Fuit igitur quantitas aquæ experimento inventa ad quantitatem, quam theoria ſepoſita impedimentorum conſideratione indicat, ut 11922 ad 26830; qui numeri, quamvis non parum differant, tamen egregie theoriam confirmant, quod ipſum nunc clare ob oculos ponam.

In formula $nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times log. \frac{a}{a-e}$, poſuimus pro a altitudinem velocitati maximæ aquæ effluentis debitam, qualis revera fuit in experimento, non qualis remotis obſtaculis futura fuiſſet; fecimus nempe $a = 141$: in theoria vero eſt $a = 433$. Quod ſi autem valor iſte poſterior aſſumatur, retinendo valorem altitudinis $e = 73$, fit $nb\sqrt{\frac{n}{g}}\ log. \frac{a}{a-e}$ proxime $= 6700$, qui numerus nunc multo minor eſt numero per experimentum eruto, cum antea fuerit admodum major. Talis autem fit cum altitudo e ſervare valorem ponitur: Verum prouti altitudo a aucta fuit ab 141 uſque ad 433, ita certe etiam altitudo e eſt augenda, foretque utraque altitudo in eadem ratione augenda, ſi impedimenta primis guttulis æqualiter reſiſterent & ſequentibus: ſed minorem reſiſtentiam offendunt cæteris paribus particulæ, quo tardius moventur, atque proin etiam guttulæ quæ cadunt cis terminum R minus retardantur, quam quæ terminum iſtum tranſgrediuntur: Facile eſt exinde colligere in minori ratione augendam eſſe altitudinem e quam alteram a, ipſam vero rationem dicere non poſſumus, niſi à poſteriori, faciendo ſcilicet, ut theoria conveniat cum experimento; ita reperitur ponendum eſſe $e = 120$, qui numerus animo ad omnes circumſtantias bene attento plane ſatisfacit.

Sic igitur manifeſtum mihi videtur, experimenti ſucceſſum talem fuiſſe, ut plane cum theoria conveniat. Hujusmodi autem exempla omnino demonſtrant, veras motuum leges in fluidis nos tradidiſſe, eaque inter infinita alia ſelegi, quod nullam habent nexum neque affinitatem cum regula communi, quæ fluida ubique velocitate effluere ſtatuit, toti altitudini aquæ ſupra foramen debita, neque poſſint principiis conſuetis ſolvi. Cæterum quoniam in hoc experimento motus aquæ retardatus fuit, aliud inſtituere volui, quo omnia impedimenta admodum diminuerentur, ut ſic appareret eo magis ad ſe invicem accedere numeros experimenti & regulæ, quo minora eſſent impedimenta.

Expe-

Experimentum 12.

Jam itaque usus fui tubo cylindrico per quem facilior fit transfluxus eoque ob eandem rationem ampliore: erat præterea arca cui tubus insertus fuit multo amplior, & denique altitudo aquæ in arca contentæ supra axem tubi multo minor fuit, ut minori velocitate aquæ transfluerent, sicque obstacula minoris momenti offenderent: Cætera fuerunt, ut ante.

Fuit igitur altitudo aquæ supra axem tubi $=$ 130. *part.* o P $=$ 553. *part.* P Q $=$ 453. *part.* P R $=$ 297. diameter G F vel M N $=$ 19. *part.* tubique longitudo 130. *part.*

Vidi aquam in patinam delapsam cylindrum explevisse, qui $8\frac{1}{2}$ *part.* in diametro continebat ad altitudinem 281. *part.* & cujus proinde capacitas erat 15950. *part. cub.* In hoc casu ponendum est $a = \frac{453 \cdot 453}{4 \cdot 553} = 93$. *part.* $e = 40$. *part.* $n = g = 284$. *particulis quadratis* & $b = 130$. His vero factis substitutionibus fit

$$n\,b\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log.\frac{a}{a-e} = 284 \cdot 130 \cdot \log.\frac{93}{53} = 20760,$$

cui numerus in experimento respondet, ut vidimus, 15950. Hic vero numerus fere quatuor quintas alterius explet, sicque eidem proxime accedit, cum in præcedenti exemplo ob rationes allatas similis numerus à simili plus quam dimidio defecerit,

Jam igitur abunde patet, solis obstaculis extrinsecis attribuendum esse, quod experimenta non ad amussim respondeant formulis; interim tamen talia esse, ut non possint melius harum formularum robur demonstrare.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO QUINTA.
De motu aquarum ex vasis constanter plenis.

