi)]:[3F\times\sqrt{(bPp}].$$

Unde in eodem tormento adhibitaque eadem pulveris quantitate & manente globi pondere, erunt decrementa jactuum proportionalia amplitudinibus aperturarum.

Decrementa eadem fere sequuntur rationem subduplicatam quantitatum pulveris adhibitarum cæteris paribus ; quia enim logarithmi magnorum numerorum in multo minori crescunt ratione ac numeri ipsi & quoniam insuper est $\alpha = b\,P\,log.\frac{a}{b}$, poterit cæteris paribus statui α proportionale ipsi b, quia P non afficitur à b. Sed decrementum, de quo sermo est, ceteris paribus rationem sequitur quantitatis $(\alpha^{\frac{3}{2}}) : (\sqrt{bp})$ seu rationem quantitatis $\frac{b}{\sqrt{p}}$; ipsum vero p, quod pondus denotat pulveris adhibiti est ut b; igitur decrementum prædictum sequitur proxime rationem $\sqrt{b}$, quæ subduplicata est quantitatis pulveris adhibiti. Igitur ratione habita jactuum, decrementa multo majora sunt in jactibus debilibus, quam vehementioribus, idque etiam experimenta *art.* (*III*) recensita confirmare videntur : non video enim aliam rationem, cur in prima tabula experimentorum globi jactus in vacuo, sumtis duabus pulveris unciis, plus quam vigesies sexies altior esse debuerit, quam cum uncia dimidia sumeretur, & cur mox duplicata pulveris quantitate ad 4. uncias jactus tantum quadruplo altior post calculum prodeat, quam quantitate duarum unciarum.

(XI) Quæ reliquæ in utraque tabula comparent experimentorum inæqualitates, eas ut supra dixi, maximam partem derivo ab eo, quod pulvis non omnis inflammatur, nec is qui inflammetur omnis statim ab initio explosionis flammam concipiat. Neque certe id mirabimur, cum perpendimus totum explosionis tempus in *exper.* 4. *tab.* 1. nequidem centesimam unius minuti secundi partem efficere. Igitur cum certum sit maximam pulveris partem non inflammatam ejici, nec exiguam partem reliqui tardius inflammari, quam in calculo positum fuit; cumque præterea notabilis pulveris pars fucata sit vaporibus materiaque terrestri, quæ non accenditur, sequitur longe majorem inesse elasticitatem partibus accensis, quam quæ experimenti calculo *art.* (*X.*) determinata fuit, fortasse decies aut centies major est.

At vero sit tantum talis, quam experimentum ostendit, elasticitate nem-

nempe aëris ordinarii decies millies major; ſequitur inde auram illam elaſticam, quæ ex pulvere pyrio accenſo elicitur aut non aërem eſſe communem aut elaſticitates in majori ratione creſcere quam denſitates: non poteſt enim denſitas aëris, qui à pulvere modo inflammato oritur, eſſe plus quam millies denſitate aëris ordinarii major, ſi pulvis vel totus ex aëre compreſſo compoſitus ſit, quod ex gravitate pulveris ſpecifica ratione aëris concludo.

Quæſtio interim jamdudum eſt agitata, an aura elaſtica factitia, quæ ex corporibus deducitur, aër ſit ordinarius nec ne, quam ego quæſtionem non decidam.

Si tamen ponatur, pulverem pyrium aërem eſſe naturali millies denſiorem & decies millies magis elaſticum, tum ex §. 4. ſequetur, aërem vi infinita compreſſum non poſſe pluribus quam 1331. vicibus condenſari & ſecundum eandem regulam foret aëris naturali quadruplo denſioris elaſticitas ad elaſticitatem aëris naturalis ut $4\frac{1}{4}$ ad 1.

An vero experimenta ab aliis inſtituta, quæ harum elaſticitatum rationem faciunt accurate ut 4 ad 1 ſufficiente accuratione facta fuerint & an calor aëris dum comprimebatur idem permanſerit? neſcio. Veroſimile autem eſt, eandem auram quæ in poris pulveris pyrii latet, cauſam eſſe elaſticitatis corporum elaſticorum aut villorum contractilium: dum enim in cavernulis ſcatet, ſi corpora in figuram inſolitam vi quadam redigantur, comprimitur aura elaſtica, cavernuliſque dum reddit figuram capaciſſimam corpus reſtituit in priſtinam figuram & longitudinem.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO UNDECIMA.
De fluidis in vorticem actis, tum etiam de iis, quæ in vasis motis continentur.

§. I.

EX eo tempore quo Keplerus & Carteſius vortices adhibuere pro variis naturæ phænomenis explicandis, multi operam ſuam haud male ſe collocaturos rati ſollicite iſtud argumentum ruminati ſunt: primus autem, ni fallor, naturam ejus recte penetravit Hugenius in *tract. ſur la peſanteur*; ſuperaddam quædam, quæ ad inſtitutum meum pertinent, ab aliis fortaſſe non ſatis examinata.

Poni autem ſolent vortices ad ſtatum *permanentiæ* ſeu durationis reducti, ita ut nulli mutationi ſubjectum lege conſtanter eadem moveatur fluidum.

Fig. 65. & 66. §. 2. Sit cylindrus ABCD (Fig. 65. & 66.) verticaliter poſitus, cujus axis GH, iſque ad certam altitudinem plenus ſit, concipiatur aqua in vorticem acta ſintque omnia jam ad ſtatum durationis reducta: Ita ſuperficies aquæ deprimetur verſus axem & elevabitur verſus latera: Sectionem per axem terminatam à ſuperficie aquæ repræſentabimus curva EOF, hujuſque curvæ nunc indolem dabimus ex data relatione, quam inter ſe habent velocitates ſub certis ab axe diſtantiis.

Ducantur ga & fn infinite propinquæ & horizontales, agaturque am verticalis: Sit $Og = x$, gf ſeu $am = dx$, $ga = y$, $mn = dy$: Patet autem quamlibet guttulam in ſuperficie poſitam niſu ſuo, ex vi centrifuga horizontali & vi gravitatis verticali, compoſito perpendiculariter ſuperficiei inſiſtere, quia ſi oblique contranitatur nihil ſit, quod guttulam in loco ſuo conſervet.

Igitur ſi vis centrifuga guttulæ in a poſitæ exprimatur per horizontalem

$\frac{ba}{}$

ba & vis gravitatis per verticalem ca compleaturque rectangulum $abec$, erit diagonalis ae ad curvam perpendicularis; unde triangulum eca simile est triangulo amn & sic $dx : dy = ec : ca = ba : ca$, vel ut vis centrifuga in puncto a ad vim gravitatis.

Demonstravit autem Hugenius vim centrifugam corporis in gyrum acti celeritate, quam lapsu libero per altitudinem dimidii radii acquirere possit, æqualem esse vi suæ gravitatis: quod si proinde altitudo respondens guttulæ velocitati gyratoriæ dicatur V; vis gravitalis g: erit vis centrifuga $= \frac{2gV}{y}$, unde $dx : dy = \frac{2gV}{y} : g$, vel $dx = \frac{2Vdy}{y}$.

§. 3. Si ponatur $V = \frac{1}{2}y$, fiet $x = y$ & proinde linea EO erit recta constituens cum axe GH angulum semirectum habebitque cavitas formam coni: Si vero servata eadem proportione velocitatum, quæ nempe sint ubique radicibus distantiarum ab axe proportionales, aquæ celerius tardiusve circumagantur, fiet angulus EOG eo acutior, quo celerius moventur, ita ut si infinita fuerit velocitas, tunc aquæ perpendiculariter fundo insistere debeant instar muri, cavitatemque cylindricam interius formare, si modo operculum sit in AD, quod impediat, quominus aquæ omnes ejiciantur.

§. 4. Si ponatur paullo generalius $2V = fy^e$, fiet $dx = fy^{e-1}dy$ vel $x = \frac{f}{e}y^e$: Hinc sequitur curvam semper fore versus axem concavam, ut in figura 65, si sit e major unitate atque convexam, ut in fig. 66. si sit minor. In priori casu est angulus EOG semper rectus, in altero semper nullus: in solo casu quo $e = 1$ potest angulus iste esse qualiscunque.

§. 5. Inservire possunt hæc ad dignoscendam quodammodo scalam velocitatum in vortice artificiose producto: si enim superficiem videas concavam, recte judicabis velocitates majori crescre ratione, quam distantiæ ab axe crescant, si convexam contrarium deduces. Si curva non videatur ad parabolicum genus pertinere, indicium erit velocitates non posse comparari cum distantiarum determinata aliqua potentia. Quo major observata fuerit linea EM terminata ab horizontali OM, eo major putabitur velocitas particularum absoluta seu littera f.

§. 6. Existimo autem non posse vorticem in statu suo per tempus aliquod notabile permanere, si vires centrifugæ partium æqualium in fluido homogeneo crescant ab axe versus peripheriam: hoc enim si esset, cum nihil sit, quod partium axi viciniorum vim centrifugam sufficienter coërceat, fieret utique, ut partes illæ viciniores perpetuo ab axe recederent, remotioresque ad illum propellèrent, neque unquam in hoc statu æquilibrium aut status durationis obtineri posset. Apparet inde quantitatem hanc $\frac{2gV}{y}$ (quæ nempe in fluidis homogeneis vim centrifugam partium æqualium exprimit) aut una crescere cum y aut saltem non decrescere, atque sic si rursus ad specialem hypothesin antea factam ($2V = fy^e$) descendamus, non poterit e esse minor unitate. Igitur in omnibus vorticibus, de quibus hic sermo est, ad statum durationis reductis, superficies nunquam convexa erit, ut in figura 66, sed semper aut concava, ut in figura 65. aut conica: & quia e vel major est unitate vel eidem æqualis, aliter fieri non potest, quin velocitates aut æquali aut majori ratione crescant cum radicibus distantiarum ab axe. Hæc cum ita mecum perpendo, non intelligo quemadmodum Newtonus fingere sibi potuerit duos vortices fluidi ubique homogenei ad statum perpetuæ durationis reductos, in quorum altero *tempora periodica partium sint ut earum distantiæ ab axe cylindri, in altero autem ut quadrata distantiarum à centro sphæræ*: Nam in horum vorticum altero velocitates ubique essent æquales, & in altero plane decrescerent ab axe versus peripheriam.

Magis verosimile est, in plerisque vorticibus, qui statum perdurationis jam attigerint, fluidi sive homogenei sive heterogenei partium singularum tempora periodica eadem fore, quasi totus cylindrus solidus fuerit, partes autem quæ sint specifice graviores circumferentiæ, viciniores futuras esse. In hoc casu fit v proportionale ipsi y & V proportionale ejusdem quadrato, curvaque EOF erit parabola Apolloniana, cujus vertex in O & cujus axis sit OG.

Præsertim hæc ita proxime fore præsumo, si vortex generetur à rotatione vasis cylindrici circa axem HG, vel etiam ab agitatione uniformi baculi juxta latera vasis, cujusmodi vorticum phænomena exposuit *D. Saulmon in Comm. Acad. Reg. Sc. Paris. a.* 1716.

§. 7. Pressiones quas diversæ cylindri ABCD partes à fluido sustinent, pro-

proportionales ſunt altitudinibus columnarum verticalium iisdem partibus reſpondentium : neque enim requiritur, ut huic ponderi conatum fluidi à vi centrifuga oriundum addamus, quia conatus iſte effectum jam obtinuit in elevandis aquis : Atque ſi vas non fuerit cylindricum ſed irregularis utcunque ſtructuræ, licebit cylindrum fingere, cujus axis coincidat cum axe rotationis, fluido ita plenum, ut punctum O tam in vaſe propoſito quam in cylindro fictitio in eodem loco poſitum ſit : tanta enim in quovis cylindri puncto preſſio erit, quanta eſt in eodem puncto, quatenus id ad vas propoſitum pertinet. Apparet ex hoc ipſo, poſſe ſuperficies vorticum ex alio principio quam quo ante uſi ſumus definiri: Ducta nempe linea horizontali O M & verticali N *a* cum ſua infinite propinque *p n* ſequitur altitudinem N *a* ſeu O *g* proportionalem eſſe vi centrifugæ omnium particularum quæ ſunt in O N & differentiam altitudinum duarum proximarum, nempe *a m* ſeu *gf*, proportionalem vi centrifugæ particulæ N *p*: Unde rurſus derivatur æquatio finalis, quam §. 2. dedimus, nempe $dx = \frac{2V\,dy}{y}$.

§. 8. Videamus nunc quid accidere debeat corporibus vortici innatantibus; ut autem quæſtio eo diſtinctior atque ſimplicior fiat, corporis loco conſiderabimus globulum parvum ejusdem cum fluido vorticoſo gravitatis ſpecificæ.

Globulus talis fluido commiſſus duabus ſtatim potentiis ſollicitatur, altera tangentiali ab impetu fluidi ortum trahente, altera centripeta, quæ à vi fluidi centrifuga naſcitur. Iſtæ vires conſtantem ſervant inter ſe rationem, quadratam nempe velocitatis fluidi *reſpectivæ*; ſive quieſcat corpus ſive motu circulari feratur.

Notari autem meretur ab iis, qui in explicandis gravitatis phænomenis, adhærent principiis Carteſianis, vim tangentialem eſſe incomparabiliter majorem vi centripeta : eſt enim illa ad hanc, ut diſtantia corporis ab axe vorticis ad octo tertias partes diametri globi ; demonſtrationem videre eſt in *Comment. Acad. Petrop. tom. II. p.* 318. & 319.

§. 9. Quamvis ſciam multa à variis allegata fuiſſe, ut oſtenderent, materiam ſubtilem celerrime in vorticem actam corpora quidem verſus axem detrudere poſſe neque tamen inde ſequi, ut ſimul à vortice deferantur iſta corpo-

ra,

ra, non potui tamen hunc mihi ſcrupulum eximere, poſtquam cognovi vim tangentialem vi centripeta eſſe pene infinite majorem. An non melius huic difficultati occurritur, ſi duos ſuper eodem axe vortices ſtatuamus contrarios & æqualis virtutis: Videtur enim, phænomena naturæ plurima conciliari non poſſe cum vorticum hypotheſi, niſi ponamus duos pluresve vortices liberrime ſub qualicunque directione ſe invicem trajicere poſſe: vel ſola gravitatio communis omnium corporum cæleſtium verſus ſe invicem, quæ in dubium vocari nequit, ſatis oſtendit aut valedicendum eſſe hypotheſi vorticum, aut liberrimam vorticum plurium in omnes plagas decuſſationem ſtatuendam eſſe. Si igitur duo vortices æqualis virtutis contrarii ſuper eodemque axe fingerentur, tunc impetus contrarii deſtruerent vires utriuſque vorticis tangentiales; ſimul autem uterque vortex concurreret ad corpus verſus axem communem deprimendum.

§. 10. Altera accedit difficultas, quominus poſſit corporum gravitas peti ex effectu duorum vorticum contrariorum ſuper eodem axe motorum. Ita enim corpora non verſus punctum commune aut quaſi punctum ſed verſus axem gravitarent, motuque ad eundem perpendiculari laberentur, quod cum deſcenſu corporum verticali & rotunditate vel quaſi rotunditate terræ corporumque cœleſtium pugnat.

Huic alteri quoque difficultati occurretur, ſi fingantur duo axes ad ſe invicem perpendiculares aut proxime tales, circa quorum utrumque duo vortices contrarii æqualis virtutis circumagantur. Namque vis compoſita omnium vorticum ita intelligi poteſt comparata, ut corpus detrudat proxime verſus punctum, quo ambo axes ſe invicem interſecant; ſemper tamen foret terra aliquantum compreſſa verſus planum per ambos axes tranſiens. Poterit autem vel huic incommodo, ſi modo incommodum ſit, obviam iri, multiplicando admodum vorticum numerum: nam ſi vel infiniti fere ſtatuantur vortices, poterunt omnes eadem facilitate ſe trajicere, ac radii luminis, qui ſe minime impediunt.

Volui iſta hic adjicere in gratiam eorum, qui vorticibus delectantur, ut videant, an motus iſte facilius concipi poſſit eo, quem Hugenius finxit: utroque enim phænomena naturæ æqualiter explicari poſſunt. Hanc ſententiam paullo accuratius expoſui in diſſertatione, quam Academia Reg. Sc. Pariſ. præmio a. 1734. affectam imprimi curavit. §. 11.

§. 11. Quia dubitari nequit, quin omnes planetæ verſus ſolem & ſatellites verſus ſuos planetas ad mentem Newtoni *gravitent*, hujusque gravitatis cauſa affinis ſit cum illa qua corpora terreſtria verſus centrum terræ tendunt, erit vorticum hypotheſis ad totum ſyſtema mundi extendenda, ſi pro gravitate corporum terreſtrium explicanda adhibeatur. Ita vero planetæ, materiæ ſubtili innatantes, moverentur in medio reſiſtente, paulatimque de motu ſuo aliquid perdentes ad centrum ſolis accedere ſub forma ſpiralis deberent: hoc vero cum ex antiquiſſimis obſervationibus non appareat, poſtulat vorticum hypotheſis, ut fluidum vorticoſum ponatur ſupra modum rarum atque ſubtile idque velocitate, quam mens humana vix aſſequi poſſit, motum: quo enim rarius fluidum, eo celerius motum fingas neceſſe eſt. Fortaſſe oportunius motuum perennitas explicabitur à communicatione quadam motus reciproca, ita ut quas modo corpus cœleſte propulſit particulas, ab his alio tempore vi ſimili propellatur.

§. 12. Venio jam ad reliquas corporum gravitantium proprietates, quæ ex hypotheſi vorticum ſequuntur. Ponamus itaque corpus in fluido vorticoſo quieſcens, quod nullas fluidi particulas per poros ſuos tranſmittat: ita tendet corpus verſus centrum vorticis, eritque vis ejus centripeta præciſe æqualis vi centrifugæ fluidi vorticoſi, quod ſub ſimili volumine in eadem à centro diſtantia poſitum ſit. Ergo corpora quæcunque in ſimili vorticis loco conſtituta eandem habent vim centripetam ſi idem habeant volumen, etiamſi quantitates materiæ in uno quoque corpore ſint utcunque inæquales, & ſi hujusmodi corpora libere verſus centrum vorticis moveri poſſint, ferentur velocitatibus inæqualibus reciproce ſcilicet proportionalibus quantitatum materiæ radicibus quadratis, ſi ſpatia emenſa ſint æqualia.

§. 13. Quæ in præcedente paragrapho monita ſunt, facile applicantur gravitati corporum, ſi modo principium gravitatis ſit vis centrifuga alicujus materiæ ſubtilis celerrime in vorticem actæ. Quia vero experientia docet omnia corpora terreſtria in vacuo ſimili deſcendere velocitate omniaque corpora è filo ſuſpenſa æquali vibrationes facere tautochronas, inde concludemus, *particulas ultimas graves*, per quas nempe fluidum gravificum penetrare nequeat, in omnibus corporibus terreſtribus eſſe æqualis denſitatis ſpecificæ, id eſt, ſub æqualibus voluminibus æquales *materiæ ſolidæ* quantitates continere, idque non minus in *particulis gravibus*, quæ aurum quam quæ plumas componunt. Ne

vero hæc ſecus ac volo explicentur dicendum mihi erit, quid intelligam *per ultimas particulas graves* & per *materiam ſolidam* ipſis inſitam.

§. 14. Sunt igitur *particulæ graves* proprie ſic dictæ illæ, quæ impenetrabiles ſunt materiæ ſubtili vorticoſæ: hujuſmodi enim particulæ idem faciunt, quod corpora in vortice poſita, de quibus §. 12. diximus: quamvis autem impenetrabiles ſint materiæ ſubtili modo dictæ, non crediderim tamen illas perfecte ſolidas, quales Hugenius præſumſiſſe videtur *in tract. ſuo de gravitate*, id eſt tales quorum ſpatium totum materia repletum ſit ſine poris aut fluido interfluo: exiſtimo potius has *particulas graves* ſuos rurſus habere poros, atque in illis fluidum aliud eſſe longum ſubtilius, quod particulas graves eadem libertate trajicit, qua fluidum gravificum fluit per corpora ſenſibilia: reſiduum vero quod in *particulis gravibus* ſibi cohæret voco *materiam ſolidam* ad particulas easdem pertinentem.

§. 15. Perſpicuum ex his eſt, diverſas corporum gravitates ſpecificas minime petendas eſſe ex diverſa denſitate *particularum gravium*, ſed ex eo, quod hæ particulæ poſſint eſſe in diverſis corporibus ſub eodem volumine numero inæquales, aut etiam magnitudine, ſic ut in corporibus compactioribus majorisve gravitatis ſpecificæ *particulæ graves*, vel minoribus interſtitiis poſitæ vel volumine majores ſint.

Etſi vero diverſas denſitates ſpecificas habuiſſent *particulæ graves* in diverſis corporibus, non propterea diverſas habitura fuiſſent gravitates ſpecificas corpora cæteris poſitis paribus: talia autem corpora ex alto delapſa diverſa inter ſe velocitate fuiſſent deſcenſura verſus centrum terræ: Fieri itaque potuiſſet, ut corpora æqualis gravitatis ſpecificæ, vel in vacuo communiter ita dicto inæquali velocitate deſcendiſſent non minus atque corpora videmus diverſæ gravitatis ſpecificæ æquali velocitate deſcendentia: In hujuſmodi autem corporibus leges motuum longe aliæ forent, atque nunc ſunt, ubi maſſæ ex ſolis ponderibus æſtimantur.

§. 16. Cæterum quia omnia, quantum experientia conſtat, corpora terreſtria habent ſuas *particulas graves* æqualis denſitatis ſpecificæ, ut §. 13. monitum fuit, facile quidem inducar, ut credam idem in omnibus planetis fieri ſeorſim conſideratis: Planetas vero inter ſe compatatos *particulas* ſuas *graves* diver-

verſæ habere denſitatis ſpecificæ mihi admodum eſt probabile, quia nullam video rationem, cur in omnibus planetis ſimiles eſſe debeant iſtæ particulæ. Sed à *particularum gravium* denſitate in quolibet planeta pendet hujus vis centrifuga ſeu conatus recedendi à ſole. Igitur nondum licet colligere *planetarum vires centrifugas ſe habere, in ratione quadrata reciproca eorundem diſtantiarum à ſole ex eo, quod tempora periodica rationem ſequantur ſeſquiplicatam diſtantiarum:* talis enim concluſio ſupponit ſimilem in omnibus planetis *particularum gravium* denſitatem.

§. 17. Planetarum vires centrifugæ æquales utique ſunt viribus contrariis quibus verſus ſolem trahuntur: Quia autem, ut dixi in ſuperiori paragrapho, nondum certum eſt, in quanam ratione reſpectu diſtantiarum à ſole vires planetarum centrifugæ mutentur, ideo neque de eorum viribus gravitatis verſus ſolem aliquid certi ſtatuere licet; Et plurima quidem ſunt in vorticum hypotheſi, quæ vires gravitatis in diverſis diſtantiis conſtituunt & determinant.

Cum enim vis gravitatis ſit æqualis vi centrifugæ materiæ ſubtilis, quæ particulas corporis graves penetrare nequit, ſequitur eo majorem eſſe vim gravitatis, quo majori materiæ ſubtilis quantitati tranſitus negatur; quia vero ſcimus corpus ſæpe fluido uni impenetrabile eſſe, quod alii fluido ſubtiliori liberrimum concedit transfluxum, fieri poteſt, ſi modo materiam vorticoſam in diverſis à centro vorticis diſtantiis inæqualiter ſubtilem putemus, ut unus idemque planeta in inæqualibus à ſole diſtantiis inæqualiter ad ſolem pellatur, quod idem facilius contingere poteſt in diverſis planetis, quia accedit diverſa quæ eſſe poteſt particularum gravium, ſtructura.

Præter hæc ſunt etiam diverſa materiæ vorticoſæ denſitas, velocitas diſtantiaque à centro, quæ concurrunt ad vim gravitatis formandam. Si vero eorum ratio habeatur, apparebit poſſe quidem vires gravitatis decreſcere creſcentibus diſtantiis à centro virium, neque tamen propterea vires centrifugas æqualium materiæ vorticoſæ voluminum pariter decreſcere, quod poſterius ob rationem §. 6. expoſitam fieri non poſſe exiſtimo.

Iſta vero quæ generaliter & obiter diſputavimus de natura vorticum eorumque ad Phænomena gravitatis applicatione, ſufficiant: animus non fuit vor-

vorticum commendare hypotheſin, ſed quasdam tantum inde concluſiones facere, ſine quibus ipſam hypotheſin ſubſiſtere non poſſe crediderim.

Venio jam ad alteram ſectionis partem, qua brèviter conſiderabimus ſtatum fluidorum, quæ intra vaſa mota continentur: Argumentum eſt fertiliſſimum infinitiſque modis variabile: Sed pauca attingemus, ceu exempla, ad quæ multa alia revocari poterunt.