§. I.

VAsa plena servantur, cum continue totidem affunduntur aquæ, quot effluunt; affusio autem esse potest vel in eadem cum motus superficiei aqueæ directione eademque singulis momentis velocitate, quasi scilicet nova continue crearetur superficies, cui velocitas aquæ proximæ jam insit, vel lateralis & sine impetu, veluti si superficies, quæ continue nova creari fingitur, nullo motu prædita sit & demum ab aqua inferiore ad motum cienda. Reliquos affundendi novas aquas, qui infiniti sunt, modos præteribo.

Regula interim circa hunc motum, præsertim posteriorem, recepta est, aquam effluere velocitate conveniente altitudini superficiei supra lumen: facile tamen est prævidere illam valere non posse, nisi pro vase ubique infinite amplo, in reliquis autem fore, ut motus à quiete incipiens sensim sensimque per aliqua temporis intervalla augeatur, & post infinitum demum tempus omnem velocitatem acquirat. Attamen, si dicendum, quod res est, fiunt istæ accelerationes plerunque tam celeriter, ut minimo tempusculo tantum non tota velocitas adsit: Verum res secus se habet in prælongis aquæ ductibus, in quibus velocitatum augmenta oculos non effugiunt & cum distinctis mensuris observari possunt.

Quicquid autem ejus rei sit, cum nullibi displicere possit accuratio mathematica, constitui motum aquarum à principio ad quemvis datum terminum considerare & prosequi.

§. 2. Omnes hujus motus proprietates ad tres præcipue æquationes se reduci patiuntur 1°. inter quantitatem aquæ ejectæ respondentisque velocitatis; 2°. inter tempus & velocitatem & 3°. inter quantitatem aquæ & tempus. Harum æquationum si una habeatur reliquæ inde sua sponte fluunt.

Primam

Primam igitur ſolam accuratius ſcrutabimur : Hic vero memores ſimus eorum, quæ in præcedente ſectione monita fuerunt circa contractionem venæ per ſimplicia orificia, aut tubos convergentes effluentis, & dilatationem ejuſdem, cum per tubos divergentes ejicitur. Indicavimus autem §. 3. *Art.* 1. *Sect.* IV. eò uſque venam conſiderandam eſſe, donec particularum velocitates (abſtrahendo animum à mutationibus quas gravitas in particulis extra vas producit) amplius non mutentur, & omnem illam venæ partem ceü intra vas motam æſtimandam eſſe, quaſi ſcilicet ſuperficies venæ eouſque indureſcat. Igitur deinceps cum de vaſe per quod aquæ effluunt ſermo erit, ſubintelligendum erit vas illud ideale, cujus orificium effluxus ſit ſectio venæ nulli deinceps mutationi ſubjectæ, niſi quæ deſcenſui vel aſcenſui venæ debetur.

Problema.

§. 3. Invenire velocitatem aquæ effluentis ex vaſe conſtanter pleno, poſtquam jam data aquæ quantitas effluxit.

Solutio.

Duo ſunt modi affundendæ aquæ præcipue conſideratu digni, quorum quivis aliam poſtulat problematis ſolutionem : vel enim aqua verticaliter in vas depluere ponitur & ita quidem, ut eâdem præciſe affluat velocitate, quam habet aquæ ſuperficies, vel lateraliter affluit aqua, ſicque caret impetu, quo ſua ſponte aquæ ſuperficiem inſequi poſſit & in motum demum eſt cienda.

Caſus 1.

Ut pro primo caſu æquationem inveniamus inter quantitatem aquæ ejectæ, velocitatemque reſpondentem, iiſdem unica mutata circumſtantia veſtigiis inſiſtendum erit, quæ in primis paragraphis ſectionis tertiæ ſecuti ſumus.

Sit igitur ut in §. 6. *Sect.* 3. vas propoſitum *a i m b* (Fig. 15. & 16.) quod affuſione aquarum conſtanter plenum ſervatur uſque in *c d*; effluant autem aquæ per foramen *p l*; ponaturque eam aquæ quantitatem jam effluxiſſe, quæ contineri poſſit in cylindro ſuper foramine *p l* erecto altitudinis *x*, ultimam autem guttulam effluxiſſe velocitate, qua aſcendere poſſit ad altitudinem *q s* ſeu *v*; ſic jam exhibenda erit æquatio inter *x* & *v*.