§. 18. Si aqua in vaſe perforato contineatur ipſumque vas libere cadat, ex ſe patet, nihil aquæ durante vaſis lapſu eſſe effluxurum, quia nempe particulæ ſuperiores non gravitant in inferiores: Si vas motu quidem accelerato deſcendat ſed tardiore quam quo corpora naturaliter in vacuo accelerantur, effluet aqua, ſed minori velocitate ac ſi vas quiescat: Contrarium erit, ſi vas motu accelerato ſurſum trahatur: Denique ſi vas horizontaliter accelerato motu feratur (jam enim ad reliquas non attendemus directiones) fieri poteſt, ut velocitas aquæ effluentis major ſit vel minor velocitate ordinaria pro ratione ſitus foraminis: Velocitates autem aquæ ſic determinabuntur.

Fig. 67. §. 19. Sit v. gr. cylindus A C D B (Fig. 67.) aqua plenus usque in A B, cujus fundum C D foramen habeat in E valde parvum per quod aquæ effluant, dum interea totum vas ſurſum trahatur à pondere P deſcendente mediante funiculo ſuper duabus trochleis H & G excurrente. Denique conſtanter tantum aquæ ſuperius affundi ponatur, quantum effluit per foramen E: pondus vero cylindri & aquæ in eo contentæ indicetur per p. Ita apparet quamlibet guttam aquæ in vaſe veluti ſtagnantis vi animari ad aſcenſum quæ ſe habeat ad vim gravitatis naturalem ut $\frac{P-p}{P+p}$ ad 1: Quia vero reactio guttulæ in fundum æqualis eſt vi, qua ad aſcenſum animatur quævis guttula, præter preſſionem naturalem aliam exeret in fundum, quæ exprimenda erit per $\frac{P-p}{P+p}$. Utraquè vero preſſio ſimul ſumta erit ad preſſionem ſolam naturalem ut $\frac{2P}{P+p}$ ad 1, adeo ut fundum haud ſecus ab incumbente aqua prematur, quam ſi cylindrus quieſceret eſſetque altitudo aquæ $= \frac{2P}{P+p} \times$ A C, ex quo ipſo ſequitur altitudinem velocitati aquæ uniformiter effluentis debitam eſſe $= \frac{2P}{P+p} \times$ A C.

Igitur

Igitur si $P = o$, nulla effluet aqua, cadente vase motu naturaliter accelerato: si $P = p$, effluet aqua, velocitate ordinaria, quia tunc vas quiescit; atque si $P = \infty$, erit velocitas aquæ effluentis ad velocitatem ordinariam ut $\sqrt{2}$ ad 1.

§. 20. Quæritur nunc quid accidere debeat fluido, quod in vase continetur, cui motus horizontalis uniformiter acceleratus imprimitur. Id vero facillimum est videre ex hoc solo, quod nunc inertia particularum ceu directioni, sub qua vas movetur, contraria sit horizontalis, dum gravitatis earundem est verticalis: Utraque vero manet constanter eadem.

Igitur postquam fluidum ad statum durationis seu *permanentiæ* pervenit, superficies ejus plana erit, sed inclinata versus plagam motus. Angulus autem inclinationis determinabitur ut sequitur.

Sit vas cylindricum A C D L (Fig. 68.) verticaliter positum, quod super plano horizontali C D H, mediante pondere P ope trochleæ G vasi annexo in S movetur motu uniformiter accelerato, sitque pondus vasis & aquæ in illo contentæ ad pondus P ut p ad P: gravitatio naturalis $= 1$; eritque nisus cujuslibet guttulæ in directione G S ratione suæ gravitationis $= \frac{P}{P+p}$: Igitur si A B sit in eodem plano cum S G & cum superficie aquæ, ducaturque A L, patet actionem gravitatis naturalis fore ad reactionem à pondere P oriundam, ut B L ad A L seu ut 1 ad $\frac{P}{P+p}$: vocatoque sinu toto 1, fore sinum anguli Fig. 68.

$$\text{L A B} = \frac{P}{\sqrt{(2PP+2Pp+pp)}}.$$

Hinc etiam intelligitur fundum C D majorem ab incumbente aqua pressionem pati in C quam in D, idque in ratione altitudinum A C & B D: sique idem fundum perforetur minimo foraminulo, aquam ejectum iri velocitate, quæ respondeat altitudini columnæ verticalis superincumbentis. Ita vero erit, postquam omnia jam ad statum *permanentiæ* pervenerint; si pondus P veriabile sit, nunquam in eodem situ permanebit superficies A B: à pondere autem isto pendet velocitas, qua vas movetur in singulis locis. Igitur si totum pondus auferatur, postquam vas jam motum acquisiverit, per-

get vas ſuâ velocitate moveri, ſuperficies autem aquæ declivitatem deponet, rurſusque ad ſitum horizontalem componetur, veluti ſi quieſcat vas; in his adeoque caſibus non eſt vaſis motus, qui fluidorum ſtatum permutet, ſed motus variatio.

§. 21. Quod in præcedente paragrapho monuimus de vaſe cylindrico verticaliter poſito facile extenditur ad vas cujuscunque figuræ: qualis enim eſt inclinatio ſuperficiei aqueæ A B ad horizontem in vaſe cylindrivo, talis erit in omnibus reliquis vaſis: preſſio autem aquæ in latera vaſis ubique definietur, ſi columna concipiatur verticalis ab eo puncto, pro quo preſſio aquæ definienda eſt, usque ad ſuperficiem aquæ, quæ cogitatione producenda erit, ſi id opus fuerit. Si loco vaſis ſumatur v. gr. tubus ab utraque parte inflexus, veluti A C D L (Fig. 69.) isque moveâtur in directione C D, tum utraque ſuperficies M, N ſitum mutabit in A, B, donec recta A B debitam obtineat inclinationem antea definitam; fieri etiam poteſt ut pars aquæ efflat per A, priusquam æquilibrium adſit: ſi crus D L deorſum ſpectet, ut in figura 70. aqua manebit veluti ſuſpenſa: in utroque enim caſu inclinatio lineæ A B cæteris paribus eadem erit. Fig. 69.

In figura autem 69. erit linea M A eo major, quo longius eſt crus horizontale C D: ſic ut minimæ acceleratione aut etiam retardationes obſervari poſſint, quod ſæpe aliis rebus inſervire poteſt, veluti dignoſcendis accelerationibus navium, niſibusque quos exercent ſingulis remorum ſubmerſionibus remiges; in his tamen caſibus, quia non poteſt ſtatus ſupponi durationis ſeu *permanentiæ*, omnis fluidi motus, qui ſingulis vicibus replicatur, eſſet inquirendus.

Facit eadem hæc ratio, ut nondum liceat omnino ex præmiſſis determinare, quid fieri debeat cum vaſa fluidum continentia percutiuntur.

Poſſunt autem regulæ percuſſionum ex ordinariis legibus preſſionum deduci, quandoquidem percuſſio nihil aliud ſit, niſi ingens preſſio parum durans.

§. 22. Sit v. gr. tubus cylindricus horizontaliter ſitus A B C D (Fig. 71.) aqua plenus, impingatque globus P in tubi prominentiam A P: tunc aqua ſubito premet vehementer fundum B A verſus P: ut hanc preſſionem recte Fig. 71.

in-

intelligamus, ponemus primo nullum ineſſe pondus tubo : ita apparet ex æqualitate inter actionem & reactionem fundum durante globi impulſu non aliter impelli ab aqua, quam pelleretur in contrariam partem à globo, ſi hic immediate in fundum impingat. Si vero pondera aquæ & tubi rationem habere ponantur ut p ad π, diminuetur impulſus aquæ in fundum, eritque impulſus totus ad impulſum reſiduum ut $p + \pi$ ad p ; diſtribuitur enim impulſus æqualiter in omnem tum aquæ tum tubi materiam, ſolumque fluidum in fundum reagit.

Nunc autem in fundo B A parvulum fingamus foramen m, ſed per id tamen aqua liberrime fluere putetur ; ita intelligimus, particulam aquæ per foraminulum m ejectum iri durante impulſu ; neque tamen quantitas iſtius aquæ determinari poterit ; pendet enim à rigiditate materiæ A P impulſum recipientis : ſi nempe materia iſta rigidiſſima ſit, fortior preſſio ſubſtituenda eſt impetui, ſed minus durans ; conſideretur v. gr. idem impetus in duobus diverſis caſibus : ſit autem in uno preſſio quadrupla, in altero duratio preſſionis quadrupla, quod fieri poteſt cum materia rigidior eſt in caſu priori quam poſteriori : ita effluet in impulſu preſſionis minoris magisque durantis dupla circiter quantitas quam in altero. Poſſunt hoc modo rigiditates materiarum explorari : ſed poſſunt etiam ex ſono.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO DUODECIMA.
Quæ ſtaticam fluidorum motorum, quam hydraulico-ſtaticam voco, exhibet.

§. I.

INter eos, qui preſſionis fluidorum intra vaſa ſubſiſtentium menſuras dederunt, pauci regulas Hydroſtaticæ vulgares, quas in *ſectione ſecunda* demonſtravimus, transgreſſi ſunt : multa tamen alia ſunt, quæ ad Hydroſtaticam proprie ſic dictam pertinent, veluti cum actioni gravitatis vis centrifuga conjuncta eſt, aut vis inertiæ, quod utrumque in præcedente ſectione commentati ſumus : poſſentque hujusmodi vires mortuæ excogitari & combinari infinitis aliis modis. Non vero hæc ſunt, quæ maxime deſideranda mihi videntur : cum difficile non ſit regulas ad id negotium dare generales. Deſidero potius fluidorum ſtaticam, quæ intra vaſa moventur motu progreſſivo, veluti aquarum per canales ad fontes ſalientes fluentium : multiplicis enim uſus eſt, nec ab ullo tractata aut ſi qui mentionem de illa feciſſe dici poſſunt, ab his minime rectè fuit explicata : qui enim de preſſione aquarum per aquæ ductus fluentium horumque requiſita firmitate ad preſſionem illam ſuſtinendam dixerunt, non alias, quam pro fluidis nullo motu latis leges tradiderunt.

§. 2. Singulare eſt in iſta *hydraulico-ſtatica*, quod niſus aquarum prius definiri non poſſit, quam motus recte fuerit cognitus, quæ ratio eſt, quod tam diu latuit hæc doctrina ; parum enim ſolliciti hactenus fuerunt Auctores in motu aquarum diſquirendo, & velocitates ubique fere ex ſola aquæ altitudine æſtimarunt : quamvis autem ſæpe motus tam cito ad hanc velocitatem tendat, ut acceleratione ſenſibus plane diſtingui nequeant, & in inſtanti omnis motus generari videatur, intereſt tamen, ut hæ acceleratione recte intelligantur, quia aliter preſſiones aquarum fluentium definiri ſæpe non poſſunt, proptereaque exiſtimavi, rem eſſe maximi momenti à motus principio usque ad datum terminum mutationes illas utcunque *momentaneas* omni

omni cura perpendere, experimentisque confirmare, quod passim in hoc tractatu, præsértim autem in sectione tertia, feci.

§. 3. Si ubique motus definiri posset, facile foret staticam in fluidis motis generalissimam formare: si enim foramen, sed id infinite parvum fingas, eo ipso in loco pro quo pressio aquarum desideratur, quæres primo quanta velocitate aquæ per illud foraminulum sint erupturæ & cui altitudini illa velocitas debeatur: intelligis autem huic ipsi altitudini proportionalem esse pressionem, quam quæris.

Ex hoc principio petenda est pressio quam sustinet lamina horizontalis L Q in figura quadragesima tertia, si perforata non fuerit: postquam enim demonstratum à nobis fuit in corollario secundo paragraphi trigesimi primi Sectionis octavæ, si foraminulum H infinite parvum fuerit ratione foraminum M & N: ratioque horum foraminum M & N indicetur per α & γ, fore altitudinem velocitati aquæ per H erumpentis debitam $= \frac{\alpha\alpha \times LB - \gamma\gamma \times NQ}{\alpha\alpha + \gamma\gamma}$, inde judicabimus nisum aquæ in laminam L Q non perforatam huic ipsi altitudini proportionalem esse: quod idem alio modo demonstratum dedimus in paragrapho decimo nono citatæ Sectionis: Hinc sequitur fieri posse, ut lamina L Q nullam pressionem patiatur, quantumvis magna supra eam fuerit altitudo aquæ, scilicet quando $\gamma = \alpha \sqrt{(LB : NQ)}$, imo pressionem in suctionem mutari posse.

§. 4. Similiter obtinetur pressio aquæ in laminam L Q, si vel hæc perforata fuerit foramine finitæ ratione amborum reliquorum magnitudinis. Si enim foraminulo infinite parvo lamina præter illud, quod est in H, perforata fuerit, non potest non velocitate communi aqua per utrumque erumpere: Et cum hæc velocitas cognita sit (per §. 30. Sect. 8.) pro foramine H, habetur quoque velocitas, qua aqua per foraminulum, quod nempe concipimus, erumpere debeat, atque sic pressionem aquæ cognoscimus. Fuerint v. gr. foramina M, H & N inter se æqualia, altitudo autem B L habuerit ad altitudinem L Q rationem ut 10 ad 3, erit pressio in laminam L Q subdecupla illius, quæ est obturatis foraminibus H & N.

Denique si in alio loco pressionem aquæ desideres, addes saltem altitudinem, qua lamina L Q supra illum locum eminet, altitudini jactus per ori-

ficium H. Eadem methodus inſervit ad preſſiones aquarum in reliquis vaſis, quæ in Sectione octava tractavimus, determinandas. Differunt autem omnes hæ quæſtiones ab iis, quæ ad motum fluidorum per canales pertinent, quod aquæ ob infinitam vaſorum à nobis poſitam amplitudinem veluti quieſcant in cavitatibus & nihilominus preſſionem longe aliam exerceant, quam aliter ſolent. In canalibus autem aquæ preſſionem ſuam eo magis mutant, quo majori velocitate præterfluunt, & omnem fere conſuetam preſſionem exerunt, ſi velocitas iſta ſit valde parva.

Hæc ita, cum velocitates fluidorum determinari poſſunt per methodos jam ſuprà à nobis traditas. Singulari autem methodo res pertractanda eſt, cum aquæ per canales fluunt, hancque doctrinam potiſſimum titulo *hydraulico-ſtaticæ* intelligo: Hic non tam preſſio ex velocitate quam reciproce velocitas, ſi foraminulum in lateribus canalis fiat, ex preſſione definiri poteſt. Et de iſta *hydraulico-ſtatica*, cujus uſus ampliſſimus eſt, in præſenti ſectione potiſſimum agere conſtitui.

Problema.

Fig. 72. §. 5. Fuerit vas ampliſſimum A C E B (Fig. 72.) aqua conſtanter plenum conſervandum, tubo inſtructum cylindrico & horizontali E D; ſitque in extremitate tubi foramen *o* aquas velocitate uniformi emittens; quæritur preſſio aquæ in latera tubi E D.

Solutio.

Sit altitudo ſuperficiei aqueæ A B ſupra orificium $o = a$; erit velocitas aquæ in *o* effluentis, ſi prima fluxus momenta excipias, uniformis cenſenda & $= \sqrt{a}$, quia vas conſtanter plenum conſervari aſſumimus; poſitaque ratione amplitudinum tubi ejusque foraminis $= \frac{n}{1}$, erit velocitas aquæ in tubo $= \frac{\sqrt{a}}{n}$: Si vero omne fundum F D abeſſet, foret velocitas ultima aquæ in eodem tubo $= \sqrt{a}$, quæ major eſt quam a; Igitur aqua in tubo tendit ad majorem motum, niſus autem ejus ab appoſito fundo F D impeditur: Ab hoc niſu & reniſu comprimitur aqua, quæ ipſa compreſſio coërcetur à lateribus tubi, hæcque proinde ſimilem preſſionem ſuſtinent. Apparet ſic preſſionem

la-

laterum proportionalem esse accelerationi seu incremento velocitatis, quod aqua sit acceptura, si in instanti omne obstaculum motus evanescat, sic ut immediate in aërem ejiciatur.

Res igitur jam eo perducta est, ut si durante fluxu aquæ per o, tubus E D in temporis puncto abrumpatur in cd, quæratur quantam accelerationem guttula $acbd$ inde sit perceptura : tantam enim pressionem sentiet particula ac in lateribus tubi sumta à præterfluente aqua : Hunc in finem considerandum est vas A B E cd C, atque pro eo invenienda acceleratio particulæ aqueæ effluxui proximæ, si hæc habuerit velocitatem $\frac{\sqrt{a}}{n}$: Istud negotium fecimus generalissime in *paragrapho tertio sect. V.* Attamen quia in hoc casu particulari brevis est calculus, motum in vase decurtato A B E cd C hic iterum calculo subducemus.

Sit velocitas aquæ in tubo Ed, quæ nunc ut variabilis consideranda est, $= v$: amplitudo tubi ut antea $= n$, longitudo E $c = c$: indicetur longitudo ac particulæ aqueæ infinite parvæ & effluxui proxime per dx : Erit guttula æqualis in E tubum ingressura eodem temporis puncto quo altera $acdb$ ejicitur : dum autem guttula in E, cujus massa $= ndx$, tubum ingreditur acquirit velocitatem v, atque *vim vivam* $nvvdx$, quæ *vis viva* tota fuit de novo generata ; nullum enim, ob amplitudinem vasis A E infinitam, motum guttula in E habuit tubum nondum ingressa : huic *vi vivæ* $nvvdx$ addendum est incrementum *vis vivæ*, quod aqua in Eb accipit, dum guttula ad effluit, nempe $2ncvdv$: aggregatum debetur *descensui actuali* guttulæ ndx per altitudinem B E seu a: habetur igitur $nvvdx + 2ncvdv = nadx$ sive $\frac{vdv}{dx} = \frac{a-vv}{2c}$.

In omni autem motu est incrementum velocitatis dv proportionale pressioni ductæ in tempusculum quod hic est $\frac{dx}{v}$: igitur in nostro casu est pressio, quam guttula ad patitur, proportionalis quantitati $\frac{vdv}{dx}$, id est, quantitati $\frac{a-vv}{2c}$.

Est vero in eo temporis puncto, quo tubus abrumpitur, $v = \frac{\sqrt{a}}{n}$ vel $vv = \frac{a}{nn}$, hic igitur valor subsituendus est in expressione $\frac{a-vv}{2c}$, quæ

sic abit in hanc alteram $\frac{nn-1}{2nnc}a$. Et hæc est quantitas, cui pressio aquæ contra particulam tubi ac proportionalis est, quamcunque amplitudinem tubus habuerit, aut quocunque foramine ipsius fundum perforatum fuerit. Igitur si in unico casu pressio aquæ cognita fuerit, innotescet simul in omnibus reliquis: talem autem habemus, nempe cum foramen est infinite parvum aut n infinite magna ratione unitatis: tunc enim ex se patet, aquam exercere integram suam pressionem, quæ toti altitudini a convenit, hancque pressionem designabimus per a: sed quando n est infinita, evanescit unitas præ numero nn, fitque quantitas cui pressio est proportionalis $= \frac{a}{2c}$: Ergo si generaliter scire velimus, quanta sit pressio cum n est numerus qualiscunque, talis instituenda est analogia. Si quantitati $\frac{a}{2c}$ convenit pressio a, quænam erit pressio pro quantitate $\frac{nn-1}{2nnc}a$: Et sic invenitur pressio quæsita $= \frac{nn-1}{nn}a$. Q. E. I.

Corollarium 1.

§. 6. Quia litera c ex calculo abiit, sequitur omnes partes tubi, tam eæ quæ sunt vasi A G propiores, quam quæ remotiores, æqualiter ab aqua præterfluente premi, & quidem minus quam partes fundi C G: differentiamque eo majorem esse, quo majus sit foramen o: nullamque amplius pressionem sustinere latera tubi, si in hoc omnis obex F D absit, sic ut pleno orificio aquæ effluant.

Corollarium 2.

§. 7. Si alicubi foraminulo minimo, & quidem tali ratione foraminis o, perforetur tubus, exiliet aqua velocitate, qua ad altitudinem $\frac{nna-a}{nn}$ ascendere possit, si modo impedimenta aliena nihil obstent: Erit nempe altitudo jactus, in figura 73, seu $ln = \frac{nna-a}{nn}$. Si vero tubulus adsit verticalis, aut etiam utcunque inclinatus gm, communicans cum tubo horizontali, sed ita tamen, ut extremitas tubuli inserti non promineat intra cavitatem tubi horizontalis, ne aqua præterfluens illidat in illam extremitatem, erit altitudo aquæ ver-

verticalis gh in tubo inſerto hærentis pariter æqualis $\frac{nna-a}{nn}$: neque neceſſe eſt in hoc poſteriori caſu, ut tubulus gm ſit admodum ſtrictus.

Scholium.

§. 8. Poterit ergo hæc theoria experimento confirmari facillimo, eo majoris futuro momenti, quod nemo adhuc hujusmodi æquilibria, quorum uſus latiſſime patet, definiverit: quod eadem methodo niſus aquarum per canales fluentium generaliſſime obtineri poſſit pro aquæ ductibus utcunque inclinatis, incurvatis, amplitudinisque variatæ ac velocitate aquarum qualicunque; tum etiam, quod nonſolum hæcce preſſionum, ſed tota inſuper motuum theoria, quam ſupra dedimus, hujusmodi experimentis confirmetur, quia arguunt, recte à nobis definitas fuiſſe accelerationes aquarum. Curandum autem eſt in experimento, ut tubus horizontalis ſit interius bene politus, perfecte cylindricus atque horizontalis: ſitque ſatis amplus, ut ab adhæſione aquæ ad latera tubi notabile motus decrementum oriri non poſſit: vas ipſum ſit ampliſſimum atque continue plenum conſervetur. Obſervandum quoque eſt, quanta ſit virtus tubulo vitreo gm aquas ſtagnantes elevandi, quæ virtus omnibus tubis capillaribus aut admodum ſtrictis ineſt: hæc enim elevatio ab altitudine gh eſt ſubtrahenda: aut potius aſſumendus eſt tubus æqualis craſſitiei & obturato orificio o, notandum eſt punctum m, tumque fluxu aquis conceſſo notandum quoque eſt punctum b: erit autem ſecundum theoriam deſcenſus $mb = \frac{1}{nn} \times a = \frac{1}{nn} \times$ E B.

Tandem etiam attendendum eſt ad venam aquæ in o effluentis; hujus enim contractio etiam facit, ut aqua in tubo horizontali minori transfluat velocitate, quam $\frac{\sqrt{a}}{n}$. De iſta contractione eamque præveniendi modo egi in Sect. *IV.* His autem quamvis ita occurri poſſit incommodis, ut error ſenſibilis in experimento ſupereſſe nequeat, tamen ſi majorem adhibere velimus accurationem, experimento indaganda erit quantitas aquæ dato tempore effluentis, quæ cum amplitudine tubi comparata rectiſſime dabit velocitatem aquæ intra tubum fluentis, quam in calculo poſuimus $= \frac{\sqrt{a}}{n}$: Si vero experimento minor inventa fuerit, talis nempe, quæ debeatur altitudini b, tunc erit proxime preſſio aquæ præterfluentis $= a - b$. Co-

Corollarium 3.

§. 9. Si orificium in *o* prius digito obturetur, posteaque fluxus aquis concedatur, mutatur à primo fluxus momento pressio *a* in pressionem $\frac{nna-a}{nn}$: ista vero pressionum mutatio non fit in instanti ; imo si accurate loquendum est, fit demum post tempus infinitum, quia, ut vidimus in sectione quinta, omnis aquarum velocitas, quanta in calculo à nobis posita fuit integræ altitudini *a* respondens, nunquam accurate adest : attamen incredibili acceleratione statim post primas ejectas guttulas ad hanc velocitatem tendunt, ita ut totam, quantum sensibus dijudicari potest, sine mora ulla sensibili acquisivisse videantur, nisi prælongi sint aquæ ductus, tum enim aquarum acceleraciones oculis distincte dijudicari possunt, cujus rei exemplum dedi in Sect. *V.* §. 13. In his igitur canalibus aquas ex castello longissime sito ad fontem salientem ducentibus, si pressiones alicubi experimento explorentur eo quo supra dixi modo, invenietur pressionem celeriter quidem, nec tamen in instanti diminui, pressionumque intervalla dignoscere licebit.

Ut vero generaliter nisus aquarum definiatur, ponenda est, pro *v* ea velocitas, quam aqua eo ipso in loco temporisque puncto, quibus nisus desideratur, habet, sique ea velocitas convenire intelligatur altitudini *b*, erit nisus aquarum $= a - b$. Unde collatis cum præsentibus his quæ in sectione quinta tradita fuerunt, definire licebit quanta singulis momentis pressio futura sit.