Sit curva C G I ſcala amplitudinum, talis nempe, ut, denotante H L alti-

altitudinem ſupra foramen, exprimat H G amplitudinem vaſis in illo loco. Deinde fiat tertia curva trv, cujus applicata H r ſit ubique æqualis tertiæ continue proportionali ad GH & PL ſeu cujus applicata Hr ſit $=$ PL^2 : GH.

Dicatur ſpatium DCIL $=$ M, ſpatium DtuL $=$ N, & erit *aſcenſus potentialis* aquæ in vaſe contentæ, poſtquam prædicta quantitas jam effluxit (per §. 2. *ſect.* 3.) $= \frac{N}{M} v$. Effluere porro intelligatur particula $plon$, ſuperficiesque cd deſcendere in ef, erit jam velocitatis altitudo pro particula $plon$ $= v + dv$; atque ſi nunc conſtruatur parallelogrammum LxyO, cujus latus LO ſit $= lo$ & alterum Lx $=$ PL, erit *aſcenſus potentialis* ejusdem aquæ in ſitu $efmlonpie$ æqualis tertiæ proportionali ad ſpatium EFLONPIE, (quod rurſus eſt $=$ M, quia PLON exprimit magnitudinem guttulæ $plon$, dum CDFE exprimit quantitatem minimam $cdfe$ iſti guttulæ æqualem) ſpatium $wuxy$OLF (quod eſt $=$ ſpatio N $-$ DtwF $+$ LxyO, unde ſi PL ſeu Lx ponatur $= n$, CD $= m$, LO $= lo = dx$, erit D$t = \frac{nn}{m}$, DF $= \frac{n}{m} dx$, hinc ſpatiolum DtwF $= \frac{n^3}{mm} dx$ & ſpatium LxyO $= ndx$ & denique ſpatium $wuxy$OLF $= N - \frac{n^3}{mm} dx + ndx$) & altitudinem $v + dv$. Eſt igitur *aſcenſus potentialis* modo dictus $= (N - \frac{n^3}{mm} dx + ndx) \times (v + dv) : M =$ rejectis differentialibus ſecundi ordinis $\frac{N}{M} v + \frac{N}{M} dv - \frac{n^3}{mmM} vdx + \frac{n}{M} vdx$, ſic ut incrementum *aſcenſus potentialis*, quod aquæ acceſſit dum guttula $plon$ effluxit, ſit $= \frac{N}{M} dv - \frac{n^3}{mmM} vdx + \frac{n}{M} vdx$, ubi ſpatia N & M ſunt conſtantis magnitudinis ob aquæ continuam affuſionem. Non conſideramus in hoc caſu primo *aſcenſum potentialem* guttulæ $cdfe$, quæ affunditur dum altera æqualis $plon$ effluit, quia iſte aſcenſus non generatur vi interna, neque enim aqua inferior poſt ſe trahere ponitur particulam $cdfe$, quin potius hanc vi quadam extrinſeca continue affundi conſideramus, idque nec majori nec minore velocitate quam quæ eſt ſuperficiei ef. Ergo omne incrementum hic conſiderandum, eſt ut diximus

$$\frac{N}{M} dv - \frac{n^3}{mmM} vdx + \frac{n}{M} vdx.$$

Debet

Debet vero istud incrementum æquari *descensui actuali* centri gravitatis; Atqui iste descensus, posita $DL = a$, est per paragraphum septimum *sect.* 3. $= \frac{nadx}{M}$; habetur igitur talis æquatio

$$\frac{N}{M}dv - \frac{n^3}{mmM}vdx + \frac{n}{M}vdx = \frac{nadx}{M}, \text{ seu}$$

$$dx = Ndv : \left(na - nv + \frac{n^3}{mm}v\right);$$

Hæc vero si ita integretur, ut v & x simul evanescant, dat

$$x = \frac{mmN}{n^3 - nmm} \log. \frac{mma - mmv + nnv}{mma}$$

quæ æquatio, posito c pro numero cujus logarithmus est unitas, æquivalet huic alteri

$$v = \frac{mma}{mm - nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3 - nmm}{mmN}x}\right)$$

Hæc vero solutio quadrat pro casu primo, ubi aqua superne motu affunditur communi cum descensu superficiei proximæ.