Ex his non obscurum est prævidere leges hujusce *hydraulico-staticæ*, si & figura vasis & aquarum per canales transfluentium velocitas pro lubitu fingantur qualescunque. Erit nempe pressio aquarum constanter $= a - b$, ubi per *a* intelligitur altitudo debita velocitati, quacum aqua abrupto canali vaseque constanter pleno conservato post tempus infinitum effluxura sit, & per *b* altitudo debita velocitati, qua cum aqua actu transfluit. Mirum sane est simplicissimam hanc regulam, quam natura affectat, adhuc latere potuisse. Jam igitur illam demonstrabo expressius.

Problema.

§. 10. Invenire pressionem aquæ, per canalem utcunque formatum atque inclinatum, velocitate quacunque fluentis uniformi. Solu-

Solutio.

Sit canalis A C D (Fig. 74.) per cujus foramen *o* transfluere ponantur aquæ velocitate uniformi & tali quæ debeatur altitudini verticali *o* S: ducatur S N & fingatur vas infinite amplum N M Q P aquis plenum usque in N P, ex quo canalis aquas ſuas perpetuo & æquabiliter hauriat: hæc ideo ſic fingo, ut cauſa adſit ſeu vis propellens uniformis, quæ aquas data velocitate propellat ſeu fluxum aquarum conſervet æquabilem: Et ſine hac hypotheſi problema noſtrum foret indeterminatum, quia velocitas eadem in eodem canali infinitis modis ad temporis punctum generari poteſt & propterea, ut habeatur menſura cauſæ aquas propellentis, fingenda eſt uniformitas in motu aquarum. Fig. 74.

Fuerit nunc aquarum preſſio definienda in C F (aut *c f*): huncque in finem putabimus rurſus abrumpi canalem in C E (aut *c e*) ſectione ad canalem perpendiculari examinaturi, quamnam accelerationem retardationemve guttula C E G F (vel *c e g f*) poſt primum rupturæ momentum receptura ſit: quâ de cauſa generaliter motum *momentaneum* per vas decurtatum N M E C A Q P (vel N M *c e* A Q P) definiendum habemus. Sit igitur velocitas guttulæ infinite parvæ C E G F (ſeu *c e g f*) ipſo decurtationis puncto $= v$: maſſa ejus $= dx$: erit *vis viva* aquæ in vaſe decurtato motæ proportionalis quantitati vv, eamque proinde faciemus $= \alpha vv$, intelligendo per litteram α quantitatem quamcunque conſtantem, quæ pendet ab amplitudinibus canalis abrupti; præciſa autem ejus determinatio hic non requiritur. Notetur *vim vivam* aquæ in vaſe ficto N M Q P negligi ob infinitam ejus amplitudinem: nulla tamen ſi vel infinitæ non eſſet amplitudinis inde in calculo oritura fuiſſet variatio. Habemus jam incrementum *vis vivæ* aquæ in vaſe decurtato motæ $= 2\alpha vdv$, cui ſi addatur *vis viva* ſimul genita in guttula ejecta, oritur $2\alpha vdv + vvdx$, quod eſt incrementum *vis vivæ* totale, debitum *deſcenſui actuali* guttulæ dx per altitudinem verticalem aquæ ſupra punctum C (vel *c*,) quam deſignabimus per *a*: hinc igitur iſtud incrementum *vis vivæ* totale faciendum eſt æquale adx, ſic ut ſit

$$2\alpha vdv + vvdx = adx \text{ vel}$$

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{a - vv}{2\alpha}.$$

Reliqua ſi fiant, ut in paragrapho quinto & ponatur velocitas v talis quæ debeatur altitudini b, invenietur preſſionem aquæ in C F (aut *cf*) tantam eſſe,

esse, quanta in aqua stagnante ad altitudinem $a - b$. Ubi notari potest esse altitudinem b ad altitudinem oS, si nulla motus impedimenta aliena sint, venaque effluens in o non contrahatur, in ratione quadrata foraminis o & sectionis CE (aut ce).

Corollarium.

§. 11. Cùm b major est quam a, fit quantitas $a - b$ negativa atque sic pressio in suctionem mutatur, id est, latera canalis introrsum premuntur: tunc autem res ita consideranda est, ac si loco columnæ aqueæ CT superincumbentis & in æquilibrio positæ cum aqua præterfluente, sit columna aquea appensa ct, cujus nisus descendendi impediatur ab attractione aquæ præterfluentis: veluti si v. gr. amplitudo canalis ce æqualis sit orificio o, tunc erit $b = oS$, nulla habita ratione motus impedimentorum *accidentalium*: hinc si tubulus ex canali descendat cr, hicque sit aqua plenus à sua origine c usque in punctum t cum orificio o ad libellam positum, manebit aqua ct suspensa sine motu: si verò punctum t infra o positum sit, descendet aqua per tubulum cr, & effluet perpetuo in r, neque tamen ut facile quis existimare potuisset nondum hâc visa theoria, velocitas aquæ in r effluentis talis erit, quæ debeatur altitudini N P supra r, etiamsi omnia impedimenta auferantur, respondebit potius hæc velocitas, si modo tubulus admodum strictus sit ratione canalis, altitudini tr. Si punctum t altius positum sit puncto o, aqua sua sponte ascendet & cum omnis canalem ingressa erit, aër per tubulum attrahetur, moxque vena aquea in o effluens ab admixto aëre turbabitur pelluciditate atque soliditate orbata. Apparet igitur, quando pressio futura sit affirmativa & quando negativa: nempe eo major est in tubo pressio, quo amplior est & quo humilius positus: Altitudo b est quidem in theoria $= \frac{1}{nn} \times oS$, si $\frac{1}{n}$ denotet rationem inter amplitudinem orificii & ejus tubi sectionis, pro qua pressio est definienda. Cum vero obstacula notabiliter diminuunt motum, conveniet potius in æstimandis pressionibus, ut velocitas aquæ, qualis actu est, experimento cognoscatur & altitudo illi velocitati debita pro b substituatur: similiter accuratius æstimabitur pressio, si pro a non tam ponatur altitudo superficiei aqueæ N P supra effluxus locum, quam altitudo velocitatis, quacum aquæ actu effluant ex canali eodem in loco abrupto: Hæ tamen correctiones non semper locum habent: Istam vero theoriam generalem jam exemplis quibusdam illustrabo.

Exem-

Exemplum 1.

§. 12. Sit vas ABFG (Fig. 75.) ex cujus fundi medio descendit tubus DE formam habens coni truncati inferiora versus divergentis: Affundantur perpetuo aquæ in AG, ita ut sic vas plenum conservetur. Fig. 75.

Sit autem altitudo superficiei aqueæ supra orificium E $=$ a, & supra D (qui locus est pro quo pressio aquæ quæritur) $=$ c: amplitudo orificii in E $=$ m; & amplitudo seu sectio horizontalis in D $=$ n. Erit pressio aquæ in D $=$ $c - \frac{mm}{nn} a$, quæ quantitas vi hypothesium est negativa, sic ut latera canalis introrsum premantur à columna aquea altitudinis $\frac{mm}{nn} a - c$.

Igitur si concipiatur tubus incurvus DLN alteri DE insertus, erit aqua præterfluens in D in æquilibrio cum aqua DLN, quando altitudo D supra N est $=$ $\frac{mm}{nn} a - c$. Si altitudo hæc minor est, sua sponte aqua ascendet nec ascendere desinet, quamdiu aquis orificium N submersum est, ita ut sic aquæ ex loco humiliori in sublimiorem sine ulla vi externa elevari possint, si in AG aquæ sufficiente copia affluant. At vero cum altitudo verticalis D supra N major est quam $\frac{mm}{nn} a - c$, ascendet aqua in crure LN, donec illi fuerit æqualis.

Cæterum hic in memoriam revocandum est, quod passim monui experientiam docere, nempe multum abesse quominus aquæ per tubos à vase, cui implantati sunt, divergentes tota sua velocitate, quam vi theoriæ obtinere deberent, effluant; cujus rei rationes indicavi *paragrapho 26. Sect.* 3.

Fit inde ut altitudo D supra N admodum minor sit, quam vi theoriæ exposita esse deberet: Error corrigetur si loco $\frac{mm}{nn} a$ ponatur altitudo velocitatis, quam aqua in D habet; quæ altitudo per experimentum de quantitate aquæ dato tempore effluentis sumtum obtinetur.

Exemplum 2.

§. 13. Si simili vasi appensus sit tubus verticalis, qualis repræsentatur in Fig. 76. per CE, in quo amplitudines ubique rationem habeant inversam Fig. 76.

ſubduplicatam altitudinum aquæ ſuperincumbentis, tubus iſte nihil afficitur ab aqua præterfluente, neque ullibi vel preſſionem ſive ſuctionem ſuſtinet.

Sequitur inde figuram naturalem fili aquei verticalis, quamdiu hoc contiguum eſt, eandem eſſe, quæ tubi CFE, quod & ratio & experientia confirmat: filum autem eo citius attenuabitur quo minor eſt altitudo ſuperficiei aqueæ ſupra orificium C, ſeu quo tardius effluunt aquæ: apparet filum aqueum ejus eſſe indolis, ut eadem aquæ quantitas per ſingulas ſectiones transfluat, nec velocitas ullibi mutetur, ubicunque filum abrumpatur, quæ eadem proprietas etiam in tubum CFE cadit, adeo ut rectiſſime hæc inter ſe conveniant.

Exemplum 3.

§. 14. Devehantur aquæ è caſtello per canalem, in cujus fundum foramen ſit per quod aquæ veluti in fonte ſaliente verticaliter exiliant, dico preſſionem aquæ in ſingula canalis puncta ubique æqualem fore, ſi amplitudines ejus ſint reſpective ut $\sqrt{\frac{a}{x-b}}$, ubi a exprimit altitudinem aquæ in caſtello ſupra orificium effluxus; x altitudinem ejuſdem aquæ ſupra locum ad libitum in canali ſumtum & b altitudinem arbitrariam conſtantem, & tunc fore ubique preſſionem aquæ fluentis ad preſſionem aquæ ſtagnantis ut b ad a. Quia vero cæteris paribus canales ampliores minus rupturæ reſiſtunt quam ſtrictiores, & id quidem in ratione radiorum ſeu quia conatus aquæ ad canalem rumpendum cæteris paribus rationem ſequitur ſubduplicatam amplitudinum, patet canalem idem rupturæ periculum in ſingulis locis ſubiturum eſſe, ſi amplitudo (y) ratione orificii aquas ejicientis (1) ubique ſequatur legem hujus æquationis

$$\left(x-\frac{a}{yy}\right)\sqrt{y}=b \text{ vel}$$

$$xxy^4-bby^3-2axyy+aa=0.$$

In canali per totum ſuum tractum æquabilis amplitudinis aquarum niſus ad rumpendum canalem ubique proportionalis erit firmitati canalis, ſi craſſities laterum canalis rationem ſequatur ut $x-\frac{a}{mm}$, intellecta per m amplitudine canalis ratione orificii (1).

Exem-

Exemplum 4.

§. 15. Fieri potest, ut altitudo superficiei aqueæ ratione loci, pro quo pressio indaganda est, sit negativa, veluti in siphonibus recurvis aquas ex vase uno in aliud humilius positum ducentibus: Tuncque pressio fit duplici titulo negativa, nempe $= -a - b$, denotante a altitudinem loci supra superficiem aquæ & b altitudinem velocitati aquæ in illo loco debitam.

Ista vero sufficient, ut puto, ad recte intelligendam fluidorum motorum staticam: Venio jam ad alia quædam phænomena, quorum solutio ab istis, quas dedimus modo, regulis pendet.

§. 16. In Sectione tertia §. 25. mentionem feci cohæsionis aquæ per tubos fluentis: veras autem istius cohæsionis mensuras ubique definire res est, quæ sine ista præmissa *hydraulico-statica* expediri nequit: neque enim altitudines considerasse verticales supra orificium effluxus sufficit, ut vulgo putatur, sed oportet etiam nosse velocitates aquis convenientes, hæque cognoscuntur ex amplitudinibus. Ut vero statim appareat lex generalis in definienda vi cohæsionis seu conatu, quo fluida ad mutuam separationem solicitantur, dico illam vim cohæsionis æqualem esse vi, qua latera canalis introrsum premuntur, quam definivimus §. 10. Propositio hæc alia demonstratione egere mihi non videtur; prouti enim compressio aquæ, seu vis quâ ejus partes ad se invicem comprimuntur, æqualis est superincumbenti columnæ aqueæ stagnanti, ita vicissim conatus fluida separandi æqualis censendus est appensæ columnæ verticali aqueæ stagnanti, quæ cum aquis præterfluentibus in æquilibrio sit. Exemplorum loco eadem accipiemus, quibus supra pro indicandis aquarum pressionibus negativis usi sumus.

(I) In Figura septuagesima quinta §. 12. explicata, si in tubulo DLN altitudo D supra N talis sit, ut aqua in eo stagnans cum aquis in D præterfluentibus in æquilibrio sit, tanta debet esse vis cohæsionis in D, ne aqua ibidem discerpatur, quantam habet pondus columnæ aqueæ similis basis & altitudinis verticalis DN. Inde intelligitur quod dixi §. 25. Sect. 3. *posse longitudinem tubi ita augeri, ut tandem aquæ desinant esse continuæ in tubo, quin potius in columnas dividantur, idque fieri in tubis cylindricis cum infra triginta*

ginta duos pedes deſcendant; in tubis divergentibus autem minorem deſcenſum requiri: ita ſi v. gr. orificium inferius duplo majus fuerit orificio ſuperiori in caſtellum hiante non poſſe tubos infra octo pedes deſcendere, quin periculum adſit aquarum diſſolutionis. In his tamen exemplis theoretice conſideratis aquæ omni ſua velocitate ſine diminutione motus effluere ponuntur.

(II.) Ex eadem ratione patet, ſi tubi inferiora verſus convergant, tunc illos majorem quam 32. *ped.* admittere deſcenſum: imo ſine fine tubum continuari poſſe in caſu Figuræ 76. §. 13. explicatæ, ut & infinitis aliis modis.

(III) Si vero altitudo ſuperficiei aqueæ in caſtello ratione loci propoſiti negativa fuerit, veluti fit, cum aquæ trans montem vehendæ ſunt, nunquam poterit quomodocunque res inſtituatur, altitudo excedere triginta duos pedes, quod patet ex §. 15. Si enim aquæ vel plane infinitè parva transfluant velocitate, vis cohæſionis jam requiritur, quæ ſit æqualis toti columnæ aqueæ, atque major vis requiritur, ſi notabili velocitate transfluxerint. Hinc remedia ab aliquibus Scriptoribus allata vana puto: ſcio quidem ſine alio artificio aquas ſæpe ſuſpenſas hærere ultra altitudinem 32. pedum, & Mercurium ultra 30. pollices; ſed is effectus incertus eſt nec ſibi conſtans. Quidam etiam affirmant fluxum aquarum per ſiphones recurvos fieri in vacuo: an vero vacuum tale fuerit, ut ne ſexageſima quidem aëris pars in recipiente remanſerit, & num altitudo tubi plus quam dimidio pede ſuperficiem aquæ hauriendæ exceſſerit ignoro. Sic igitur, quæ de ſubſecutura aquarum ſolutione dixi, non aliter quam hypothetice dicta velim conſiderentur. Sufficiet quod accurate determinaverim quanta vi aquæ ad ſeparationem mutuam urgeantur.

§. 17. Sunt porro alia naturæ phænomena, quorum vera explicatio ab iſta theoria *hydraulico-ſtatica* pendet: veluti quod fumus per caminum aſcendens aërem per foramen in camino factum magno poſt ſe trahat impetu: quod ventus ex loco anguſtiori in apertiorem flans aliquid de ſua elaſticitate perdat, prouti id colligitur ex eo, quod feneſtræ apertæ ab aëre, è camera egreſſum ob majorem ſuam elaſticitatem, tentante claudantur; & hujusmodi alia, quæ examinare ſingula non licet.

Poſſunt fluidorum motorum preſſiones quidem infinitis variari modis; puto tamen omnia ad principia noſtra reduci poſſe: duas iſtius theoriæ examinavi-

navimus ſpecies; primam deduxi ex cognito motu, quem fluidum habiturum ſit, ſi in loco determinandæ preſſionis foraminulo infinite parvo vas perforetur: alteram *à priori*, ut dicunt, ex theoria noſtra generali deduxi; ſæpe utraque ſimul locum obtinet, ut altera alterius opem requirat, & tunc alia oritur preſſionum æſtimatio, quam unico indicabo exemplo.

§. 18. Putemus in vaſe, quod figura 72. ſiſtit, tubum horizontalem nonſolum in extremitate, ſed & in ſua inſertione E G laminam habere in plano verticali in medio perforatam, manentibus cæteris poſitionibus §. 5. indicatis: aliam patientur preſſionem latera tubi E D à transfluente aquâ, quam nulla appoſita lamina E G & quidem minorem, quamvis minori velocitate transfluant. Ut preſſio hæc accurate definiatur, via calcanda eſt eadem, quæ in citato paragrapho quinto: nempe ante omnia quærenda eſt velocitas, quâ aquæ in tubo E D transfluunt, poſtquam hæc jam uniformis facta eſt. Deinde etiam inquirendum eſt in valorem $\frac{v\,dv}{dx}$, ſi tubus alicubi abrumpi ponatur.

Quomodo autem hoc inveniri poſſit, res eſt quæ potiſſimum pertinet ad ſectionem octavam, adhibitis ſimul cautelis §. 14. *ſectionis ſeptimæ*: In ſectione octava generaliter oſtenditur motus fluidorum per plura foramina transfluentium & in §. 14. *ſect.* 7. in ſpecie monſtratur, quomodo æſtimandus ſit *aſcenſus potentialis*, qui in guttulis generatur, quando hæ per foramen, non in aquam veluti ſtagnantem, ſed in aquam motu, qui negligi nequit, latam influit.

Si recte indicatis hiſce inſiſtas veſtigiis, reperies velocitatem, quacum aqua uniformiter per tubum E D transfluit, convenire huic altitudini

$$\frac{mmppa}{mmnn+nnpp-mmpp},$$

ubi per m, p, & n indicantur *reſpective* amplitudines foraminum in laminis E G & F D factorum ut & tubi E D: per a autem intelligitur altitudo aquæ ſupra tubum E D horizontaliter poſitum.

Si porro tubum abrumpi ponas in cd, guttulamque ad velocitate moveri v ſeu altitudinem huic velocitati debitam $= vv$, ſimulque longitudinem E c indices per c, longitudinem minimam ac per dx: æquationem invenies hanc

$$2cvdv + \frac{nn}{mm} v\,v\,dx = a\,dx, \text{ sive}$$

$$\frac{v\,dv}{dx} = \frac{mma - nnvv}{2mmc};$$

ſtubſtituatur nunc pro $v\,v$ valor modo indicatus $\frac{mmppa}{mmnn+nnpp-mmpp}$, & erit

$$\frac{v\,dv}{dx} = \frac{mmnn - mmpp}{2c\,(mmnn+nnpp-mmpp)}\,a,$$

cui preſſio quæſita eſt proportionalis. Sed ſi amplitudo orificii extremi indicata per p eſt veluti infinite parva, preſſio fit $= a$; Igitur eſt generaliter preſſio quæſita vi paragraphi quinti æqualis

$$\frac{mmnn - mmpp}{mmnn+nnpp-mmpp}\,a.$$

§. 19. Si amplitudo tubi n eſt veluti infinita ratione amplitudinum in laminarum foraminibus, fit preſſio $= \frac{mma}{mm+pp}$: & tanta etiam eſt altitudo, ad quam aqua in o effluens velocitate ſua aſcendere poteſt: id igitur conforme cum *paragrapho quarto ſectionis octavæ*, quia figura vaſis ceu ubique infinitæ amplitudinis non differre facit velocitatem aquæ exilientis.

Cum nulla eſt lamina in F, fit $p = n$, totaque preſſio evaneſcit. Notari id meretur, quia rationem oſtendit, cur in tubis divergentibus ſuctio tanta non ſit, quanta vi hypotheſeos, qua omnis *vis viva* conſervari ponitur, eſſe deberet: In præſenti enim caſu rationem habuimus illius *vis vivæ*, quæ continue abſumitur. Ita quoque nullam preſſionem patiuntur latera tubi, cum lamina quæ eſt in E G foramen veluti infinite minus, illo, quod eſt in F D, habet. Denique notari id quoque meretur, quod quamvis fluida per canales nullis laminis inſtructos mota generaliter affectent preſſionem, quæ reſpondeat differentiæ altitudinum illis velocitatibus debitarum, qua fluidum effluat poſt tempus infinitum per canalem abruptum & qua actu transfluit per canalem non abruptum, hanc legem tamen in præſenti caſu minime valere, ad quod animum attendere velim hos, qui viſa theoria noſtra *hydraulico-ſtatica*, propoſitionem generalem §. 10. ſynthetice demonſtrare volent. Erunt enim fortaſſe, quibus res hæc ita per ſe obvia videbitur, ut vix demonſtranda ſit: hos autem, ſi qui futuri ſint, ex falſa quadam veriſimilitudine ſibimet imponere, oſtendunt hujus modi leges particulares, quæ in *hydraulico-ſtatica* occurrunt.

§. 20.

§. 20. E re erit de his quoque, quæ §. 18. dicta sunt, experimenta sumere, tum pro velocitate aquarum in o effluentium, tum pro pressione ; inde enim præter pressionum leges confirmabitur etiam illa accelerationum theoria, quæ obtinet, cum continue pars quædam *vis vivæ* inutiliter absumitur, quod argumentum in sectione octava præsertim pertractavimus ; In experimento autem sumendo evitentur, quantum fieri potest, impedimenta, quorum jam sæpe mentionem fecimus.

§. 21. Adjiciam hic quæstionem quæ quidem non ad staticam fluidorum pertinet, sed ad hydraulicam seu motum fluidorum, quæ vero sine istis præmissis regulis *hydraulico-staticis* solvi nequit. Quæritur in figura septuagesima secunda (nullam hic amplius in E G laminam considero) si tubus foramine in ac perforetur finitam rationem habente tum ad amplitudinem tubi tum ad amplitudinem foraminis o, motusque aquarum jam uniformis factus fuerit, quæritur, inquam, quanta velocitate aquæ per utramque aperturam erupturæ sint.

Sit jam rursus altitudo B E $=a$, amplitudo tubi $=n$ amplitudo orificii in $o=p$: amplitudo foraminis $ac=m$: velocitas aquæ per o effluentis $=v$: Erit velocitas aquæ quæ foramen ac præterfluit $=\frac{p}{n}v$. Igitur ibidem in latera tubi exercet pressionem, quæ est $=a-\frac{ppvv}{nn}$ (per §. 5.) & propterea suppono proxime fore tantam quoque altitudinem, quæ generare possit velocitatem, qua aqua per foramen ac exilit: ipsam vero hanc velocitatem esse $=\sqrt{\left(a-\frac{ppvv}{nn}\right)}$. Hoc posito erunt velocitates in foraminibus o & ac ut v ad $\sqrt{\left(a-\frac{ppvv}{nn}\right)}$: sicque quælibet guttula tubum in G E ingrediens, cum pervenit ad regionem primi foraminis, in duas dispescitur partes, quarum altera per ac, altera per o effluit : suntque hæ partes respective, ut velocitates, quibus fit effluxus utrobique ductæ in amplitudines foraminum. Igitur si massa guttulæ integræ G E dicatur g, erit pars ejus per ac effluens æqualis

$$gm\sqrt{\left(a-\frac{ppvv}{nn}\right)}:\left[pv+m\sqrt{\left(a-\frac{ppvv}{nn}\right)}\right]$$

& pars altera per o effluens $=$

gpv :

$$gpv : \left[pv + m\sqrt{\left(a - \frac{ppvv}{nn} \right)} \right].$$

Si hæ partes multiplicentur *reſpective* per quadrata ſuarum velocitatum, habebuntur earundem *vires vivæ*, quarum aggregatum æquandum eſt cum $g \times a$, id eſt, cum *deſcenſu actuali* guttulæ g per altitudinem a. Sic obtinetur talis æquatio, ſi reducatur

$$n^3 vv - n^3 a = mpv\sqrt{(nna - ppvv)} \text{ ſive}$$

$$vv = \frac{2n^6 + mmnnpp + nnmp\sqrt{4n^4 + mmpp - 4nnpp)}}{2n^6 + 2mmp^4} a,$$

hæcque quantitas exprimit altitudinem pro velocitate aquæ in o effluentis, qua cognita habetur quoque altitudo ſimilis pro altero foramine ac, quæ nempe eſt $= a - \frac{ppvv}{nn}$.

§. 22. Si $p = n$, fit $vv = a$; ergo tunc aquæ tota velocitate exiliunt ſolita per foramen o, & per alterum foramen ac nihil effluit. In utroque porro foramine velocitas reſpondet integræ altitudini a, ſi p eſt veluti infinite parva: Si vero m eſt infinite parva, fit quidem $vv = a$, ſed altitudo velocitatis pro foraminulo ac eſt $= a - \frac{pp}{nn} a$, ut §. 7. jam indicatum fuit:

Si $m = p$, fit $vv = \frac{n^4 a}{n^4 - nnpp + p^4}$; & $a - \frac{ppvv}{nn} = \frac{(nn - pp)^2 a}{n^4 - nnpp + p^4}$.

Denique obſervari poteſt, aquas per foramen o ſemper majori velocitate ejici, quam quæ altitudini a reſpondet, quod utique fit, quia aquæ in E d veluti impetum faciunt in aquas d F.

Interim quamvis omnia hæc Corollaria egregie cum indole argumenti conſentiunt, non poteſt tamen ſolutio iſtius problematis aliter quam proxime vera cenſeri.

EXPE-

EXPERIMENTA
Hydraulico-ſtatica pro Sectione XII.

Ad §. §. 3. & 4.

PReſſiones, quæ dictis expoſitæ fuerunt paragraphis, facili experimento confirmari poterunt, ſi vas, quale figura quadrageſima tertia ſiſtit, quodque §. 30. *ſect.* 8. deſcribitur, confici curetur, ejusdemque laminæ L Q tubus vitreus verticaliter implantetur, cujus orificium utrumque apertum ſit: obſervabitur ſic obturatis foraminibus H & N totoque ſyſtemate aquis repleto, aquam in tubo vitreo ad libellam A B aſcendere, aut illam propter naturam tubulorum capillarium tranſcendere. Dein autem ſi digitus ab orificio N removeatur, obſervabitur, aquam in tubo vitreo deſcendere & captis menſuris, invenietur, ni fallor, altitudinem aquæ in tubo vitreo reſiduam (detracta altitudine virtuti tuborum capillarium debita) eſſe $= \frac{\alpha\alpha \times LB - \gamma\gamma \times NQ}{\alpha\alpha + \gamma\gamma}$, uti dictum eſt §. 3. ubi denominationes harum litterarum explicantur.

Si porro ab utroque orificio H & N digitus removeatur, tunc erit eadem altitudo aquæ in tubo vitreo reſidua talis, quæ §. 4. indicatur. Similiter poteſt tubus vitreus laminæ Q N inſeri, isque deinde inflecti, ut cognoſci poſſit, an preſſiones quoque in lamina Q N recte definitæ fuerint.

Experimenta vero quæ ad preſſiones aquarum per tubos latarum pertinent ipſemet coram Societate noſtra inſtitui & deſcripta ſunt in tom. IV. Commentariorum *pag.* 194. Illa igitur, ut ibi deſcripta ſunt, hic allegabo.

„ Uſus ſum arca lignea, cujus latitudo erat unius pedis, longitudo trium „ pedum, altitudo 14. pollicum. Hanc aqua implevi ejuſque parti infimæ „ fiſtulam accurate cylindricam ex ferro fabricatam infixi horizontaliter. Ita „ autem factus erat tubus iſte ferreus: longitudinem nempe habuit A B „ (Fig. 77.) 4. poll. 2. lin. Angl. diametrum B C 7. lin. in medio tubus Fig. 77. „ foraminulo *m* erat perforatus, ibidemque tubulus D E pariter ferreus ſex li- 78 & 79. „ neas longus ac ſeſquilineam in diametro habens afferruminatus erat, ita ut

„ foraminulum *m* in medio basis foveret : Huic postmodum tubulo impositi
„ tubum vitreum aquabilis amplitudinis, ut apparet in figura 79. quæ modum
„ totius experimenti indicat. Porro tria opercula confieri curavi tubo ferreo adaptata, foramine diversæ magnitudinis pertusa : tale operculum repræsentatur Figura 78.

„ Hisce omnibus conjunctis eum in modum, quem ostendit figura 79,
„ factoque, ne aqua per alias rimas, quam per aperturam in B C efflueret, ob-
„ turavi orificium in B C, tumque observavi in tubo vitreo verticaciter posi-
„ to punctum *n*, ad quod aquæ ascendebant, idque filo fericeo circumvolu-
„ to notavi : prius autem exploraveram virtutem capillarem istius tubi vitrei,
„ hancque inveneram quinque linearum, ita ut tubo aquæ verticaliter immis-
„ so differentia inter utramque aquæ superficiem esset quinque linearum:
„ propterea punctum *n* supra superficiem E F elevatum fuit totidem lineis,
„ hincque in calculo quævis altitudo D *n*, D *g*, quinque lineis diminuta cen-
„ senda est.

„ In singulis experimentis arca aquis ita plena conservata fuit, ut alti-
„ tudo A F esset 9. *poll.* 7. *lin.* altitudo autem D *n* 10. *poll.* His omnibus ita
„ ad experimentum præparatis, tunc aperto orificio in B C aquis effluxus
„ concedebatur & protinus descendit aqua in tubo vitreo, veluti ex *n* in *g*, quem
„ locum *g* rursus alio filo fericeo antea tubo circumvoluto notavi. Et sic de-
„ nique talia cepimus experimenta quæ respondent §. 5. & seqq.

Experimentum 1.

„ Cum diameter foraminis in operculo B C esset 2½ *lin.* fuit descensus
„ *n g* tantillo major una linea, ita ut nulla differentia inter theoriam & succes-
„ sum experimenti observari potuerit.

Experimentum 2.

„ Assumto alio operculo, in quo diameter foraminis erat 3$\frac{2}{5}$ *lin.* aut paul-
„ lulum major, descensus *n g* observatus fuit sex linearum cum duabus ter-
„ tiis, plane rursus, ut theoria indicat.

Experi-

Experimentum 3.

„ Adhibito tertio operculo, in quo diameter foraminis erat 5. *lin.* aut
„ aliquantulum minor, descensum *n g* observavimus 28. *lin.* Vi theoriæ de-
„ bebat esse circiter 29. *lin.* nec enim foramen omnino quinque lineas in dia-
„ metro habere visum fuit. Differentia parvula tribuenda est impedimentis,
„ quæ aqua in transfluxu per fistulam patitur, majoribus quam in præceden-
„ tibus experimentis, ob auctum motum intra fistulam.

Experimentum 4.

„ Denique nullo apposito operculo aquas pleno orificio effluere sivi-
„ mus, tuncque omnis fere aqua è tubo vitreo egressa fuit: pars tamen ali-
„ qua remansit, quam deprehendimus octo lineas altam: Earum autem quin-
„ que tribuendæ sunt virtuti tubi capillaris, tres reliquæ debentur impedimen-
„ tis, quæ aqua in transfluxu à D usque ad B offendit.

„ Sic igitur experimenta ad amussim cum theoria conveniunt: Inde
„ autem non difficile est prævidere, fieri posse, ut latera fistulæ non solum
„ non premantur versus exteriora, sed & ut versus axem fistulæ introrsum
„ comprimantur (confer. §. 11.). Id autem edoctus sum hoc alio experi-
„ mento.

Experimentum 5.

„ Loco tubi cylindrici AB adhibui conicum, cujus orificium exter-
„ num erat majus orificio interno, simulque usus sum tubo vitreo incurvato,
„ qualem ostendit Figura 80. Et cum ante fluxum aqua hæsit in tubo vitreo Fig. 80.
„ in *n*, descendit in eodem tubo aqua usque in *g*, cum aquæ effluerent per tu-
„ bum conicum: fuitque punctum *g* infra D, indicio compressum fuisse du-
„ rante fluxu tubum conicum. In his autem casibus impedimenta motus sunt
„ insignia, quæ faciunt ut velocitates aquæ in orificio externo admodum
„ minores sint, quam quæ respondent altitudini aquæ: hancque ob rationem
„ altitudo puncti D supra *g* tanta non fuit, quanta alias futura fuisset, fuit ta-
„ men aliqua. Similem effectum alio obtinui modo, sed admodum notabi-
„ liorem (confer. §. 12.). Experimentum hoc alterum subsequente anno coram
„ Academicis institui, præsente Serenissimo Portugaliæ Principe Emanuele.

Experimentum 6.

Fig. 81. „ In Figura 81. repræſentat ACFB cylindrum, in cujus fundo im-
„ plantatus erat tubus conicus D G H E; hicque ad latus habuit parvulum tu-
„ bulum in *l*, qui reciperet extremitatem tubi vitrei incurvati *l m n*; altitudo
„ C A erat 3. *poll.* 10. *lin.* E *l* 4. *lin.* *l* H 2. *poll.* 9½. *lin.* amplitudo tubi conici in *l*
„ erat ad amplitudinem orificii G H ut 10. ad 16. *ln* erat 5. *poll.* 6. *lin.* ejuſque
„ orificium *n* erat aquæ in vaſculo M ſubmerſum.

„ Appoſito digito orificio G H impletoque vaſe ſtillabat aqua per tu-
„ bum vitreum *l m n* in vas M: remoto autem digito & effluentibus jam aquis
„ per G H, motu reciproco aqua ſponte ex vaſculo M aſcendit per tubum
„ *n m l*, & una cum reliquis effluxit per G H, donec totum vaſculum M eva-
„ cuatum eſſet. Affundebantur autem ſuperius continue aquæ, ut vas plenum
„ conſervaretur. Si digito pars orificii G H obtegebatur, facile erat efficere ut
„ pro lubitu aquæ in tubo vitreo *l m n* ſurſum deorſumve moverentur.

Si quis etiam experimentis explorare voluerit, num theoria cum problemate §. 18. conveniat, non male operam ſuam collocaverit, quandoquidem non ſolum ſic novam hanc noſtram *hydraulico-ſtaticam*, ſed & theoriam *Sect.* 8. novam pariter & à nemine tractatam egregio exemplo eoque facillimo illuſtraverit.

Hiſce jam in chartam conjectis ipſe experimenta ſumſi, quorum modo mentionem feci: Machina ad id uſus ſum eadem, quam modo deſcripſi, quæque Figura 79. repræſentatur: ſed inſuper, ut natura rei poſtulat, in A tubo aliud operculum impoſui: eratque altitudo aquæ A F 8. *poll. Lond.* diameter tubi ferrei A C rurſus 7. *lin.* Operculis quoque iiſdem uſus ſum, quibus ante: In quovis autem experimento deſcenſum obſervavi, quem ſuperficies *n* fecit, cum digitus ab operculo B C removeretur: ſimul autem menſura capta altitudinis verticalis orificii C ſupra pavimentum obſervavi diſtantiam iſtius lineæ verticalis à loco, in quem vena aquea incidebat. Hanc diſtantiam vocabo *amplitudinem jactus*: altitudo autem hæc verticalis erat in ſingulis experimentis 19. *poll.* His ita præparatis experimenta feci talia.

Experi-

Experimentum 7.

Cum diameter orificii interioris operculi eſſet $2\frac{1}{5}$. *lin.* & diameter orificii exterioris orificii $3\frac{2}{5}$. *lin.* fuit deſcenſus *n g* paullo minor, quam 7. *poll. amplitudo jactus* 9. *poll.* In theoria autem §. 18. expoſita, indicatur deſcenſus *n g* 6. *poll.* 10. *lin.* & *amplitudo jactus* $9\frac{1}{2}$. *poll.*

Experimentum 8.

Deinde fuit diameter orificii interni 5. *lin.* & diameter alterius orificii $3\frac{2}{5}$. *lin.* fuit deſcenſus *n g* fere 17. *lin.* & *amplitudo jactus* 24. *poll.* In theoria eſt *n g* $17\frac{3}{4}$. *lin.* & *amplitudo jactus* 23. *poll.*

Experimentum 9.

Porro cum eſſet diameter orificii interni $3\frac{2}{5}$. *lin.* & diameter orificii exterioris 5. *lin.* fuit deſcenſus *n g* fere idem, qui in experimento 7. nempe circiter 7. *poll.* Verum *amplitudo jactus* fuit major, ſcilicet 11. *poll.* In theoria eſt *n g* 6. *poll.* 11. *lin.* & *amplitudo jactus* fere 11. *poll.*

Experimentum 10.

Denique exiſtente diametro orificii interioris $3\frac{2}{5}$. *lin.* & diametro orificii exterioris $2\frac{1}{5}$. *lin.* fuit deſcenſus *n g* circiter unius pollicis atque *amplitudo jactus* 23. *poll.* In theoria eſt *n g* $=$ 14. *lin.* & *amplitudo jactus* $=$ $22\frac{1}{2}$. *poll.*

Omnia profecto hæc experimenta egregiè cum theoria conveniunt; fortaſſe major conſenſus futurus fuiſſet, ſi majori accuratione foraminum menſuras accipere licuiſſet; nemo tamen, ut puto, minimis iſtis numerorum differentiis offendetur. Oriuntur autem maximè à compreſſione aquæ in A C, quæ producitur, dum guttulæ per orificium interius canalem ingredientes partem motus amittunt, hinc amplitudo jactus tantillo major & deſcenſus *n g* minor ſunt in theoria quam in experimentis, nolui hujus rei menſuram adjicere, quamvis id in poteſtate fuiſſet, ne calculus fierit intricatior.

HYDRODYNAMICÆ

SECTIO DECIMA TERTIA.

De reactione fluidorum ex vasis effluentium eorundemque, postquam effluxerunt, impetu in plana quibus occurrunt.

§. I.

AQuæ dum ex vase ejiciuntur simili agunt modo in vas, ex quo effluunt, quo globus in tormentum bellicum aut sclopetum, ex quo explodi-tur: vas nempe retropellunt: & id quidem jam annotavit Newtonus in *princ. Math. phil. nat. edit. prim. p.* 332. recteque inde deducit ascensum pilarum, quæ pulvere pyrio, carbone temperato implentur; materia enim inflammata, dum per foramen paullatim expirat, pilas in altum projicit.

Sed nec satis generaliter pro rei momento argumentum pertractavit citatus auctor (cum id ex ipsius instituto non erat) nec veram rei mensuram dedit. Imo in duabus editionibus posterioribus id prorsus silentio præteriit: putavit autem *vim illam repulsionis esse æqualem ponderi cylindri aquei, cujus basis sit orificium aquas transmittens & cujus altitudo sit æqualis altitudini superficiei aquæ supra foramen.* Recte quidem hæc mensura deducitur ex opinione, quam tunc temporis fovebat Newtonus, circa velocitatem aquæ ex vase effluentis, dum statueret aquam ad dimidiam superficiei altitudinem sua velocitate ascendere posse.

Prouti autem hujus propositionis falsitas nemini amplius nunc ignota est, ita & alterius defectum inde quivis facile colliget, quamvis prima fronte satis verisimilis.

§. 2. Considerabimus primo rem in casu simplicissimo, quo nempe aquas ex vase infinitæ amplitudinis horizontaliter effluere ponemus. Habeo autem demonstratum repulsionis vim non statim à fluxus initio totam adesse, nisi quatenus & ipsa velocitas in aquis effluentibus tota adsit, ita ut si vas non

sit

fit infinitæ amplitudinis, vis repulsionis una cum velocitate aquarum effluentium sensim sensimque crescat, aut etiam decrescat pro circumstantiarum natura: Ab his autem mutationibus momentaneis animum primo abstrahemus, fluxum ex vase infinito fieri æquabilem ponendo. Atque sic optime definietur vis repulsionis, si inquiratur, quænam sit vis ad motum producendum requisita: Hunc vero in finem non solum ad velocitatem aquæ effluentis, sed & ad illius quantitatem erit respiciendum; quantitas autem pendet partim à magnitudine orificii, partim à contractione venæ, quæ posterior variabilis est: Vidimus quidem in *Sect. IV.* posse totam evitari; si tamen quædam sit, erit Sectio venæ maxime contractæ sive attenuatæ ceu orificium considerandum & tunc dico fore *vim repulsionis æqualem ponderi cylindri aquei, cujus basis sit orificium aquas transmittens* (id est, Sectio venæ horizontalis maxime contractæ) *& cujus altitudo sit æqualis duplæ altitudini superficiei aqueæ supra foramen vel accuratius, duplæ altitudini, velocitati aquæ effluentis debitæ.* Igitur si nulla sit venæ contractio, prouti nulla est, cum per tubulum brevem aquæ effluant, repulsio duplo aut fere duplo major erit, quam à Newtono definita fuit. Fig. 74.

§. 3. Ut hanc propositionem demonstremus, considerandum hic erit principium aliquod Mechanicum cujus usum in aliis etiam quæstionibus solvendis sæpe expertus sum: principium hoc est:

Si corpus à quiete velocitatem eandem per pressiones motrices directas utcunque variabiles acquisiverit, atque singulæ pressiones in tempuscula sua multiplicentur, erit summa omnium productorum semper eadem, id est, si pressio sit = p, *tempusculum* = d t, *erit* ∫ p d t *constans.* Hanc rem clarius exposui in Comment. Acad. Imp. Petrop. tom. 1. pag. 132.

§. 4. Ponamus jam cylindrum infinitæ veluti amplitudinis, ex quo aquæ horizontaliter effluant velocitate uniformi, abstrahendo ab actione, quam gravitas exerit in particulas, postquam jam effluxerunt, ita ut singulæ horizontaliter & uniformiter moveri pergant; particulæ autem accelerantur pressionemque patiuntur, quamdiu maximus velocitatis gradus nondum adest, huncque obtinent cum ad locum venæ maxime contractæ pervenerunt; hæc est ratio, quod sectionem venæ ibidem conceptam ceu orificium effluxus consi-

ſiderandum eſſe dixi. Sit amplitudo iſtius Sectionis = 1, habeantque ibi aquæ velocitatem quæ debeatur altitudini A: ponatur, cylindrum aquæ effluxiſſe, qui pro baſe habeat 1 & pro longitudine L: ſi tempus exprimatur per ſpatium diviſum per velocitatem, erit velocitas altitudini A debita exprimenda per $\sqrt{2A}$, tempuſque fluxus per $\frac{L}{\sqrt{2A}}$. His præmiſſis indagabimus in preſſionem motricem, quæ poſſit tempore $\left(\frac{L}{\sqrt{2a}}\right)$ cylindro L communicare velocitatem $\sqrt{2A}$: ſit illa preſſio = p: putetur brevioris calculi ergo egiſſe tempore t cylindroque dediſſe velocitatem v; erit $dv = \frac{p\,dt}{L}$ & $v = \frac{p\,t}{L}$, hinc $p = \frac{Lv}{t}$; ponatur jam $\sqrt{2A}$ pro v & $\frac{L}{\sqrt{2A}}$ pro t atque erit $p = (L\sqrt{2A}) : \left(\frac{L}{\sqrt{2A}}\right) = 2A$. Eſt igitur preſſio aquam ad effluxum conſtanter ſollicitans æqualis ponderi cylindri aquei, cujus baſis ſit orificium aquas tranſmittens ſupra definitum & cujus altitudo ſit æqualis duplæ altitudini velocitati aquæ effluentis debitæ: & tanta quoque eſt reactio, quæ vas repellit. Q.E.D.

§. 5. Eadem eſt demonſtratio ſi aquæ non per orificium ſed per tubum horizontalem cylindricum velocitate uniformi effluant, aut etiam per tubum utcunque inæqualiter amplum: poſterius id directe demonſtrari etiam poteſt, ſi bene exprimatur preſſio requiſita in ſingulis guttis, ut hæ debita velocitatum incrementa aut decrementa ſuſcipiant.

§. 6. Altitudo, quam vocavimus A, parum quidem differt in experimentis ab altitudine aquæ ſupra orificium effluxus, præſertim ſi aquæ ex vaſe valde amplo per orificium ſimplex, idque non admodum parvum effluant: differt autem ſæpius notabiliter orificium effluxus à ſectione minima venæ, quam nos ceu orificium aquas tranſmittens conſideramus; id quantitas aquæ dato tempore effluentis cum velocitate ſua comparata in experimentis indicat.

Hinc fit ut propoſitio noſtra §. 3. ad experientiam vocata ordinario non multum diſcrepet ab propoſitione Newtoni §. 1. expoſita; ſi vero omnia ſollicite evitentur, quæ contractionem venæ producere & quæ velocitatem diminuere poſſunt, vis repellens ſecundum theoriam noſtram fiet tantum non duplo major, quam quæ à Newtono fuit definita & tunc talis etiam experimentis confirmatur.

At

At ut rem plane in apricum ponamus, eam generalius nunc profequemur, idque tentabimus, ut vim repellentem à fluxus initio, dum velocitates continue mutantur, determinemus: neque enim primum noſtrum theorema aliter quam cum velocitas invariata manet locum habet. Ut in quæſtione hâc paullo intricatiore pertractanda eo intelligibiliores ſimus, hîc quædam generaliora præmonuiſſe juvabit.

§. 7. *Quantitas motus* eſt factum ex velocitate in maſſam: ſi velocitates ſint inæquales, habebitur *quantitas motus abſoluta*, ſi ſingulæ particulæ per ſuam reſpective velocitatem multiplicentur productorumque ſumma accipiatur. *Quantitas motus* generatur à preſſionibus motricibus dato tempore urgentibus & effectus cauſæ eſt æqualis cenſendus: Igitur ſumma preſſionum motricium per ſua tempuſcula multiplicatorum æſtimanda eſt ex genita quantitate motus. Et quia quælibet preſſio motrix reagit in vas, ex quo aquæ effluunt, erit tota vis repellens pro quovis momento æqualis novæ quantitati motus diviſæ per tempuſculum, quo generatur. His præmonitis ad quæſtionem ipſam progredior.

§. 8. Sit igitur vas infinitæ amplitudinis ACDB (Fig. 82.) eique horizontaliter infixa fiſtula EHID, cujus amplitudines utcunque inæquales ponuntur: amplitudo orificii HI fuerit $=1$, longitudo fiſtulæ $=m$; velocitas utcunque variabilis in HI $=\sqrt{2v}$, ſeu talis, quæ debeatur altitudini v: dico primo, fore quantitatem motus abſolutam aquæ in fiſtula contentæ æqualem $m\sqrt{2v}$, id eſt, talem ac ſi fiſtula eſſet cylindrica ſuaque amplitudine orificium HI exæquaret, quia nempe cujuslibet ſtrati FG *gf* velocitas eſt maſſæ reciproce proportionalis. Fig. 82.

Jam vero fingamus dato tempuſculo infinite parvo exilire per orificium HI columellam HLMI, cujus longitudinem HL vel IM ponemus $=\alpha$: erit maſſa hujus columellæ $=\alpha$, habebitque quantitatem motus $=\alpha\sqrt{2v}$: ſed eodem tempore maſſa aquæ in fiſtula contentæ acquiſivit quantitatem motus $\frac{mdv}{\sqrt{2v}}$ (habuit enim $m\sqrt{2v}$); eſt igitur quantitas motus abſoluta dato tempuſculo genita $=\alpha\sqrt{2v}+\frac{mdv}{\sqrt{2v}}$; hæc vero ſi dividatur per idem tempuſculum (quod exprimendum eſt per $\frac{\alpha}{\sqrt{2v}}$) habebitur, ut vidimus §. 7. preſſio quæſita vas repellens, quæ proinde ſi vocetur p, erit

$$p = \left(\alpha\sqrt{2v} + \frac{m\,dv}{\sqrt{2v}}\right) : \frac{a}{\sqrt{2v}}, \text{ sive}$$

$$p = 2v + \frac{m\,dv}{a}.$$

(α) Apparet inde ultimam definitionem quæstionis pendere à ratione quæ intercedit inter dv & α; hanc vero in Sectione tertia generaliter definivimus, nulla tamen impedimentorum, quæ debentur casui, facta attentione. Igitur & figura fistulæ hic aliquid confert.

(β) Sequitur porro, si fluxus uniformis factus ponatur, esse p constanter $= 2v$, quia tunc $dv = 0$: Id vero conforme est cum eo, quod demonstravimus §. 5. Donec vero fluxus incrementa accipit (quod quidem facit notabiliter, idque diu satis, si canalis E I longior fuerit) vas aliam atque aliam patitur vim repellentem.

(γ) Habet dv ad α semper rationem realem: ergo vis repellens nunquam est nulla, sic ut à primo fluxus tempore vas repellatur, etiamsi tunc aquæ fere nullæ effluant ob exiguam earundem velocitatem. Verum, ut usus regulæ nostræ generalis unicuique pateat, eam nunc ad casum specialem applicabimus, tribuendo fistulæ EHID figuram cylindricam amplitudinis 1.

§. 9. Si igitur fistula ponatur cylindrica tota aperta in H I retentis cæteris positionibus & denominationibus, erit *vis viva* aquæ in fistula contentæ $= mv$; hujus incrementum $= m\,dv$, cui addenda *vis viva* columellæ HLM1 seu αv, eorumque summa æqualis facienda facto ex altitudine, quam habet superficies aquæ A B supra orificium H I, quamque vocabimus a, & ex massula α. Est igitur $m\,dv + \alpha v = \alpha a$, unde hic fit $\frac{dv}{\alpha} = \frac{a-v}{m}$. Isto autem valore substituto in æquatione superioris paragrahi fit

$$p = a + v.$$

unde talia deduco consectaria.