Casus II.

Quod si jam particula $cdfe$ lateraliter continue affundi ponatur, tunc propter inertiam suam motui aquæ inferioris resistit atque proinde *ascensus potentialis* ipsius aliter in computum venit. Tunc autem prius considerandus est *ascensus potentialis* massæ aqueæ $cdmlpic$ auctæ guttula mox affundenda; deinde indagandus *ascensus potent.* ejusdem aquæ in situ $cdmlonpic$, postquam nempe guttula jam effluxit, eorumque differentia est æquanda cum *descensu actuali.* $\frac{nadx}{M}$. Verum *ascensus potentialis* omnis prædictæ aquæ ante affusionem particulæ ejusdemque post affusionem ita invenitur: nempe *ascensus potentialis* aquæ $cdmlpic$ est $= \frac{Nv}{M}$, & *ascensus potent.* particulæ affundi paratæ nullus est, quia lateraliter affusa motum communem nondum habet cum massa inferiore; Igitur *ascensus potentialis* utriusque aquæ (qui scilicet habetur multiplicando massam respective per suum *ascensum potentialem*, dividendoque productorum aggregatum per aggregatum massarum) est =

$(M \times \frac{Nv}{M} + ndx \times o) : (M + ndx) = \frac{Nv}{M + ndx}$. Postquam vero particula ndx superne jam affusa est, communem acquisivit motum cum aqua proxime inferiori, sicque fit *ascensus potentialis* ejusdem aquæ in situ *cdmlonpic* æqualis tertiæ proportionali ad spatium CDLONPIC $(M + ndx)$, spatium D*tuxy* OLD $(N + ndx)$ & altitudinem $v + dv$, id est, $= \frac{(N + ndx) \times (v + dv)}{M + ndx}$, cujus excessus supra priorem *ascensum potentialem* est $= \frac{Ndv + nvdx + ndxdv}{M + dx} =$, rejectis differentialibus secundi ordinis, $\frac{Ndv + nvdx}{M}$. Habetur igitur talis æquatio $\frac{Ndv + nvdx}{M} = \frac{nadx}{M}$, quæ ut prior per tractata & ad finem deducta dat

$$x = \frac{N}{n} \log. \frac{a}{a - v}, \text{ vel}$$

$$v = a \times \left(1 - c^{\frac{-nx}{N}}\right)$$

quæ solutio valet pro affusione laterali.

Scholion I.

§. 4. Sunt hæ æquationes inter se admodum diversæ; diversitas autem eo major quo minoris est amplitudinis vas; & si quidem amplitudo vasis suprema in *cd* quasi infinita sit præ amplitudine foraminis, evanescit *n* præ *m* fitque in priori casu sicut in posteriori.

$$v = a \times \left(1 - c^{\frac{-n}{N}x}\right)$$

Est igitur hâc in hypothesi motus utrobique idem quod haud difficulter quisque prævidere potuerit. Celerior autem semper est cæteris paribus motus in priori affusione, quam in altera.

Conveniet hic rem etiam physice explicare, ut eam distinctius in omnibus phænomenis percipere possimus.

Sit loco vasis cujuscunque & quamcunque directionem habentis brevioris delineationis gratia cylindrus verticalis cum foramine in fundo, nempe
Fig. 29. GHND (Fig. 29.) sitque dein vas EFPQ perforatum in RS; fingantur orificia RS & GD perfecte æqualia, & ad minimam distantiam sibi perfecte respon-

ſpondentia, ita ut aquæ ex ſuperiori vaſe effluentes omnes in cylindrum ſubjectum influant.

Incipiant aquæ ex utroque vaſe effluere, ex ſuperiori autem conſtanter ea effluere velocitate ponantur, quam habet ſuperficies aquæ in cylindro ſuppoſito.

Ita patet ſatisfieri primæ affuſionis conditioni. Jam vero hujus motus phænomena inveſtigabimus, viſuri num cum præcedentibus conveniant.

Conſideremus igitur vas ſuperius eſſe veluti infinitum, ut aquæ per R S effluentes ſingulis momentis habeant velocitatem quæ conveniat altitudini P B ſeu F A: ſic fingendum erit eſſe hanc altitudinem P B ab initio infinitè parvam, quia tunc aquæ velocitate infinite parva effluere debent, deinde vero ſenſim creſcere, idque continue magis magisque, donec poſt tempus infinitum motus uniformis maneat, quæritur autem an altitudo aquæ P B tandem infinita futura ſit an vero certum terminùm non tranſgreſſura. Id ſic cognoſcetur.

Sit altitudo G H vel R H (neque enim illas inter ſe differre cenſendum eſt) $= a$, A F $= x$, amplitudo orificii L M $= n$, amplitudo orificii R S $= m$; quia vero, ut manifeſtum eſt, utrumque vas cohærere & unum efficere putari poteſt, erit poſt tempus infinitum (per §. 23. Sect. III.) velocitas aquæ in L M $= \sqrt{a+x}$, & in R S $= \sqrt{x}$, (quod poſterius patet, ſi nunc iterum ſeparata vaſa cenſentur, nam utrumque ſine errore fingi poteſt) debent autem velocitates eſſe in inverſa ratione amplitudinum orificiorum: eſt itaque $\sqrt{a+x}.\sqrt{x} :: m.n$, unde $a+x.x :: mm.nn$, vel $a.x :: mm-nn.nn$, ergo $x = \frac{nna}{mm-nn}$ & $a+x = \frac{mma}{mm-nn}$, videmus igitur altitudinem, velocitati aquæ in L M debitam, eſſe hoc modo $= \frac{mma}{mm-nn}$, poſtquam ſcilicet infinita aquæ quantitas jam effluxit: ſuperius autem habuimus eandem altitudinem, ſeu $v = \frac{mma}{mm-nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)$, ubi ſi ponitur $x = \infty$ (infinito enim tempore infinita quantitas transfluit) evaneſcit terminus exponentialis, ſi modo m major ſit quam n & ſic fit pariter $v = \frac{mma}{mm-nn}$. Mirabilis eſt iſte conſenſus, quia valde diverſæ ſunt viæ, quas ſecuti ſumus. Cæterum ſi m non ſit major quam n motus nunquam fit permanens nequidem poſt tempus infinitum, creſcit enim tunc velocitas in infinitum cum ſecus altitudo velocitatis nunquam trans-

transgrediatur altitudinem $\frac{mma}{mm-nn}$. De his igitur casibus nihil est quod dicamus.

Scholion 2.

§. 5. Quæstio hic nunc alia occurrit notatu digna; nempe quis esse possit modus affusionis mechanicus, ut vas superius ad debitam durante toto fluxu altitudinem plenum servetur. Difficile foret istud Problema ob inconstantiam altitudinis quæsitæ, nisi peculiare hic artificium occurreret, quod nunc tradam.

Nititur autem super eo, quod aqua in spatio minimo RSDG nullam patiatur compressionem neque affirmativam neque negativam, quia ex hypothesi communi velocitate movetur cum aqua proxime substrata, atque sic nulla particula nullam nec propellere nec retinere tentet.

Fiat igitur vas quod dixi utrumque, sitque tubus cum vase superiore firmatus (neque enim aliter quam demonstrationis gratia illa posuimus antea separata) habeat autem tubus in summitate *a* (Fig. 30.) foraminulum, cui respondeat tubulus *am*, in hunc tubulum immittatur tubus vitreus recurvus *abcdg*, obtectis cera oris *mn*: ducatur horizontalis *ae* noteturque punctum *e*. His sic præparatis, sic erit faciendum, ut durante toto experimento summitas aquæ constanter permaneat in puncto *e*; & ad hoc requiri videbis, ut ab initio superficies aquæ sit fundo F P proxima, deinde, ut continue elevetur, & denique ut post tempus etsi infinitum nunquam tamen transcendat altitudinem $\frac{nna}{mm-nn}$, facile autem erit aquarum affusionem ita moderari, ut superficies à puncto *e* non admodum divagetur, si modo circumstantiæ non sint ita comparatæ, ut aquæ ab initio nimis celeriter sint affundendæ.

Fig. 30.

Quod si autem superficiem in tubulo supra *e* elevatam animadvertis, inhibe paullo affusionem, quod faciendum esse alibi demonstrabo, si secus fuerit, largius aquas affunde.