(α) Longitudo fistulæ nihil ad vim repellentem, quam vas sustinet, tribuit, si velocitas eadem ponatur, quia littera m è calculo evanuit, facit autem hæc longitudo (sicuti in superioribus satis superque demonstravimus) ut velocitates citiora aut lentiora incrementa capiant; quo longior enim fuerit

rit fiſtula, eo tardius accelerantur aquæ & viciſſim, ſic ut in inſtanti à quiete maximum ſuum celeritatis gradum acquirant, ſi longitudo fiſtulæ nulla fuerit; at ſi infinitæ fuerit eadem hæc fiſtula longitudinis, aquæ nonniſi poſt tempus infinitum notab lem celeritatis gradum acquirere poſſunt.

(ϛ) Fieri igitur poteſt non mutata aquarum altitudine, ut diſpendio aquarum quantumvis parvo, vis repellens notabilis ſit, eaque pro lubitu duret; & id quidem duplici obtineri poteſt modo, tum prolongando fiſtulam, tum etiam obturando ſæpius orificium, antequam aquæ notabilem velocitatis gradum attigerint; prior tamen modus liberum aquarum fluxum per fiſtulam ponit: retardato enim ab impedimentis extrinſecis, in prælongis fiſtulis nunquam vitabilibus, aquarum fluxu, diminuitur quoque vis repellens.

(γ) Liceat hic paucis attingere verbis propoſitionem aliquam ex *princ. math. phil. nat. edit. 2. Newtoni*: Auctor hic poſtquam ſententiam ſuam de velocitate aquarum ex vaſe effluentium in prima citati operis editione exhibitam mutaſſet, easque, ſi verticaliter ſurſum ejiciantur, ad integram ſuperficiei aquæ altitudinem aſcendere agnoviſſet in editione ſecunda, talia ſubjecit verba in *libro ſecundo propos. 36. coroll. 2. Vis qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columellæ aquæ, cujus baſis eſt foramen EF (vid. fig. Nevvt.) & cujus altitudo eſt 2 GI vel 2 CK.* Iſta ſententia à me olim & ab aliis fuit impugnata, ab aliis rurſus confirmata. Nunc autem poſtquam hanc aquarum motarum theoriam meditatus ſum, lis ita dirimenda mihi videtur, ut cum aquæ ad motum uniformem pervenerint, quæ quidem hypotheſis eſt Newtoni, tunc recte altitudine 2 G I vis illa definiatur, ſed ab initio fluxus, ubi velocitas adhuc nulla eſt, vis ſimplici altitudini G I reſpondeat, moxque creſcente velocitate ſimul vis aquam ad effluxum animans creſcat, & tandem ad eam magnitudinem exſurgat, quam Newtonus aſſignavit. Hæc nunc ſunt unicuique obvia, quia vis motum aquæ generans, de qua Newtonus loquitur, non poteſt non eſſe æqualis vi repellenti, quam vidimus eſſe æqualem $a + v$. Recte etiam Jll. Riccatus, cum quo mihi de hoc argumento res erat interrogatus, *unde vis illa duplæ aquarum altitudini conveniens oriri poſſit, cum*

obturato orificio gutta eidem imminens vi ſimplicis altitudinis urgeri manifeſte appareat, reſpondit, *diſtinguendum eſſe ſtatum quietis à ſtatu motus.*

§. 10. Si fiſtula vaſi implantata non ſit cylindrica, calculus ita erit ponendus.

Sit amplitudo canalis in F G vel $fg = y$; diſtantia ſtrati F G gf ab orificio E D $= x$, retineanturque cæteræ denominationes: erit *vis viva* aquæ in fiſtula contentæ $= v\int\frac{dx}{y}$, ejusque incrementum $= dv\int\frac{dx}{y}$, cui ut in §. præcedente factum eſt, addatur *vis viva* columellæ H L M I ſeu αv, eritque $dv\int\frac{dx}{y} + \alpha\dot{v} = \alpha a$; unde ſic oritur

$$\frac{dv}{\alpha} = (a - v) : \int\frac{dx}{y},$$

quo valore ſubſtituto in æquatione §. 8. fit

$$p = 2v + m(a - v) : \int\frac{dx}{y}.$$

Igitur cum in fluxu aquarum uniformi ſit $v = a$, erit tunc rurſus $p = 2a$. Cæterum quamdiu aquarum fluxus acceleratur, motus aquæ in vaſe A C D B orificio D E proximæ, à quo in toto hoc opere animum abſtraximus, hic non eſt negligendus: determinari autem recte motus iſte non poteſt, nec igitur accurate quadrat expreſſio quam dedi pro vi repellente ſi aquæ nondum uniformiter fluere ceperint, ſed cum æquabiliter fluunt aquæ valet expreſſio accuratiſſime.

§. 11. Poſtquam ſic demonſtravimus pro effluxu aquarum uniformi, vim repellentem ſemper eſſe æqualem ponderi cylindri aquei foramini ſuperinſtructi & ad duplam aquæ altitudinem exſurgentis, lubet id etiam indirecte demonſtrare per *deductionem ad abſurdum*, ut & regularum mechanicarum ignari propoſitionis hujus ſatis paradoxæ veritatem perſpiciant.

Hunc in finem conſiderabimus aquas verticaliter defluentes ex cylindro, abſtrahendo animum ab impedimentis velocitati aquarum aliquid derogantibus & ab illa contractione venæ, quæ vitari poteſt. Foramini reſpondeat tubus verticalis, qualis conſpicitur Fig. 76. habeant ſe omnia, ut in Sect. XII. §. 13. dictum fuit: aquæ habeant fluxum æquabilem: latera vaſis & canalis gra-

gravitate carere intelligantur, altitudo cylindri ponatur $= a$, & altitudo fistulæ $= b$, altitudo c F $= x$, amplitudo in E $= 1$; erit amplitudo in F $= \frac{\sqrt{(a+b)}}{\sqrt{(a+x)}}$ & in C $= \frac{\sqrt{(a+b)}}{\sqrt{a}}$: Denique ponatur amplitudo cylindri $=$ M. His positis quæremus pondus omnis aquæ ABCE: exprimemus pondus aquæ ABC per M a & sic erit pondus aquæ CE $= 2a + 2b - 2\sqrt{(aa+ab)}$; ergo pondus omnis aquæ ABCE $=$ M $a + 2a + 2b - 2\sqrt{(aa+ab)}$: Sic igitur posito aquas stagnare in vase & fistula, vis requisita ad suspendendam aquam est $=$ M $a + 2a + 2b - 2\sqrt{(aa+ab)}$.

Jam vero indagabimus vim similem cum aquæ per E tota sua velocitate (quâ nempe ad altitudinem $a+b$ ascendere possunt) effluunt: hæc autem habebitur, si à priori vi subtrahatur vis repellens: Si proinde hæc vis repellens ponatur, ut nos statuimus, $= 2a + 2b$, erit vis aquas, durante fluxu suspendens $=$ M $a - 2\sqrt{(aa+ab)}$.

At vero finge abesse tubum CE, & erit per easdem nostras regulas vis suspensoria, dum aquæ per orificium C erumpunt, rursus $=$ M $a - 2\sqrt{(aa+ab)}$, ideo, quia pondus aquæ ABC est M a & quia amplitudo foraminis C est $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}}$, quæ multiplicata per duplam altitudinem a dat $2\sqrt{(aa+ab)}$. Monstrat igitur nostra virium repellentium æstimatio, vim suspensoriam durante aquarum effluxu eandem esse, sive nulla sit fistula, sive adsit & quamcunque habeat longitudinem, modo fistula figuram habeat §. 13. Sect. XII. descriptam: atque hujus consensus & identitatis necessitas apparet quoque sine calculo ex ipsa rei natura, quando fistula ita formata nullam in aquis transfluentibus facit mutationem, cum vena aquæ sua sponte eandem figuram induit, quam habet fistula, quamdiu aquæ cohærent. Sed si aliter vim repellentem æstimemus, nunquam consensum illum inter vires suspensorias generaliter obtinebimus: Ita v. gr. si secundum sententiam communem dicamus vim repellentem esse æqualem ponderi simplicis cylindri sæpe nominati, erit vis repellens, dum aquæ per canalem CE ex vase ACB effluere finguntur $= a + b$; & hæc vis si subtrahatur à pondere totius aquæ ABCE seu M $a + 2a + 2b - 2\sqrt{(aa+ab)}$, relinquitur M $a + a + b - 2\sqrt{(aa+ab)}$ quæ est vis requisita ad suspendendum systema ABCE, dum aquæ fluunt: Vidimus autem hanc vim eandem esse debe-

re, si canalis CE absit: Sed tunc est vis suspensorra $= M a - \sqrt{(aa+ab)}$, quia pondus aquæ ABC est $= M a$ & vis repellens per hypothesin est simplex cylindrus foramini C ad altitudinem a superinstructus. Deberet igitur in hâc hypothesi semper esse $M a + a + b - 2\sqrt{(aa+ab)} = M a - \sqrt{(aa+ab)}$ seu $a + b = \sqrt{(aa+ab)}$, quod est absurdum. Similis absurditas demonstrari posset, si vena sursum verticaliter ascendere putetur: & frustra hic excuperetur pro communi sententia firmanda, venam effluentem CE fingi non posse tanquam continuam, nisi aliqua aquæ tenacitas fingatur simul (aliàs enim venam mox præ orificio in guttulas abruptum iri) & tenacitatem rei statum permutare: nam profecto nec velocitates aquæ à cohæsione mutua aquæ in CE mutantur nec latera canalis CE pressionem ullam sentiunt, sicut demonstravi Sect. XII. §. 13. ut taceam cohæsionem aquæ non oriri à tenacitate sed ab aliqua virtute magnetica seu à mutua attractione, à qua virtute centrum gravitatis in nullo systemate nec majorem nec minorem velocitatem acquirere potest. Sed hæc porro adversariorum exceptio in venis verticaliter ascendentibus nullum plane locum habet, cum aquæ ibi continuè maneant, si vel nulla aquis insit tenacitas aut mutua attractio.

At possem infinitis aliis modis & exemplis particularibus sententiam nostram confirmare, si hisce diutius insistere vellem. Ita v. gr. in Fig. 29. Sect. V. §. 4. descripta, si sit altitudo $NS = 1$, orificium $LM = 1$, & orificium $RS = 2$, erit $PB = \frac{1}{3}$, vis repellens, quæ oritur ab effluxu aquæ per $RS = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, & demonstrare possum vim repellentem, quæ prodit ab effluxu aquæ ex simplici cylindro RN per LM esse etiam $= \frac{4}{3}$, & sic vim repellentem totalem esse $= \frac{8}{3}$, quæ præcise facit duplum cylindrum aqueum foramini LM ad altitudinem $NS + PB$ insistentem. Talis autem consensus ex aliis theoriis falso receptis minime prodit, ita ut de nostra amplius non possint dubitare, nisi harum rerum penitus ignari: Id vero, quod dixi, vim repellentem aquæ ex simplici cylindro RN per LM effluentis esse $= \frac{4}{3}$, si demonstrare velim, postulat ut vis repellens definiatur, cum aquæ ex vase non infinito data velocitate quacunque non variata fluunt: Ne vero prolixior sim in hâc re, id aliis efficiendum relinquo; neque id nunc amplius magnam faceret operam; Pergo ad alia.

§. 12. Demonstrationes quas adhuc dedimus non valent nisi pro fistu-

lis

lis rectis, in quibus nempe uniuscujusque guttulæ vis motrix, indeque oriunda vis repellens, inter se singulæ conspirant, communemque habent directionem : at cum fistulæ vasi implantatæ, per quas aquæ effluunt, sunt incurvatæ, alius adhibendus est demonstrandi modus : Ut nihil in isto argumento prorsus novo omittamus, hunc quoque casum docebimus : nec erit, quod laboris pœniteat, cum inde veræ pressionum leges, quas natura non solum in his casibus, sed & multis aliis sequatur, apparebunt.

§. 13. Concipiamus itaque vasi infinito fistulam implantatam esse uniformis quidem amplitudinis, sed incurvatam secundum curvaturam qualemcunque AS (Fig. 83.) ita ut A locus sit insertionis, S locus effluxus : Ducantur tangentes in A & S, nempe AR & SB, sitque AB ad SB perpendicularis : fuerit velocitas aquæ per fistulam transfluentis uniformis & talis, quæ debeatur altitudini A ; amplitudo fistulæ ubique $=$ 1 : *Dico totam vim repellentem in directione SB sumtam fore rursus* $=$ $2A$, hancque solam adfore. Fig. 83.

Demonstrationis gratia ducantur infinite propinquæ nq, ep ad SB perpendiculares ; nm parallela eidem SB ; sit $Sq = x$, $qp = dx$; $qn = y$; $em = dy$: erit radius osculi in $en = \frac{-ds\,dy}{ddx}$, sumtis elementis en quæ vocabo ds pro constantibus ; habet autem columella aquæ intercepta inter e & n vim centrifugam, sic determinandam : gravitas columellæ est $= ds$ (quia basis ejus $= 1$ & altitudo $= ds$) atque si radius osculi foret $= 2A$, haberetur per theorema Hugenianum vis centrifuga particulæ æqualis ejusdem gravitati, & sunt vires centrifugæ cæteris paribus in reciproca ratione radiorum : est igitur vis centrifuga columellæ $= \frac{-2A\,ddx}{dy}$: exprimatur hæc vis centrifuga per ec ad curvam perpendicularem, ducaturque co ipsi BS parallela : resolvatur vis ec in oc & eo ; erit (ob similitudinem triangulorum eoc & nme) vis $oc = \frac{-2A\,ddx}{ds}$, vis $eo = \frac{-2A\,dx\,ddx}{dy\,ds} =$ (ob ds constans) $\frac{2A\,ddy}{ds}$.

Sed vis elementaris oc agit sola in directione SB, dum altera eo pro hac directione est negligenda : sumatur integrale vis elementaris oc cum constanti tali, ut integrale una cum abscissa evanescat : integrale hoc est $= 2A$

$= \frac{2Adx}{ds}$, quia in S est $dx = ds$: Nunc ut habeatur vis in directione tangentis S B pro tota fistula, ponendum est $\frac{RB}{RA}$ pro $\frac{dx}{ds}$, ergo tota vis secundum tangentem S B $= 2A - \frac{2A \times RB}{RA}$. Hæc vero oritur à vi centrifuga cujusvis guttulæ: sed alia vis supereſt consideranda; nempe dum aqua ex vase infinite amplo continue in fistulam influit velocitate uniformi respondente altitudini A, vas repellitur secundum directionem R A vi 2 A (per §. 4.) quâ resoluta in tangentialem secundum S B eique perpendicularem secundum B A, prior $\frac{2A \times RB}{RA}$ erit sola consideranda; & quia habet directionem communem cum vi $2A - \frac{2A \times RB}{RA}$ à vi centrifuga oriunda & modo definita, erit eidem addenda: sicque summa $2A - \frac{2A \times RB}{RA} + \frac{2A \times RB}{RA}$ vel 2 A exprimet vim repellentem secundum directionem S B.

Ut porro demonstremus sub nulla alia directione vas repelli, recurremus ad vim elementarem *eo*, quam vidimus $= \frac{2Addy}{ds}$, cujus integrale $= \frac{2A \times AB}{AR}$, quæ præcise annihilatur à vi 2 A vas repellente secundum directionem R A, postquam hæc debite resoluta fuit. Q. E. D.

§. 14. Hæc theorematis generalissimi simplicitas, quâ nempe vis repellens in directione aquis uniformiter effluentibus contraria indicatur constanter $= 2A$, *argumentum* esse potest, quod dicitur *ad hominem* pro ejusdem bonitate, iis qui ratiocinium nostrum aut non assequentur aut examinare non cupient sufficienti attentione. Si vero vim repellentem aquæ ex vase infinito in fistulam influentis sub directione A R statuas $= A$, vides systema repelli in directione S B vi quæ sit $= 2A - \frac{A \times RB}{RA}$, quod absurdum esse vel ipsa mihi indicare videtur formula. Neque in hâc opinione nulla esset vis in directione ad priorem perpendiculari: Nam vas deberet reprimi secundum directionem B A vi $\frac{A \times AB}{AR}$, quod iterum mihi est absurdum & cujus falsitatem experimento cognovi, in casu quo angulus A R S erat rectus & A B $=$ A R.

Mul-

Multa alia theoremata pro hoc argumento in tota ſua, quam habere poteſt, extenſione, ſumto erui & demonſtrari poterunt, pro fluxu aquarum nondum uniformi eoque per fiſtulam utcunque inæqualem, modo ſimul attendatur ad ea, quæ §. 8. monita fuerunt. Quia vero per ſingula ire non vacat, ad aliam progredior vim examinandam priori ſub directione contraria æqualem, illam nempe quam vena effluens in planum exerit, dum in illud perpendiculariter impingit.

§. 15. De impetu venæ aqueæ in planum impingentis multi commentati ſunt, plurimaque ſumſere experimenta. Ego quoque hâc de re quædam dedi in *Comm. Acad. Sc. Petrop. tom.* 2. Experimenta extant apud Mariottum in *tract. de mot aquarum*, in *hiſt. Acad. Sc. conſcripta a D. du Hamel. p.* 48. & alibi. Equidem non admodum conveniunt, plurima tamen indicare prima fronte videntur niſum venæ aqueæ uniformiter fluentis æqualem eſſe ponderi cylindri aquei, cujus baſis ſit foramen, per quod aquæ effluunt & cujus altitudo ſit æqualis altitudini aquæ ſupra foramen: Huic ſententiæ plerique imo omnes, adhæſerunt & adhuc adhærent, quia cum aliis quoque experimentis, præſertim quæ de globis in medio reſiſtente motis ſumi ſolent, mire convenit: Eandem igitur ipſemet ſecutus ſum, quamvis plura animum ſuſpendebant, in *cit. Comm. Petrop.* nec hæſitavi in ipſo hoc opere, quod ſub manibus habeo, Sectione nempe IX. §. §. 31. 32. illa inſtar exempli uti. Verum enim vero re attentius perpenſa, novisque adhibitis principiis, ſimulque aliis novi generis experimentis inſtitutis, clare tandem vidi communem iſtam opinionem de impetu venæ aqueæ eodem modo mutandam eſſe, ſicuti Newtoni de vi repellente, ſcilicet ut loco orificii conſideretur ſectio venæ contractæ & loco altitudinis aquæ adhibeatur dupla altitudo velocitati aquarum reali reſpondens: Demonſtratum enim habeo, vim repulſionis §. 2., expoſitam omnino æqualem eſſe impetui venæ, ſi hæc tota in planum perpendiculariter incidat: ſequitur inde impetum venæ majorem eſſe, quo minor fuerit venæ contractio, hâcque plane evanescente, & aquis ſimul tota ſua velocitate, quam in theoria habere poſſunt, erumpentibus, tum impetum duplo majorem eſſe, quam vulgo ſtatuitur: quia vero ſemper & velocitati aliquid decedit & vena non raro ad dimidium fere contrahitur, factum eſt ut experimenta pleraque ſimplam in Cylindro altitudinem arguere viſa fuerint in impetu illo æſtimando. Velim autem probe notetur, de venis ſolitariis tantum mihi hic ſermonem eſſe, quas

plana totas excipiant, non autem de fluidis corpora ambientibus in eademque impetum facientibus, veluti de Ventis aut fluminibus : dico enim hos duplicis generis impetus quos auctores adhuc confuderunt, probe à se invicem distinguendos esse, ob rationes infra breviter exponendas.

§. 16. Ratione venæ aqueæ sic censeo : aquas velocitate uniformi ex cylindro infinite amplo verticali A B M (Fig. 84.) per foramen laterale C M horizontaliter effluere pono, venamque perpendiculariter impingere in laminam E F : ita facile video, quia particulæ insequentes priores impediunt ne resilire possint, fore ut singulæ ad latera deflectantur, idque motu laminæ E F (si modo hæc sat magna fuerit, ut vena tota quamvis dispersa excipiatur) parallelo vel tantum non tali : Et quia omnia sunt in *statu permanentiæ*, fingere licet laminam E F vasi esse affirmatam, venamque lateribus C H D G L M circumdatam, ita, ut aquæ per hiatum circularem D E G F effluere ex vase A B C H D E F G L M censeri possint. Hoc si ita fuerit, demonstravimus §. 13. guttulas in D E effluentes vim repellentem quidem producere secundum E F ; sed simul apparet vim repellentem esse in G F priori contrariam ita ut ad hanc virium repellentium classem hic non sit attendendum. Quod vero ad directionem, laminæ E F vel cylindro B C, perpendicularem attinet, demonstravimus in fine ejusdem §. 13. sub ea directione plane nullam fieri repulsionem : Igitur tantum lamina E F propellitur, quantum cylindrus repellitur. Idque est quod demonstrare volui : Atque inde jam sequitur, *pressionem venæ aqueæ, quæ tota in laminam incurrit, tantam esse quanta pondus cylindri aquei, qui pro base habeat sectionem venæ (postquam hæc uniformem acquisivit amplitudinem) & pro altitudine duplam altitudinem velocitati aquarum (postquam hæc similiter uniformis facta est) debitam.*

Fig. 84.

§. 17. Non dubito multos fore, quibus propositio hæc plane nova suspecta videatur atque experimentis contraria : Hos vero perpendere velim, experimenta hactenus sumta nequaquam regulæ communi accurate respondere, & in plerisque casibus nostram Regulam parum differre à communi, quamvis in theoria maxime sint diversæ : tum etiam eos in antecessum monitos cupio, alia me instituisse experimenta, quæ singula meam sententiam exactissime confirmant, veteremque plane refellunt ! experimenta a me sumpta in fine Sectionis recensebo. Demonstrandi modus quo usus sui, fortasse etiam parum vide-

videbitur quibusdam accuratus, habeo autem aliam demonstrationem directam, quæ nova proprietate innititur Mechanica mihi aliquando observata, quamque hic communicabo, tum quia dictam demonstrationem facillime quivis inde deducere, tum etiam quia ad alios usus eandem impendere poterit: Ita autem se habet.

Si corpus movetur velocitate uniformi, directiones autem suas continue mutat à causis quibuscunque & utcunque agentibus, donec directionem acquisiverit perpendicularem ad primam directionem, sique singulæ pressiones corpus deflectentes resolvantur in duas classes, alteram parallelam primæ directioni, alteram perpendicularem; Denique si pressiones singulæ parallelæ multiplicantur per sua tempora; dico fore summam productorum constanter eandem, & quidem æqualem ei, quæ totum motum à quiete generare aut generatum totum absorbere valet.

Hâc affectione Dynamica, cum utimur in præsenti nostro negotio, consideranda est lamina E F, quæ sua in aquas reactione, earundem directionem mutat, usque dum perpendicularis ad primam facta fuerit: Ergo propositio præcedentis paragraphi ope hujus affectionis eodem modo demonstrabitur, quo usi sumus §. 4. ad determinandam vim repellentem ope principii §. 3. expositi. Hæc igitur vera idea videtur, quam de impetu aquarum mente concipere debemus: ponit autem guttas aquæ singulas secundum directionem laminæ ad latera resilire, à quâ indole aquas non recedere semper observavi: vidi tamen etiam guttulas aliquas sed paucas retrorsum resilire; hæ autem majorem pressionem producunt, quam quæ ad latera deflectuntur: Et eo ipso inducor, ut firmiter credam, si vena aquea magno impetu oblique contra planum impingat, v. gr. sub angulo triginta graduum, pressionem inde orituram plusquam dimidiam ejus, quæ à vena eadem directe impingente oritur, cum secundum regulas ordinarias exactè dimidiam vim exerere deberet: ratio ejus rei est, quod in impulsu obliquo plures particulæ resilire possint, quam in directo, imo fere omnes, si magna fuerit velocitas.

Si autem omnes ita resilire ponantur, ut angulus incidentiæ angulo reflexionis æqualis sit, tunc uterque impulsus idem censendus erit. Optimus hic aquarum pressiones æstimandi modus est, qui ratiocinio à *posteriori* innititur.

§. 18. Sequitur porro ex præfata affectione probe intellecta, eundem oriri à preſſionibus effectum ſive lamina aquas ad latera deflectat, ſive cauſa fingatur motum omnem, quem particulæ aqueæ cylindrum egreſſæ acquiſiverunt, abſorbens: Inde intelligitur quid futurum ſit, ſi orificium C M (Fig. 85.) per quod aquæ ex cylindro A B M effluunt, aliis aquis in vaſe P Q F E ſtagnantibus ſubmerſum fuerit: repelletur nempe cylindrus A B M verſus P Q intra vas P Q F E, ſi hoc cum cylindro non cohæreat; At ſi vaſa inter ſe fuerint firmata, nullam patietur ſyſtema preſſionem prævalentem; quanta enim eſt preſſio verſus P Q ab effluentibus aquis, tanta quoque oritur preſſio contraria verſus E F à continua deſtructione motus, quem particulæ cylindrum egreſſæ acquiſivere.

Fig. 85.

§. 19. Dixi de preſſione venæ, quam lamina totam etiamſi expanſam excipit: Venio ad alteram ſpeciem impetus aquarum, quem ſcilicet ſuſtinent laminæ fluido undique ſubmerſæ: puto autem hanc non poſſe *abſolute* definiri, quia ſingulæ particulæ in laminam impingentes aliter deflectuntur. Si vero cujuslibet particulæ deviatio cognita ponatur, non difficilis erit amplius quæſtionis ſolutio, mutato paullum theoremate, quo §. 17. uſi ſumus eoque generaliori reddito, nempe tali: *ſi angulus mutatæ in corpore moto directionis non fuerit rectus, ſed recto minor, tunc quoque minor erit ſumma productorum (de quâ antea ſermo fuit) in ratione ut ſinus verſus mutatæ directionis ad ſinum totum.*

Igitur pro quâvis guttula indagandum eſſet, quantum directionem motus ab obice, ſeu lamina curſui oppoſita mutare cogatur. At in theoria hujuſmodi definitiones exhiberi accurate vix poſſunt; nec experientia probat theoremata hanc in rem exhiberi ſolita; veluti quod conatus fluminis directe contra circulum impingentis duplo ſit major conatu ejuſdem fluminis contra ſphæram ejuſdem diametri, & quæ ſunt ſimilia: quod autem quantitas preſſionis pro ſphæra, qualis dari ſolet ab auctoribus, cum experimentis à Newtono aliiſque inſtitutis & in *princ. math. phil. nat.* recenſitis, ſatis accurate conveniat, id omnibus bene perpenſis caſui fortuito tribuendum eſſe cenſeo.

Theoremata quæ ad motum in mediis reſiſtentibus theoretice conſideratum faciunt, tum etiam varias obſervationes phyſicas dedi in *tom. II. Comm. Acad. Sc. Petrop. & ſeqq.* Neque proinde ea hic repetam, quamvis ad inſtitutum noſtrum pertineant; diutius meditationibus hiſce hydrodynamicis immorari non vacat.

vacat : Igitur ad finem propero. Novam hanc circa reactionem & impetum fluidorum theoriam, quæ receptam ab omnibus adhuc auctoribus opinionem evertit in re magni momenti, singulari Dissertatione prosecutus sum, quæ suo tempore *Commentar. Academ. Scient. Imp. Petropol.* inseretur eandemque indubitatis confirmavi experimentis. Venio nunc ad argumentum aliud, Geometrarum attentione minime indignum.

§. 20. Mentem aliquando subiit, posse ea quæ de vi repellente fluidorum, dum ejiciuntur, meditatus fueram, quæque hic maximam partem exposui, utiliter applicari ad novum instituendum navigationis modum: neque enim video, quid obstet, quo minus maximæ naves sine velis remisque eo modo promoveri possint, ut aquæ continue in altum eleventur effluxuræ per foramina in ima navis parte, faciendo ut directio aquarum effluentium versus puppim spectet. Ne quis vero opinionem hanc in ipso limine rideat, ceu nimis insulsam, è re erit nostra argumentum istud accuratius excutere & ad calculum revocare: utile enim esse potest multisque disquisitionibus geometricis est fertilissimum.

Incipiam ab eo, ex quo deinde apparebit, sub quibus circumstantiis maximus successus à nova ista navigatione expectari debeat.

§. 21. Notandum igitur est, navem ab hausti aquis continue retardari ob inertiam earundem, quando illis eadem velocitas communicatur quacum navis fertur & dum communicatur, navis à reactione aquarum retrorsum urgetur, simul ac ab earundem effluxu antrorsum premitur. Iste actionum contrariarum concursus limites ponit vi naves propellenti à data potentia absoluta obtinendæ: nisi enim actio prior adesset (de qua ut verum fatear diu non cogitavi) posset *labore hominum quantumvis parvo vis naves propellens utcunq; magna obtineri*, quod sic demonstro.

In sectione nona (vide præsertim §. 26.) ostendi, laborem hominum in elevandis aquis impensum, quem voce *potentiæ absolutæ* designo, æstimandum esse ex producto quantitatis aquarum in altitudinem elevationis, ita ut verbi gratia labore secundum omnes mensuras eodem possint & quatuor pedes cubici ad altitudinem sedecim pedum & sedecim pedes cubici ad alitudinem quatuor pedum elevari : Dico nunc porro pressionem uniformem, naves antrorsum propellentem adesse, quamdiu fluida velocitate æquali effluunt, quæ pressio æstimanda sit ex quantitate aquarum effluentium & ex radice al-

titudinis aquarum in vaſe ſupra foramen poſitarum : fuerit enim quantitas aquarum dato tempore effluentium $=$ Q; altitudo earum $=$ A, erit magnitudo foraminis aquas eructantis proportionalis cenſenda quantitati $\frac{Q}{\sqrt{A}}$ pro eodem tempore : at vero vis repellens, quæ hic navem promovet, æqualis eſt magnitudini foraminis ductæ in duplam altitudinem aquarum (per §. 4.) id eſt, æqualis quantitati $\frac{Q}{\sqrt{A}} \times 2A$ ſeu $2Q\sqrt{A}$. Ex comparatione utriusque propoſitionis ſequitur laborem hominum in elevandis aquis exantlatum eſſe ad vim naves propellentem inde obtinendam, ut QA ad $2Q\sqrt{A}$ ſive ut $\sqrt{A}$ ad quantitatem aliquam conſtantem : igitur quo minor eſt altitudo ad quam aquæ elevantur, eò major vis naves promovens ab eodem labore obtinetur, *ita ut labore hominum quantumvis parvo vis naves propellens utcunque magna obtineri poſſit.* Verum etiam inertia aquarum, quæ hauriuntur, (de qua ab initio hujus paragraphi diximus) naves retardans eo majorem obtinet rationem ad vim naves propellentem, quo minor aſſumitur altitudo A, ad quod animus hic probe eſt advertendus.

§. 22. Perſpicuum eſt ex præcedente paragrapho, altitudinem ad quam aquæ ſunt elevandæ eſſe ex earum claſſe, quæ alicubi maximæ ſunt. Ut vero altitudo maxime ad propoſitum proficua determinetur, aliæ nobis ſe offerunt quæſtiones prius examinandæ.

Problema.

Ponatur navis uniformi progredi velocitate, quæ generatur lapſu libero per altitudinem B, fingaturque aquas continue affluere in navem, veluti ſub forma pluviarum, & quidem tanta quantitate, quantam remotis omnibus impedimentis alienis ſuppeditaret cylindrus conſtanter plenus ad altitudinem A per orificium magnitudinis M. Quæritur quantam reſiſtentiam navis ab iſto perpetuo & uniformi aquarum affluxu earundemque inertia patiatur.

Solutio.

Aſſumatur tempus quodcunque t, quod ſi æſtimetur ex ſpatio, quod fluidum affluens ſua velocitate percurrit, diviſo per eandem velocitatem, tunc velo-

velocitas eſt exprimenda per $\sqrt{2A}$ & erit quantitas aquæ tempore t affluens æqualis cylindro ſuper baſi M conſtructo longitudinis $t\sqrt{2A}$: iſta vero quantitas tempore t, dum à nave aufertur, accipit velocitatem debitam altitudini B & exprimendam per $\sqrt{2B}$: quærenda itaque eſt vis uniformis, quæ poſſit tempore t, cylindro aqueo $Mt\sqrt{2A}$ communicare velocitatem $\sqrt{2B}$ & erit iſta vis ob reactionem, quæ in navem reagit, æqualis cenſenda reſiſtentiæ quæſitæ. Sit præfata vis $= p$, puteturque dediſſe tempore θ velocitatem v cylindro aqueo $Mt\sqrt{2A}$ & erit $dv = \frac{p\,d\theta}{Mt\sqrt{2A}}$, atque $v = \frac{p\theta}{Mt\sqrt{2A}}$: ponatur jam $\sqrt{2B}$ pro v & t pro θ eritque $\sqrt{2B} = \frac{p}{M\sqrt{2A}}$ ſivè $p = 2M\sqrt{AB}$.

Eſt igitur reſiſtentia quæſita æqualis ponderi cylindri aquei, cujus baſis eſſet æqualis orificio M & cujus longitudo æqualis duplæ mediæ proportionali inter altitudines A & B.

Problema.

§. 23. Sit in navi cylindrus altitudinis ſupra ſuperficiem maris A, per cujus orificium in eadem ſuperficie poſitum amplitudinis M aquæ verſus puppim effluant ſine ullo impedimento, conſerveturque cylindrus aqua conſtanter plenus, determinare potentiam navem continue propellentem.

Solutio.

Potentia navem propellens eſt æqualis reactioni aquarum dum effluunt, ſeu vi repellenti diminutæ potentia in præcedente paragrapho definita ab inertia aquarum, quæ continue hauriuntur, oriunda. Vis repellens eſt æqualis, per paragraphum hujus ſectionis quartum, $2MA$ & hæc navem promovet: vis altera quæ navem retardat eſt per præcedentem paragraphum $= 2M\sqrt{AB}$. Eſt igitur potentia abſoluta navem promovens $= 2M - 2M\sqrt{AB}$.

Corollarium.

§. 24. Si navis nullam habeat velocitatem, erit vis navem urgens $= 2MA$; atque ſi navis eadem velocitate movetur qua aquæ in plagam contrariam effluunt, fit $B = A$ & tunc navis nulla vi propellitur. Si proinde navis

vis vel liberrime moveretur ſuper mari, non acquireret tamen ab actione aquarum, quæ continue hauriuntur inferiusque effluunt, majorem velocitatem quam eam, qua aquæ effluunt, non quod aquæ ex vaſe uniformiter moto effluentes vas minori vi quam ex vaſe immoto repellant, ſed quod tunc inertia aquarum reſiſtentiam producat vi repellenti æqualem.

Problema.

§. 25. Data potentia operariorum, qui aquas elevant, & data altitudine ad quam aquæ elevantur, invenire amplitudinem foraminis effluxus & vim repellentem.

Solutio.

Sit potentia talis, qua ſingulis minutis ſecundis numerus pedum cubicorum aquæ N poſſit ad altitudinem unius pedis elevari, quam potentiam vi experimenti ſecundi ſectioni nonæ ſubjuncti exerere poteſt operariorum numerus deſignandus per $\frac{5}{4}$N. Sit altitudo ad quam aquæ continue elevantur $=$ A in pedilus expreſſa: amplitudo orificii in pedibus quadratis $=$ M; erit numerus pedum cubicorum aquæ, quem operarii data potentia ad altitudinem A ſingulis minutis ſecundis elevare poſſunt, $= \frac{N}{A}$ (per §. 22. *ſect.* 9.) erit igitur orificium ejus amplitudinis conſtruendum, ut ſingulis minutis ſecundis numerus iſte pedum cubicorum aquæ per id effluere poſſit, ſi liberrime effluant. Sumamus autem loco minutorum ſecundorum tempus, quod corpus inſumit, dum libere cadit per altitudinem A: tempus id eſt hic exprimendum $\frac{1}{4}\sqrt{A}$, (poſito concinnioris calculi gratia corpus à quiete libere cadens intra minutum ſec. abſolvere 16. *ped.*) & hoc tempore debet effluere numerus pedum cubicorum aquæ deſignandus per $\frac{N}{A} \times \frac{1}{4}\sqrt{A}$ ſeu $\frac{N}{4\sqrt{A}}$: effluit autem revera 2 M A, nempe cylindrus aqueus cujus baſis eſt M & cujus longitudo facit duplicem altitudinem A: eſt igitur $\frac{N}{4\sqrt{A}} = 2MA$; unde amplitudo orificii ſeu

$$M = \frac{N}{8A\sqrt{A}}.$$

Vis autem repellens ſit æqualis 2 M A ſeu $= \frac{N}{4\sqrt{A}}$.

Scho-

Scholium.

§. 26. In quavis nave aquæ ad aliam atque aliam altitudinem ſunt elevandæ, ut eadem potentia, quæ in hauriendis aquis inſumitur, vis navem promovens maxima obtineatur & duo requiruntur ad altitudinem illam utiliſſimam definiendam pro certo operariorum numero. *Primo* ut cognitum ſit quamnam velocitatem propoſita navis à data potentia acquirat: ratione hujus poſtulati, ponemus navem à preſſione, quæ ſit æqualis ponderi unius pedis cubici aquæ ſeu circiter 72 librarum acquirere velocitatem, quæ generetur lapſu libero per altitudinem C, & quia deinceps ſemper. in pedibus menſuras omnes exprimemus, erit pondus unius pedis cubici aquæ exprimendum per unitatem. *Secundo* pro cognita aſſumenda eſt relatio inter celeritates navis & potentias navem propellentes: ſtatuitur hic vulgo velocitates habere rationem ſubduplicatam virium propellentium, experimenta quidem hanc hypotheſin non exactè confirmant in motibus lentis; interim tamen eam reliquis omnibus præferendam cenſemus. Si quis velit rem ſub alia hypotheſi explorare, is poterit eodem modo, quo nunc utemur, calculum inſtituere.

Problema.

§. 27. Invenire altitudinem, ad quam aquæ continue elevandæ ſunt, inſtituto utiliſſimam, nempe talem, ut eadem potentia in elevandis aquis adhibenda vis navem promovens maxima oriatur.

Solutio.

Serventur denominationes omnes in hoc argumento adhibitæ: erit ante omnia inquirenda velocitas navis ſeu altitudo huic velocitati debita quam vocavimus B. Quia vero velocitates navis ponuntur proportionales radicibus potentiarum navem urgentium, erunt altitudines velocitatum ipſis potentiis proportionales. Erit igitur talis analogia inſtituenda.

Sicuti pondus unius pedis cubici ad altitudinem C (conf. §. 26.) ita preſſio navem urgens ſeu $2MA - 2M\sqrt{AB}$ (vid. §. 23.) ad altitudinem velocitati navis reſpondentem, quæ proinde erit $2MC \times (A - \sqrt{AB})$: Hanc vero altitudinem vocavimus B: Eſt itaque

$$B = 2MC \times (A - \sqrt{AB}).$$

Exinde fit preſſio navem urgens $= \frac{B}{C}$, atque adeo proportionalis altitudini B, quia C eſt quantitas conſtans: ergo & preſſio navem promovens & altitudo navis velocitati reſpondens ſimul fiunt maximæ: Igitur ſi pro præſenti inſtituto differentietur quantitas $2MA - 2M\sqrt{AB}$, quæ preſſionem navem propellentem exprimit, poterit poni $dB = 0$. Prius vero quam differentiatio inſtituatur oportet pro M ſubſtituere valorem ejus §. 25. & tunc fit preſſio navem promovens $= \frac{N}{4\sqrt{A}} - \frac{N\sqrt{B}}{4A}$, in qua littera N eſt conſtans, litteræ vero B & A variabiles. Sumatur nunc ejus differentiale, faciendo $dB = 0$, idque fiat $= 0$; atque ſic reperietur $A = 4B$.

Eſt igitur vis navem promovens maxima cum altitudo, ad quam aquæ elevantur, eſt quadrupla altitudinis velocitati navis debitæ.

Ponatur in æquatione $B = 2MC \times (A - \sqrt{AB})$ ſuperius inventa $A = 4B$ & reperietur

$$M = \frac{1}{4C},$$

& quia (per §. 25.) eſt $M = \frac{N}{8A\sqrt{A}}$, fit tunc

$$A = (\tfrac{1}{2}NC)^{\frac{2}{3}}, \text{ atque}$$

$$B = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}NC)^{\frac{2}{3}}.$$

Corollarium.

§. 28. Si ad præceptum præcedentis paragraphi orificio, per quod aquæ inferius ex canali verſus puppim effluunt, concilietur amplitudo $\frac{1}{4C}$, id eſt, talis, quæ ſe habeat ad amplitudinem unius pedis quadrati, ſicuti menſura unius pedis, ad altitudinem quadruplam velocitati navis, vi 72. librarum animatæ, debitam, fiet tunc ut navis dimidia velocitate feratur ejus qua aquæ effluunt & erit vis repellens aquarum effluentium

$$2MA = \frac{1}{2C} \times (\tfrac{1}{2}NC)^{\frac{2}{3}},$$

vis

vis vero navem promovens hujus erit dimidia, adeo ut dimidius effectus perdatur ab inertia earundem, quæ continue hauriuntur, aquarum.

Scholium.

§. 29. Poſtquam ſic demonſtravimus, quomodo utiliſſime maximoque cum ſucceſſu iſte navigandi modus ſit inſtituendus, nunc porro rem iſtam exemplo illuſtrandam eſſe puto tali, quod cum ipſa rei natura non male convenire crediderim ut ſimul appareat, qualis præterpropter eventus futurus ſit.

Conſideremus triremem, vulgo *galeram*, cum 260 remigibus: ponamus hanc galeram pondere unius pedis cubici aquæ ſeu 72. librarum tractam perficere ſingulis minutis ſecundis ſpatium duorum pedum, cujus velocitatis altitudo genitrix indicata per C eſt $= \frac{1}{16}$, poſito corpus grave libere à quiete decidens primo minuto ſecundo perficere 16. *ped.* Quia porro 260. operarii adhibentur, quorum quivis vi experimenti ſecundi ad *Sect.* 9. pertinentis poteſt ſingulis minutis ſecundis quatuor quintas partes pedis cubici ad altitudinem unius pedis elevare, erit $N = \frac{4}{5} \times 260 = 208$. Fiat igitur orificium, per quod aquæ effluant, amplitudinis 4 pedum quadratorum: poteruntque operarii aquam in canali ſupra orificium elevatam conſervare ad altitudinem proxime $3\frac{1}{2}$ *ped.* quæ indicatur litera A, & ſi ſumas hujus altitudinis quartam partem habebis $B = \frac{7}{8}$ *ped.* adeo ut navis tali velocitate ſit iſta navigatione progreſſura, quam grave acquirit lapſu libero per altitudinem $\frac{7}{8}$ *ped.* ſic ergo navis ſingulis minutis ſecundis ſpatium $7\frac{1}{2}$ *ped.* perficiet & ſingulis horis 27000 *ped.* id eſt, plus duobus milliaribus gallicis: tanta navis velocitas remigatione vix ac ne vix quidem obtineri poteſt.

Jam vero calculum alia hypotheſi ſuperſtruam, quam rei nauticæ intelligentes non admodum improbaturos eſſe, confido: quadrat enim cum multis, quos ipſe ſuper mari feci, obſervationibus: ſupponam vela triremis perpendiculariter ad carinam expanſa ſuperficiem habere 1600 pedum quadratorum, hæcque ventum excipere directe impingentem, qui ſingulis minutis ſecundis ſpatium percurrat 18. *ped.* navem vero in eadem directione ſic ſingulis minutis ſecundis ſpatium perficere 6 pedum. Ita ventus in vela incurret velocita-

te reſpectiva 12 pedum: vim iſtius venti æſtimo = ponderi $\frac{9 \times 1600}{850}$ *ped. cub.* aquæ, ſeu fere 17. *ped. cub.* aquæ.

Hæc ſi ita ſint, ſequitur navem ab elevatione aquarum 260. operariorum poſſe ea velocitate propelli, qua ſingulis minutis ſecundis ſpatium percurrat $6\frac{1}{2}$. pedum.

Æſtimatio non admodum diverſa ſequitur ex iis, quæ D. Chazelles habet in *Comm. Acad. Reg. Sc. Pariſ. ad ann.* 1702. *p.* 98. *edit Pariſ.* Ut vero recte ad inſtitutum noſtrum applicari poſſint, notandum erit in remigatione, vim triremem propellentem non eſſe æſtimandam ex preſſione remigum in remos, ſed ex preſſione, quam remorum extremitates aquis ſubmerſæ contra aquas exerunt. Ut hanc proxime definiamus, hæc prius erunt obſervanda. Remiges fuere adhibiti 260. totis viribus remigantes: ſingulis minutis primis remorum impulſus (gallicè *palades*) facti ſunt 24: integra remorum agitatio tribus abſolvitur motibus, quos ejuſdem durationis ponam, eorumque unus ſolus triremem promovet: hoc modo triremis velocitate fuit provecta, qua ſingulis minutis ſecundis ſpatium $7\frac{1}{5}$. *ped.* abſolvebat, pars remi intra navem fuit 6. pedum & extra navem 12. pedum: ſuperficies autem (gallicè *les pales*) omnium remorum, quæ contra aquas impelluntur, in unam collectæ D. Chazelles facit 130. pedum quadratorum: notavit porro extremitatem internam remi ſingulis agitationibus ſpatium deſcribere ſex pedum: & quia quævis agitatio tempore $\frac{6}{24}$. unius minuti ſecundi abſolvitur ſimulque ex tribus conſtat motibus, quos pono tautochronos, apparet quamvis remi retractionem fieri tempore $\frac{2}{24}$. ſeu $\frac{5}{6}$. unius minuti ſecundi & hoc tempore extremitas remi interna abſolvit ſpatium 6. pedum. Porro ob longitudinem ſuperficiei remorum, quæ contra aquas impellitur, non tota eſt ad diſtantiam 12. pedum cenſenda: illam igitur diſtare ponam 10. pedibus, quaſi nempe pars remi extra navem promineret 10. pedes longa: hujus partis extremitas deſcribet 10. pedes tempore $\frac{5}{6}$ unius minuti ſecundi: quia vero ipſa triremis velocitatem habet, qua eodem tempore ſex pedes abſolvit, cenſendum eſt, remorum extremitates contra aquam impelli velocitate reſpectiva, qua tempore $\frac{5}{6}$. min. ſec. 4. pedes deſcribat: igitur vis triremem propellens eſt æqualis vi, quam aqua contra ſuperficiem 130. pedum quadratorum exereret, ſi velocitate in illam incurreret, qua tempore $\frac{5}{6}$ *min. ſec.* 4. *ped.* abſolvat: hanc vim ſecundum vulgarem

garem æſtimationem invenio præter propter æqualem ponderi 40. *ped. cub.* aquæ; iſta vero vis non continue applicatur, ſed tantum eo tempore quo remi retrahuntur: ſunt igitur duo trientes iſtius vis auferendi, ita ut vis quæ triremem continue propellat, cenſenda denique ſit æqualis ponderi 13⅓. *ped. cub.* aquæ.

Exinde ſequitur, ſi velocitates navis rationem ſequi ſubduplicatam virium propellentium ponantur, quod eadem hæc triremis pondere unius pedis cubici aquæ impulſa velocitatem habitura fuiſſet, qua poſſit ſingulis minutis ſecundis perficere proxime duos pedes; quæ hypotheſis eadem eſt, cum illa quam primo loco adhibuimus, ita ut rurſus exinde ſequatur triremem velocitatem ab iſta navigatione acquiſituram eſſe, qua poſſit perficere ſingulis minutis ſecundis 7½ pedes, quæ velocitas tantillo major eſt illa, quæ triremi remigatione fortiſſima 260. remigum data fuit.

Rebus bene perpenſis hæſito, utrum navigationis genus ſit præferendum, an remigatio, an aquarum elevatio, ſucceſſum fere æqualem crediderim utriuſque, & pro certo affirmare audeo, ſi minus promoveatur navis ab aquarum elevatione, defectum parvum fore: fortaſſe autem promovebitur magis. Interim non dubito, quin nova iſta navigationis idea harum rerum ignaris vana & ridicula appareat. Ego vero aliter ſentio velimque ut animus porro ad ſequentia advertatur.

Primo. Quod aquæ in omni navium genere, ubi remi plane adhiberi nequeunt, commode elevari poſſunt, ita ut nova iſta navigatione naves etiam bellicæ prægraves, quibus in pugnis navalibus utuntur, deficiente omni vento, quo lubet agi poſſint.

Secundo. Quod ſic in theoria exemplum habetur, dari vires motrices ſive propellentes, quæ dici poſſunt intrinſecæ: Excitabuntur iſto exemplo ingenia ad excogitanda hujuſmodi alia motus principia eaque magis perficienda & ad navigationis uſum adhibenda.

Tertio. Quod multis modis ſublevari poteſt labor hominum in elevandis aquis ſecus atque fieri poteſt in remorum uſu: ſunt nempe res naturales inſigni & fere incredibili virtute præditæ eæque mediocri pretio comparandæ, quibus idem quod labore hominum effici poteſt: harum uſus præſertim bre-

vibus trajectibus ſerena & tranquilla tempeſtate inſtituendis inſervire poſſet. De virtute iſtiuſmodi rebus naturalibus inſita, de effectibus inde obtinendis horumque menſuris egi in Sect. X. §. 40. & ſequentibus: imprimis autem velim ut attendatur ad §. 43. quo omnes quibus ingenium à natura datum fuit felix ad machinas excogitandas; excitari deberent, ad rei iſtius perfectionem tentandam.