Nihil habet difficultatis istud experimenti genus cujusmodi sæpe feci, sed ne error in experimentum irrepat, examinandus est tubi vitrei effectus capillaris; hunc effectum invenies, si obturato orificio LM, priusque madefacto tubo, cylindrus aqua impleatur usque ad summitatem, atque sic invenies superficiem aquæ in tubo pertingere usque in *f*, locum nempe altiorem quam *e*, hoc

hoc autem punctum *f* illi, de quo modo diximus, abſtrahendo animum à natura tubulorum capillarium, ſubſtitues.

Hoc igitur modo recte efficietur affuſio ad normam hypotheſeos noſtræ & ſic deinceps de hoc motu experimenta ſumi poterunt. Poſt quam vero ſic prolixe ſatis rem explicuimus, non opus puto monere vas ſuperius non aliter pertinere ad vas cylindricum inferius, quod ſolum conſideramus, quam ut cylindrus eo, quo fieri debet, modo plenus ſervetur atque ſic per *m* non intelligendam eſſe amplitudinem vaſis ſuperioris ſed amplitudinem orificii R S, quæ proprie nobis eſt ſuperficies aquæ, cum aquæ ſupra R S tantum debitæ affuſioni in cylindrum inferiorem inſerviant.

Scholion 3.

§. 6. Non debeo hic præterire, quod ſic caſus habeatur qui pertinet ad *hydraulico-ſtaticam*, de qua ſcientia quædam monui in Sect. I. §. 8. cognoſcimus nempe nunc quanta velocitate aqua in *a* præterfluere debeat ut preſſio ejus in latera tubi præciſe nulla ſit. Hæc vero dum ſcriberem, jam detexeram leges *hydraulico-ſtaticæ* generales, & non ſine voluptate vidi, quod iſte caſus ceu corollarium ex theoria plane alia deductus ſimilem acquirat ſolutionem ex theoria generali. Sic omnia ubique mutuo cohærent nexu, legitimamque principiorum applicationem demonſtrant.

Scholion 4.

§. 7. Sequuntur nunc quædam de alio aquæ affundendo modo. Ponatur cylindrus R H N G pro vaſe quocunque, ſitque is conſtanter plenus conſervandus affuſione laterali: poterit id fieri injiciendo ſufficientem aquæ quantitatem per tubulum *m a*; quamvis autem id non fiat ſine motu, attamen, quia hic horizontalis eſt, mox omnis tollitur, & per ſe neque promovet fluxum per cylindrum neque eundem retardat; ſed eſt alius inſuper modus, quem ſubducto recte calculo eodem recidere intelligimus: nempe ſi vas E F P Q infinite amplum cenſemus, & ejus fundum aqua continue obtectum intelligimus, ſed ita, ut aquæ altitudo in vaſe ſuperiori ſit pro infinite parva habenda; ſubminiſtrabit vas ſuperius aquam tubo ſibi annexo, neque alius inde motus orietur, quam ab affuſione laterali, ſi modo orificium R S ſemper obtectum maneat; facile autem fit ut ibi cataracta quædam formetur, ſi orificium L M amplum, tubusque R S N H longus ſit. Quod hic alter modus eundem cum priori effe-

ctum in motum aquarum exerere debeat, quiſque videt ex eo, quod in utroque modo omnis aquæ tubum ingredientis inertia ſit ab aqua inferiore ſuperanda. Sed idem etiam *à priori* demonſtrari poterit inquirendo in motum, qui inde oriri debeat, ſecundum æquationem paragraphi octavi Sect. III. quæ hæc eſt:

$$N dv - \frac{mmvydx}{nn} + \frac{mmvdx}{y} = -yxdx;$$

accommodabitur autem ad præſentem caſum, ſi pro m, x & $-dx$ ſubſtituas reſpective n, a, & $\frac{ndx}{y}$, (cujus rei ratio patebit, ſi hæc cum illis contuleris) ſimulque y infinitum ponas; tunc enim evaneſcit tertius æquationis terminus, fitque omnino, ut pro præſenti negotio ſupra invenimus,

$$N dv + nv dx = nadx.$$

Poſtquam in his ſcholiis motus utriuſque indolem, quantum ſimplex rei conſideratio phyſica permittit, eorumque differentiam oſtendimus, ſimulque modum illos producendi ad legem hypotheſeos mechanicum tradidimus, ſupereſt, ut reliqua phænomena notabiliora etiam indicentur, quod nunc faciam.