Quarto. Quod nonnulla alia compendia purè mechanica adhiberi poſſint ſimilia illi quod §. 27. datum fuit, quorum nempe ope ab eodem labore effectus in promovendis navibus non parum creſcit: Verum non licet jam ſecundum veram rei indolem omnia pertractare.

EXPERIMENTA

In Sectionem decimam tertiam.

UT vim repellentem experimento recte cognoſcere liceat, adhiberi poterit vas quod habeat formam parallelopipedi ejuſque pondus ſumi tam vacui quam aqua pleni, poſteaque indagari ratio inter amplitudinem vaſis & amplitudinem foraminis, quod in latere vaſis eſſe debet, ſicut & ratio inter altitudines aquæ ſupra foramen & ſupra baſin: Inde deducere licebit rationem inter pondus vaſis aqua pleni & cylindri aquei foramini verticaliter ſuperincumbentis. Porro ex obſervata amplitudine jactus habebitur velocitas aquæ: ex hac, ſi ſimul jungas quantitatem aquæ dato tempore effluentem pariter obſervandam, colliges amplitudinem venæ contractæ, quam comparare poteris cum amplitudine orificii.

His omnibus exploratis ſuſpendatur vas ex filo prælongo adhibita ſimul cura, ut alium motum habere non poſſit, quam qui ſit directioni aquarum effluentium contrarius. Tum demum aquis effluxus concedatur & obſervabitur filum ſitum verticalem deſerere & ex angulo declinationis cognoſcetur vis repellens eaque cum menſuris, quas indicavimus, comparari poterit.

Expe-

Experimentum 1.

Feci ipse aliquando omnia, ut nunc monui, visumque fuit regulam nostram §. 2. recte confirmari: non potui tamen tum temporis sufficiente accuratione experimentum instituere, nec illud postea repetii.

Experimentum 2.

Alio tempore rem aliter tentavi: vas nempe de quo omnes mensuras requisitas sumseram aqua plenum naviculæ imposui in puppi: navicula aquis in alveo innatabat: Deinde aquis ex vase effluentibus (ita tamen ut in naviculam non illiderent) navicula in plagam contrariam progressa est: velocitatem naviculæ ex spatio dato tempore percurso rectissime exploravi. Deinde inquisivi quantum ponduſculum naviculæ esset appendendum, ut illo pondere sollicitata eandem velocitatem acquireret. Instituta deinde comparatione istius ponderis cum pondere cylindri aquei datæ diametri, inde rectissime theoriam nostram confirmari vidi.

Experimentum 3.

Effluentibus aquis ex vase naviculæ superimposito in naviculam, hæc omnino immota permansit: Id indicat impetum venæ aqueæ æqualem esse vi repellenti, ut demonstravi §. §. 16. & 17. Tum etiam si vena aquea directe impingebat in planum naviculæ affixum, hæc similiter immota stetit, quod rursus æqualitatem impetus & vis repellentis probat: at si vena oblique in planum incidebat, navicula quidem motum obtinuit sed lentiorem.

Denique si aquæ effluentes à navicula excipiebantur, ita ut orificium aquis in navicula stagnantibus esset submersum, similiter absque motu perstetit navicula, documento, quod eadem pressio à vena oriatur, sive fiat ut omnis ejus motus cohibeatur, sive ut ad angulum rectum declinetur, prouti demonstratum fuit §. 18. æqualitatem inter vim repellentem & vim venæ aqueæ perpendiculariter in planum incidentis plurimis aliis modis exactissime confirmavi. Hanc autem vim theoriæ nostræ conformem opinionique omnibus adhuc com-

communi contrariam experimento omni exceptione majori confirmavi, quod præsentibus D. Emanuele Kœnig, Patrueli meo Nicolao Bernoullio atque Patre meo in ædibus meis instituí tanta cum fiducia, ut acceptis omnibus mensuris, pressionem venæ aqueæ, quanta futura esset, etsi nunquam antea à me capto experimento, omni præcisione prædixerim. Hæc omnia novis principiis mechanicis eruta communicavi cum Academia Scientiarum Petropolitana, cujus Commentariis aliquando inserentur.

Experimentum 4.

Ut etiam ostenderem falsitatem regulæ receptæ tum de vi repellente
Fig. 86. tum de impetu aquarum, adhibui vas quale ostendit Figura 86. instructum canali AB uniformis amplitudinis & incurvato, cujus directio in A erat horizontalis, in B verticalis: vidi vas plane non repelli horizontaliter; ergo per §. 14. falsa est regula, quæ simplici cylindro ibidem definito adhæret.

FINIS.

Tab. I.

Fig. 1.

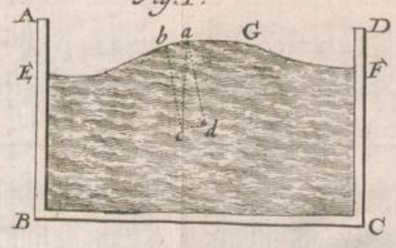
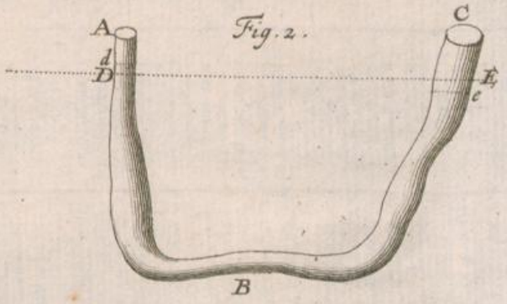


Fig. 2.



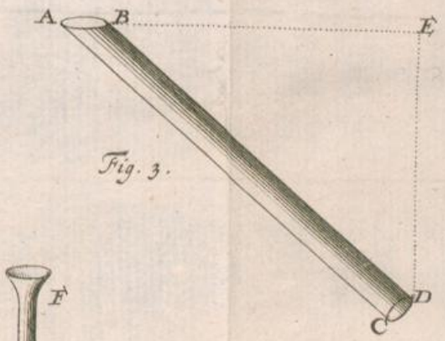


Fig. 3.

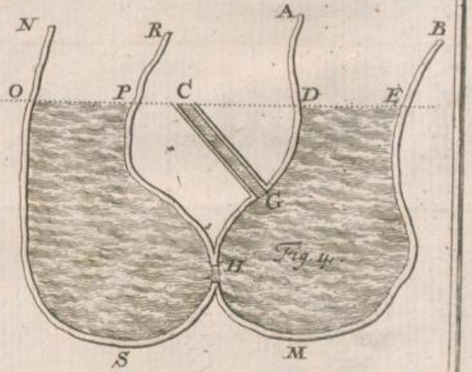


Fig. 4.

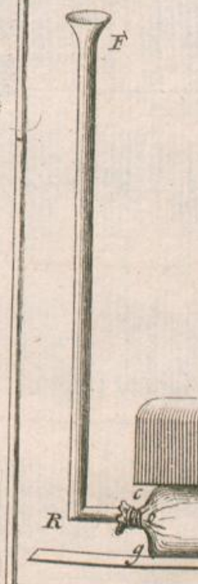


Fig. 5.

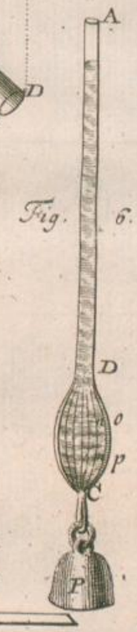


Fig. 6.



Fig. 7.

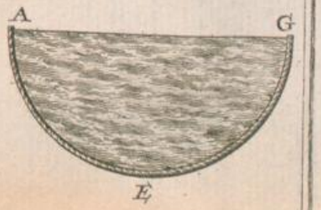


Fig. 8.

Weis. Arg. sc.

Tab. II.

Fig. 9.

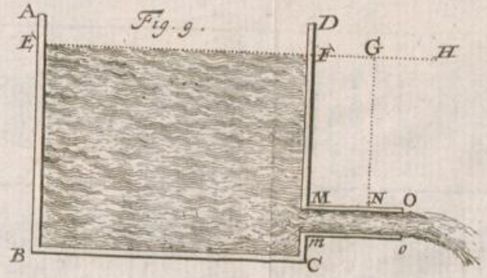


Fig. 10.

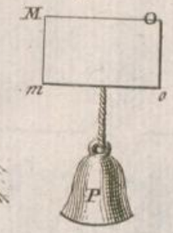


Fig. 11.



Fig. 12.

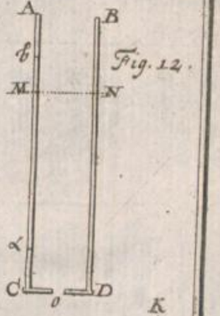


Fig. 13.

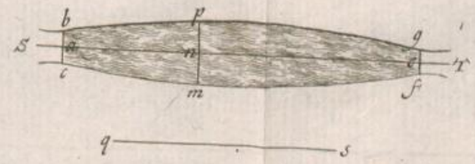


Fig. 14.

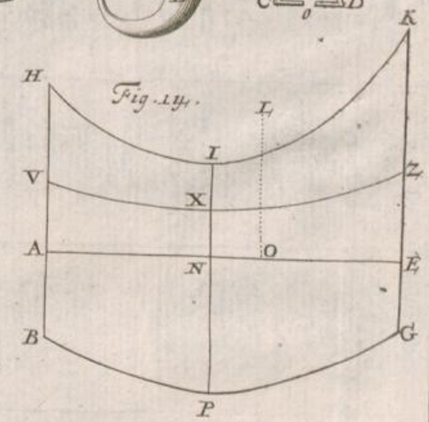


Fig. 15.

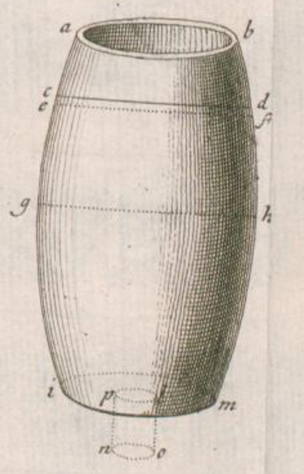
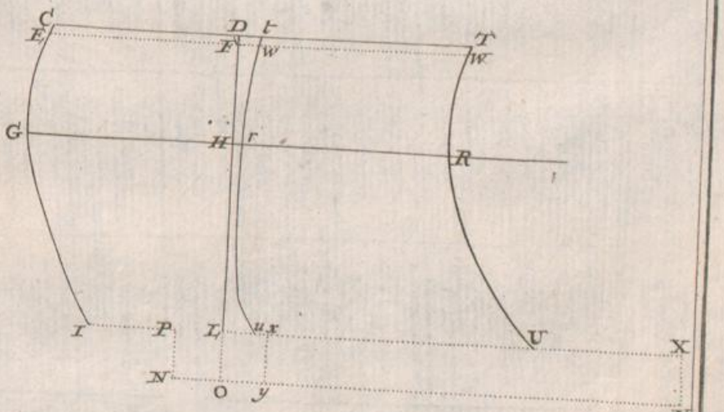


Fig. 16.



Weis sc.

Tab. III.

Fig. 17.

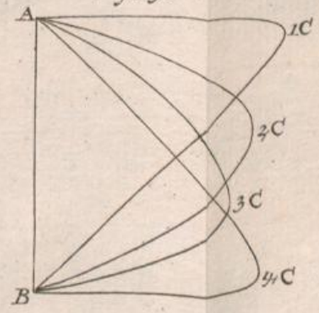


Fig. 18.

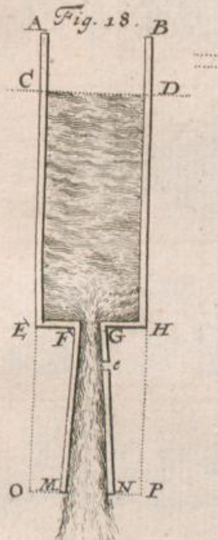


Fig. 19.

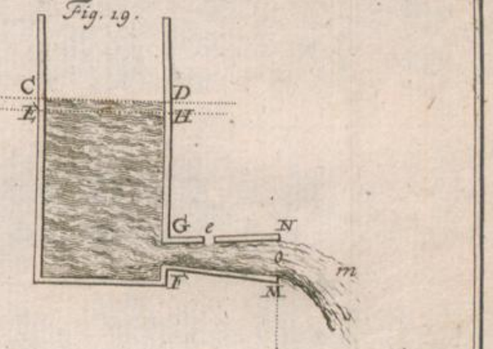


Fig. 20.

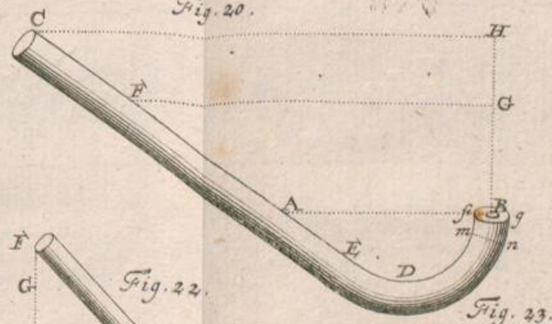


Fig. 21.

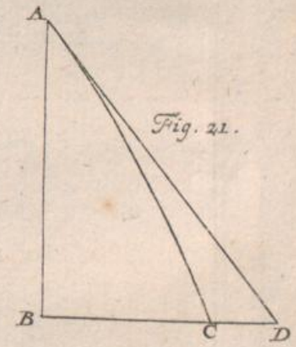


Fig. 22.

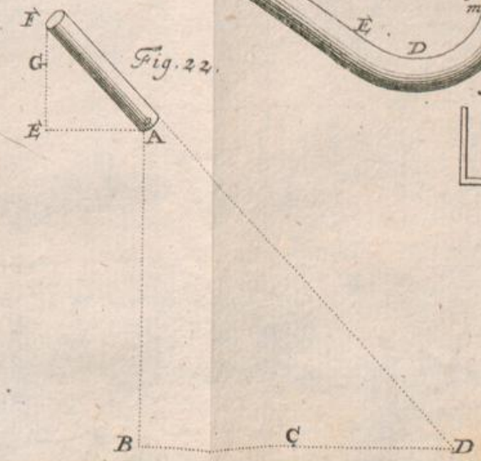


Fig. 23.

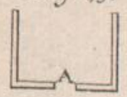


Fig. 24.

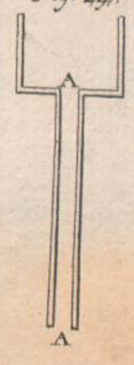


Fig. 25.

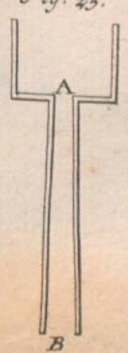
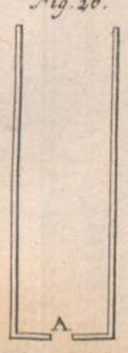
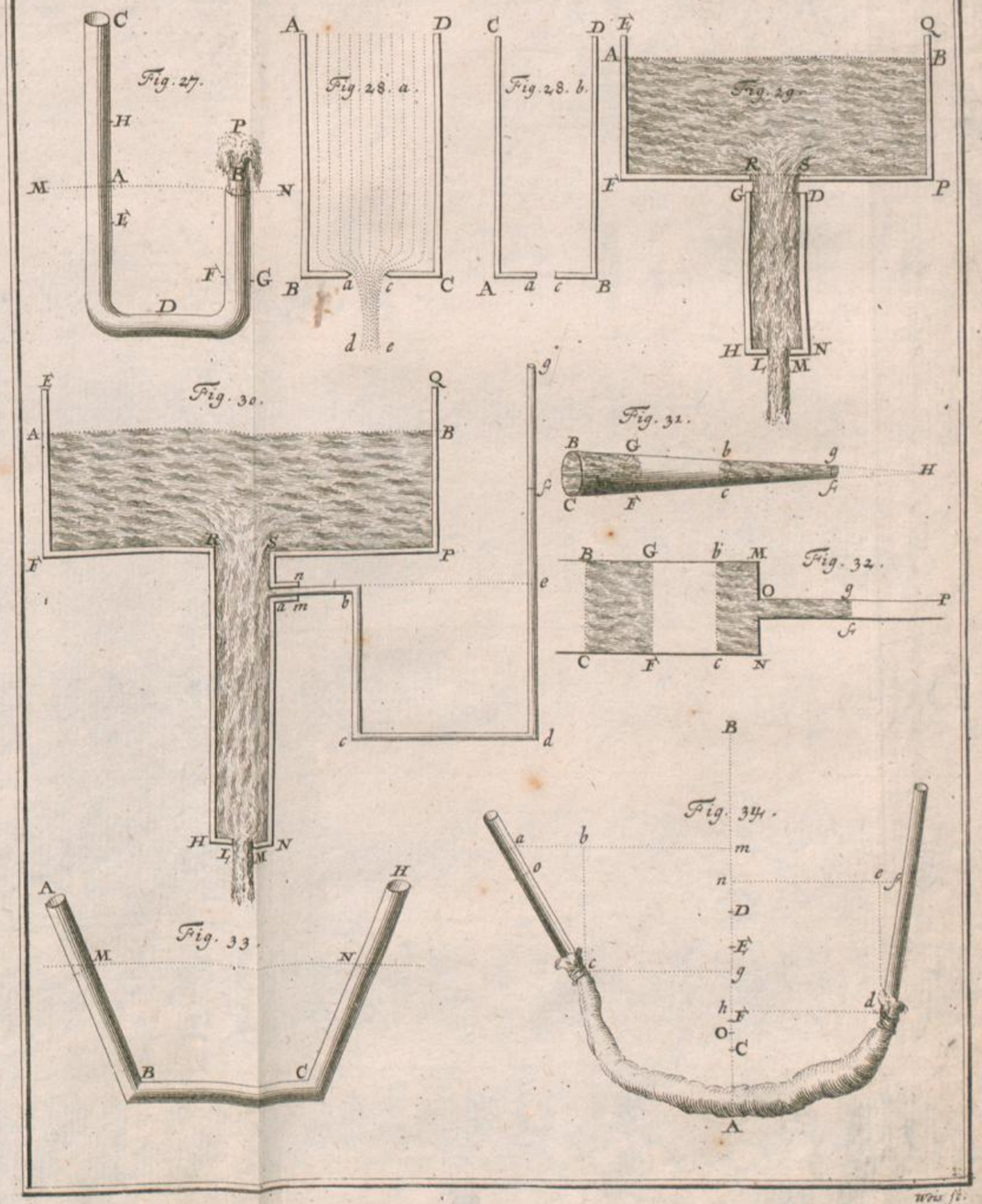


Fig. 26.



Wräs sc.

Tab. IV.


Fig. 27.
C
H
P
M
A
B
N
E
F
G
D
Fig. 28. a.
A
D
B
a
c
C
d
e
Fig. 28. b.
C
D
E
A
a
c
B
Fig. 29.
Q
B
A
R
S
F
G
D
P
H
L
M
N
Fig. 30.
E
Q
A
B
F
R
S
P
n
a
m
b
c
d
H
L
M
N
A
H
M
N
B
C
Fig. 33.
g
f
e
Fig. 31.
B
G
b
g
H
C
F
c
f
Fig. 32.
B
G
b
M
g
P
O
f
C
F
c
N
B
Fig. 34.
a
b
m
o
n
e
f
D
E
g
c
h
F
d
O
C
A

Wis fc.

Tab. V.

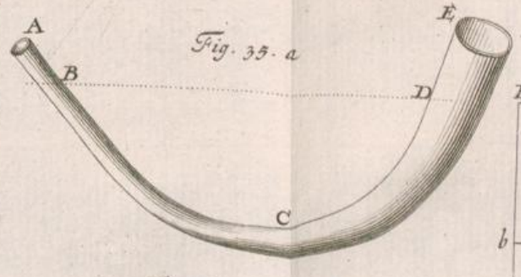


Fig. 33. a

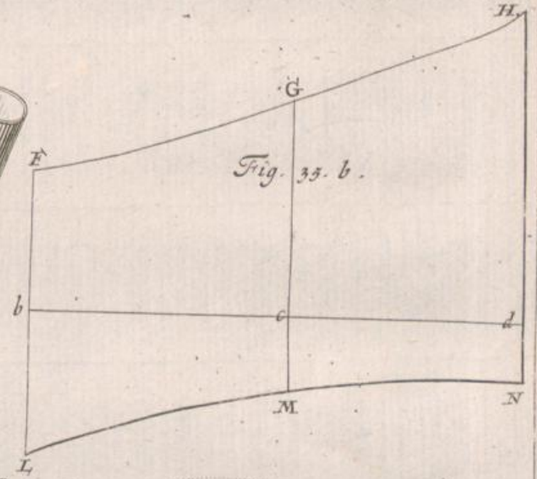


Fig. 33. b.

Fig. 36.

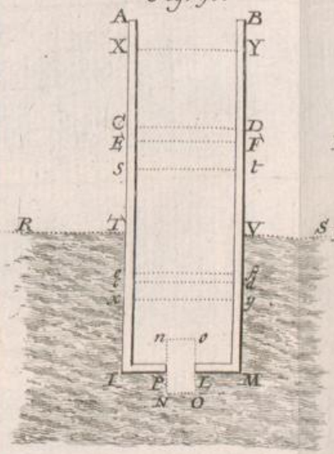
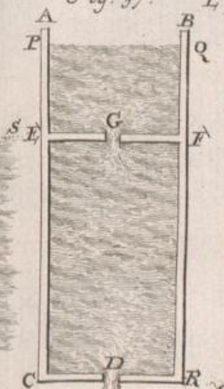


Fig. 37.



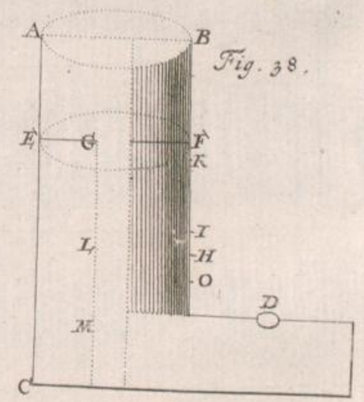


Fig. 38.

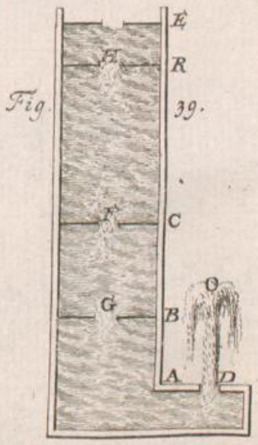


Fig. 39.

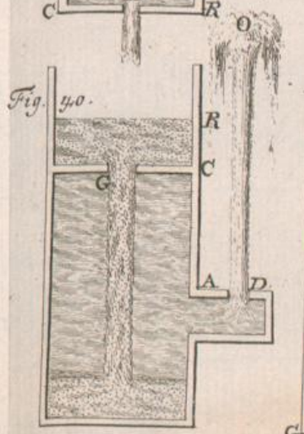


Fig. 40.

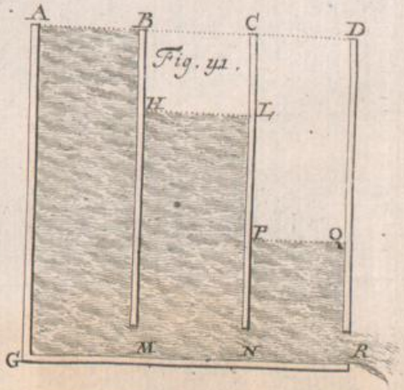


Fig. 41.

Weis sc.

Tab. VI.

Fig. 42.

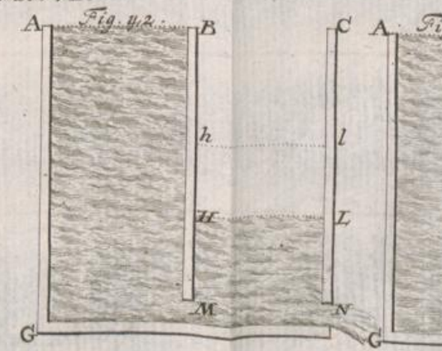


Fig. 43.

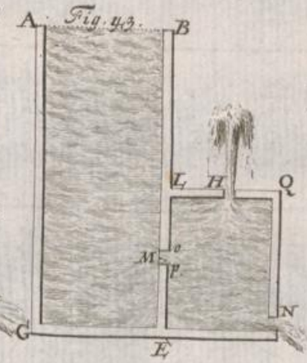


Fig. 44.

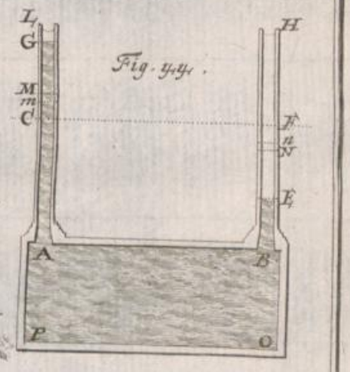


Fig. 45.

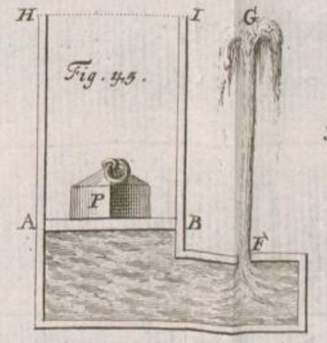


Fig. 46.

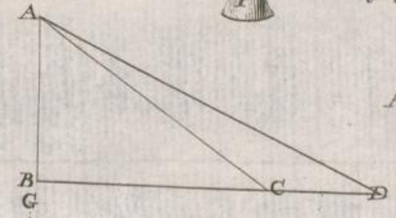


Fig. 47.

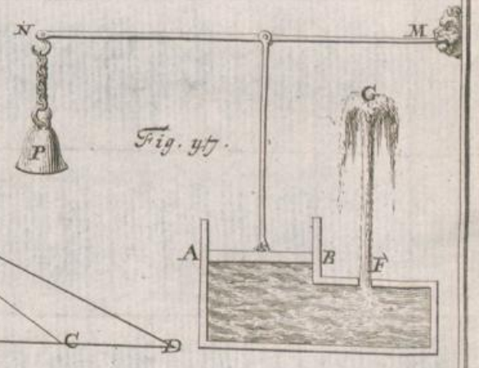


Fig. 48.

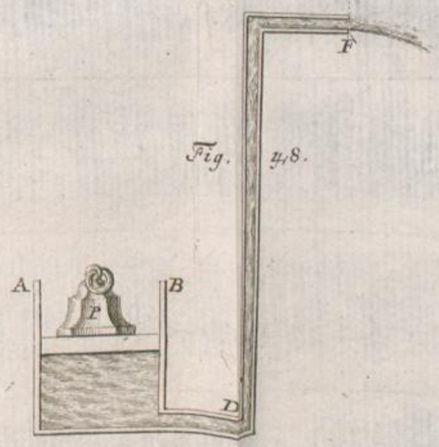
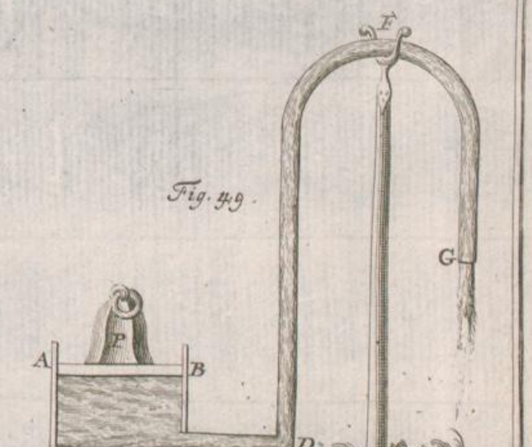


Fig. 49.



Wris fc.

Tab. VII.

Fig. 30.

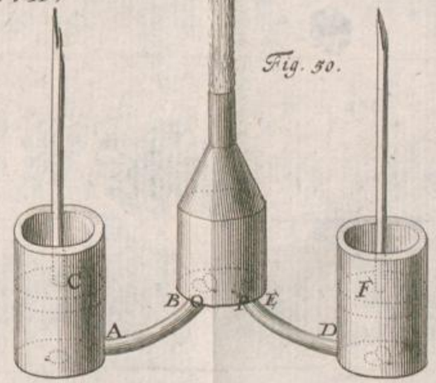


Fig. 31.

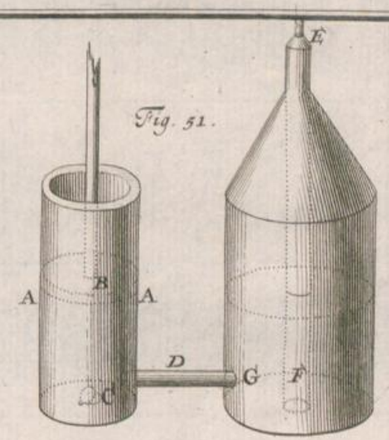


Fig. 32. (2)

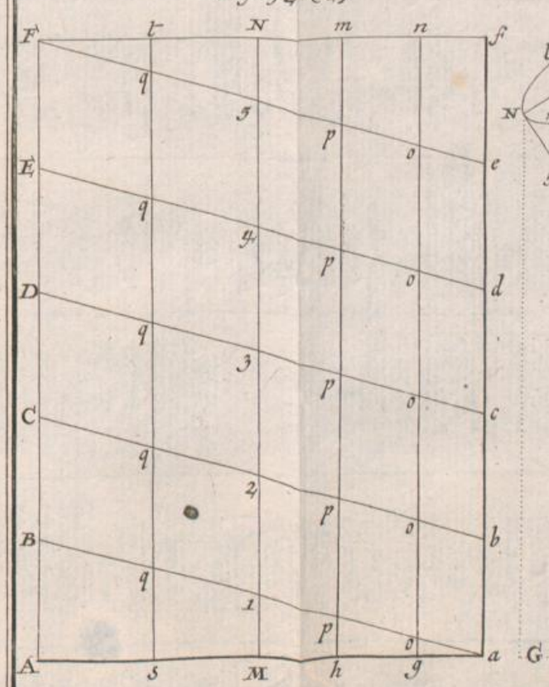
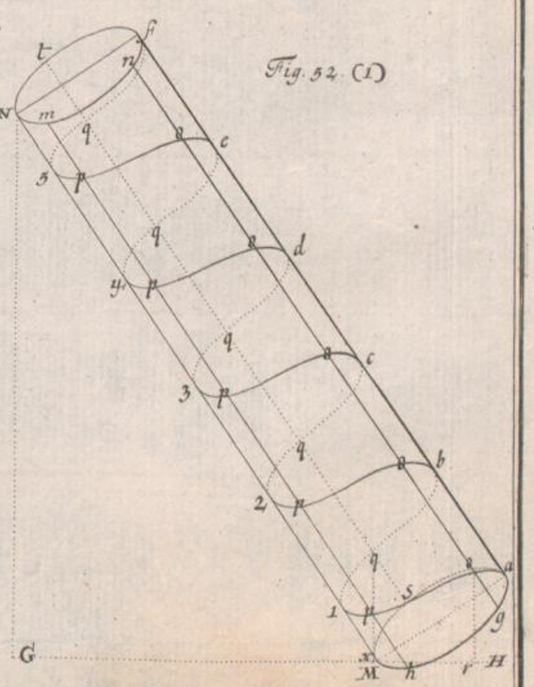


Fig. 32. (1)



Weis sc.

Tab. VIII.

Fig. 33.

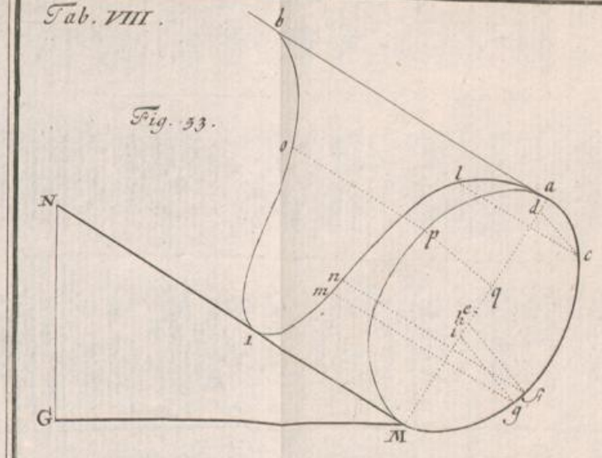


Fig. 36.

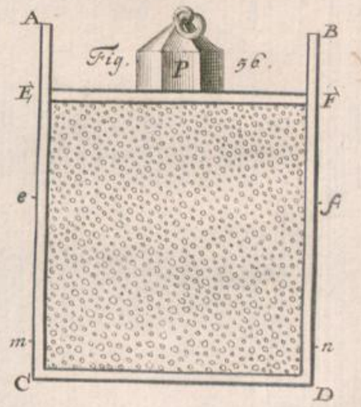


Fig. 34.

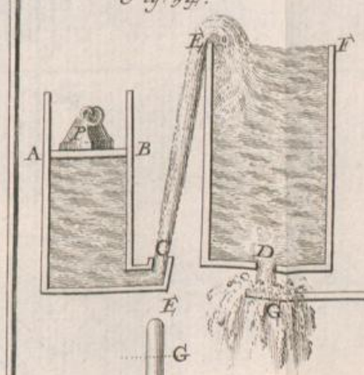


Fig. 35.

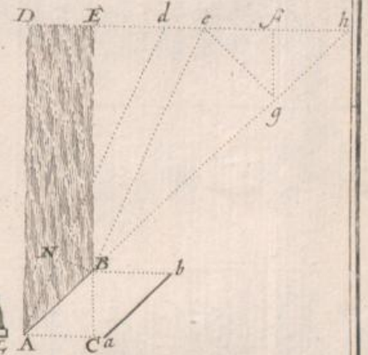


Fig. 37.

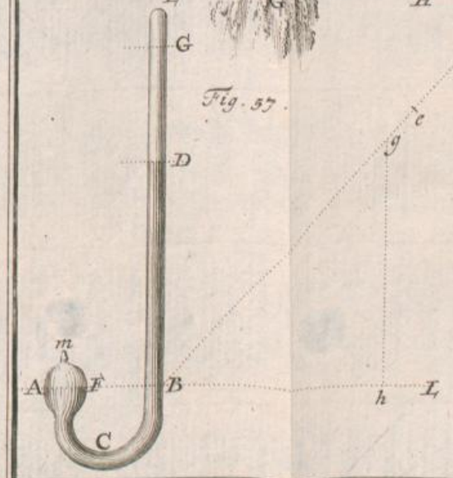
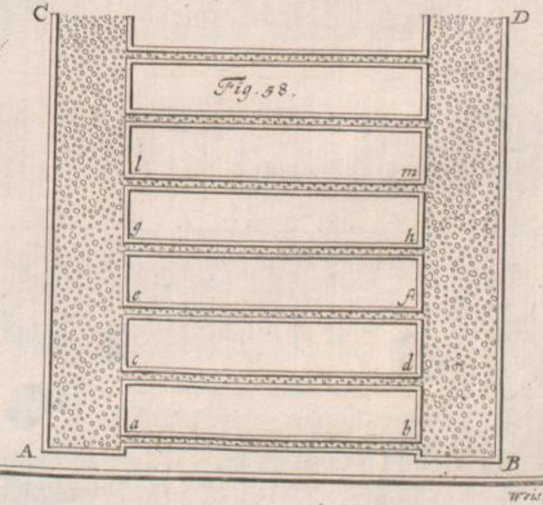
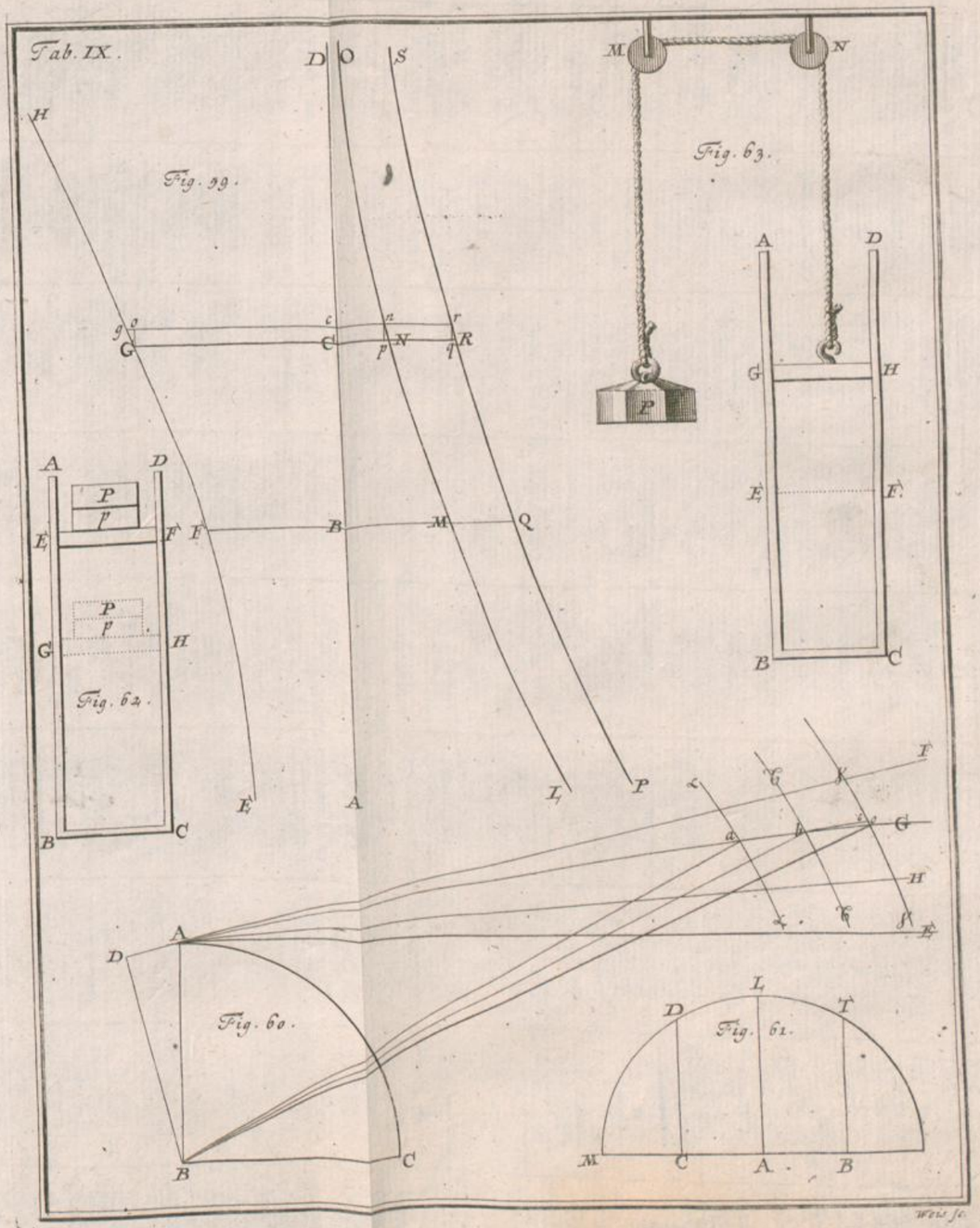


Fig. 38.



Wrist sc.

Tab. IX.


H
Fig. 59.
D O S
g o c n r
G C F N q R
A D
P p
E F F B M Q
P p
G H
Fig. 62.
B C
E A L P
M N
Fig. 63.
P
A D
G H
E F
B C
I
G K
a b c G
H
α β γ E
D A
Fig. 60.
B C
L
D T
Fig. 61.
M C A B

Wow sc.

Tab. X.

Fig. 64.



Fig. 65.

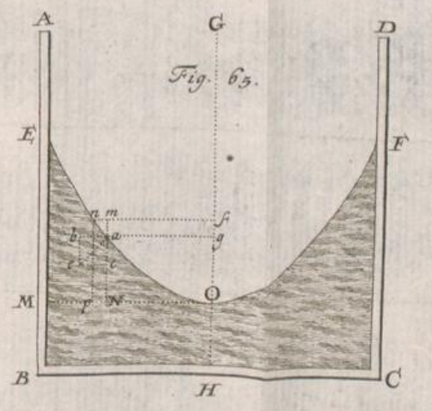


Fig. 66.

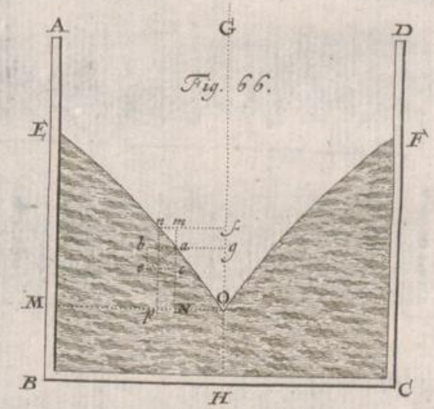


Fig. 67.

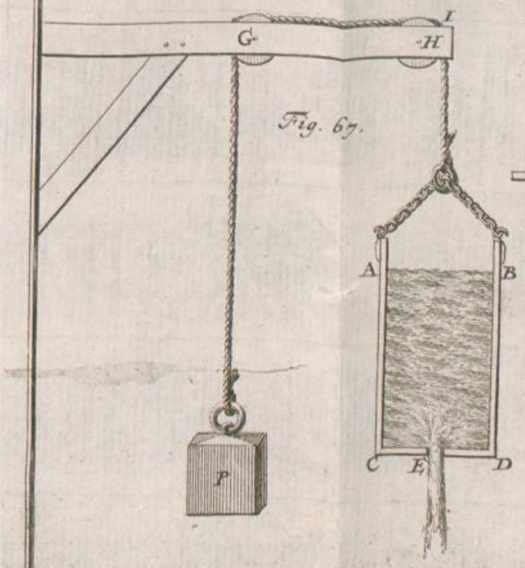


Fig. 68.

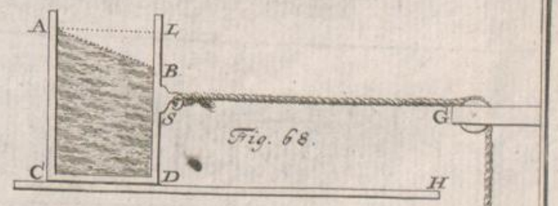


Fig. 69.

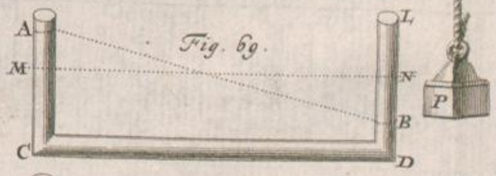
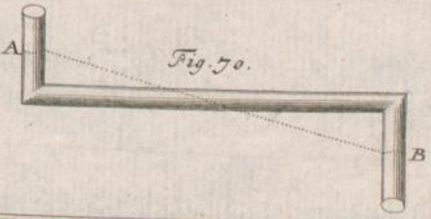


Fig. 70.



Wm sc.

Tab. XI.

Fig. 71.

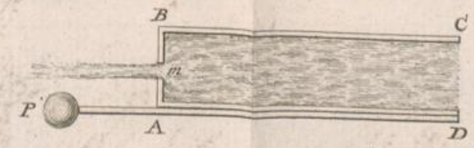


Fig. 72.

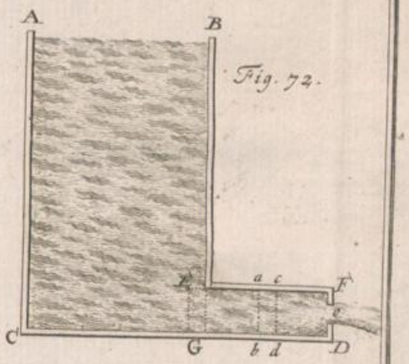


Fig. 73.

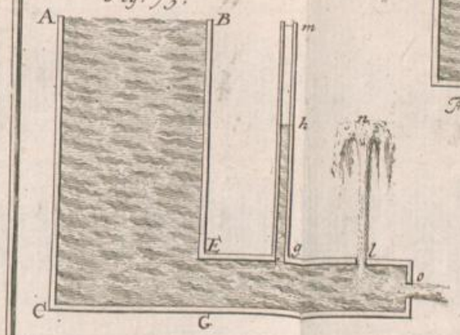


Fig. 76.

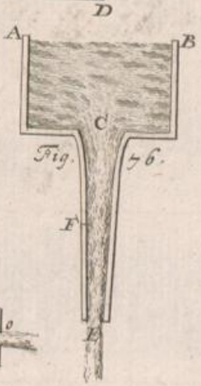
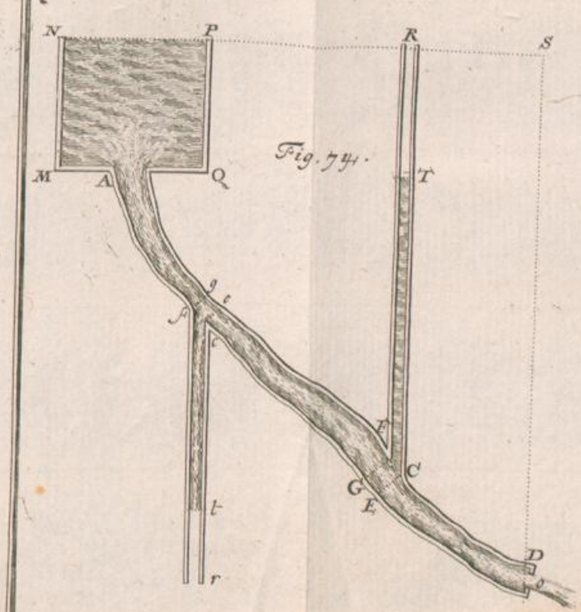


Fig. 75.



Fig. 74.



Tab. XII.

Fig. 77.

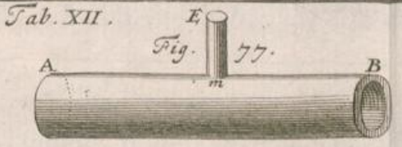
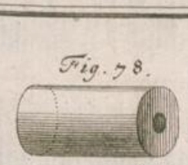


Fig. 78.



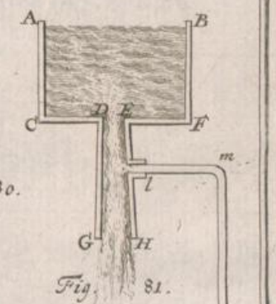


Fig. 81.

Fig. 79.

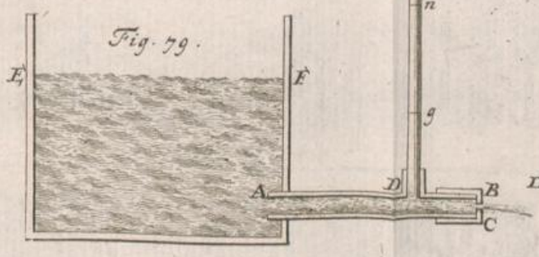
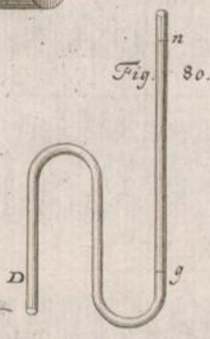


Fig. 80.



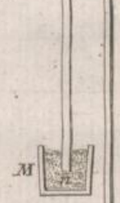


Fig. 82.

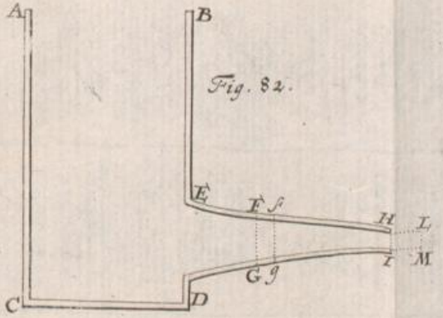


Fig. 83.

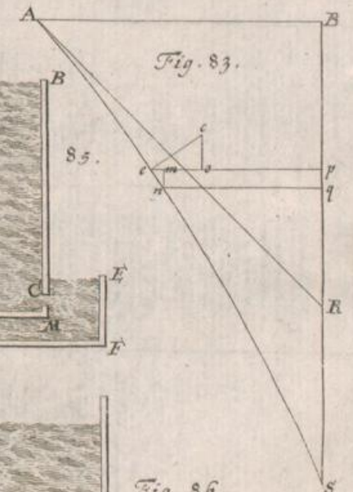


Fig. 85.

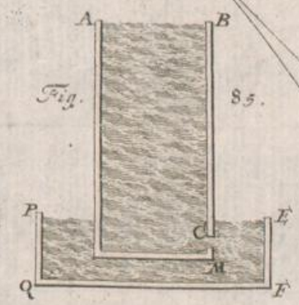


Fig. 84.

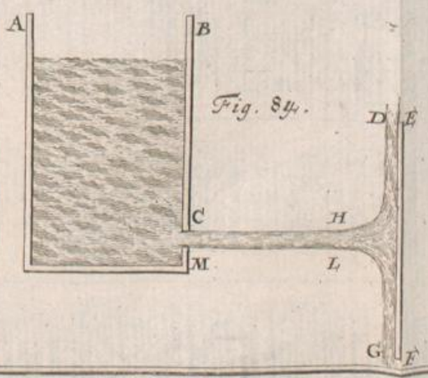
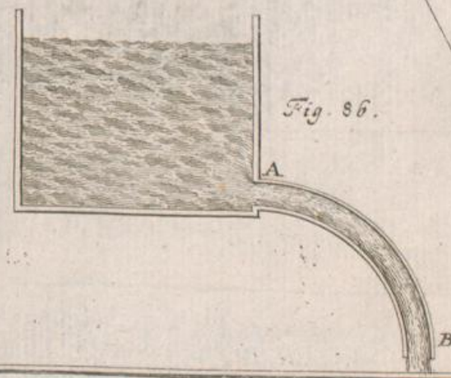


Fig. 86.



Wrisf.