Corollarium I.

§. 8. Si in vaſe R S N H omnè fundum abſit, erit orificium L M = orificio R S; poteſt etiam hoc ab illo ſuperari, ſi nempe vaſis divergant latera. In his autem caſibus nullum habet terminum altitudo v in æquatione

$$v = \frac{mma}{mm - nn} \times \left(1 - \varepsilon^{\frac{n^3 - nmm}{mmN} x}\right)$$

& fit infinita, ſi quantitas aquæ ejectæ indicata per nx eſt infinita.

Id quidem per ſe patet ex æquatione, cum n eſt major quam m; at cum amplitudines orificiorum ſunt æquales, recurrendum eſt ad æquationem differentialem paragraphi tertii, ex qua iſta æquatio proxima deducta fuit, nempe

$$\frac{N}{M} dv - \frac{n^3}{mmM} vdx + \frac{n}{M} vdx = \frac{n}{M} adx,$$

quæ poſito $n = m$ dat $N dv = nadx$, id eſt, $v = \frac{nax}{N}$, ubi v fit manifeſte infinita ſi x eſt infinita.

§. 9. Sin autem vaſi propoſito fundum ſit, atque in eo foramen, cujus ampli-

amplitudo indicata per n minor ſit amplitudine orificii RS expreſſa per m, habet v valorem quem nunquam attingit quidem, ſed tamen proxime aſſequitur, & ad quem tam cito convergit, niſi data opera vaſa huic rei contraria excogitata adhibeantur, ut poſt minimum fluxus tempuſculum, quod ſenſibus percipi poſſit, notabiliter ab eo non deficiat. Eſt autem terminus ille talis, $v = \frac{mma}{mm - nn}$: igitur in caſu Scholii ſecundi §. 5. ultimus terminus PB eſt $= v - a = \frac{nna}{mm - nn}$. Exemplo citiſſimam velocitatis ad ultimum ſuum terminum acceſſionem illuſtrabo, poſtquam æquationem inter v & tempus altitudini v reſpondens appoſuero.

Corollarium 3.

§. 10. In caſu affuſionis, quam vocamus, lateralis, fit ultima altitudo $v = a$, quæcunque inter utrumque vaſis orificium ratio interceſſerit.

Corollarium 4.

§. 11. Si vas eſt cylindricum ejusque longitudo ponatur $= b$, fit (*vid.* §. 3.) $N = \frac{nnb}{m}$: notetur autem non confundendos eſſe valores litterarum a & b, primus enim exprimit altitudinem ſupremi orificii ſupra inferius, alter longitudinem canalis; Sic itaque conveniunt inter ſe valores in hoc ſaltem caſu, cum axis vaſis linea eſt recta & verticalis; at ſi axis tortuoſus eſt, vel ſaltem non verticalis, differunt à ſe invicem: Hæc ideo expreſſe monere volui, ne quis ſibi a figuris vaſorum, quorum axes ubique rectos & verticales feci, imponi patiatur.

Quod ſi igitur pro vaſis cylindricis ponatur $N = \frac{nn}{m} b$ fit pro affuſione verticali

$$v = \frac{mma}{mm - nn} \times \left(1 - c^{\frac{nn - mm}{mnb} x}\right)$$

& pro altera laterali fit $v = a\left(1 - c^{\frac{-mx}{nb}}\right)$.

Problema.

§. 12. Invenire velocitatem aquæ, ex vaſe conſtanter pleno effluentis, poſtquam fluxus per datum tempus duravit.

Solutio.

Retentis hypothesibus & denominationibus omnibus, quas in §. 3. adhibuimus, positoque insuper tempore à fluxus initio præterito $= t$, mutandas habebimus æquationes in dicto paragrapho datas in alias, quæ relationem exprimant inter t & v, eliminatis quantitatibus x & dx. Est vero elementum tempusculi dt proportionale minimo spatiolo dx, quod percurritur, diviso per velocitatem $\sqrt{v}$: ponemus igitur $dt = \frac{\gamma dx}{\sqrt{v}}$, & sic mutabitur æquatio

$$dx = N dv : \left(na - nv + \frac{n^3}{mm} v \right)$$

quæ data fuit pro affusione verticali debita velocitate instituenda in hanc

$$\text{(I)}\ dt = N\gamma dv : \left(na\sqrt{v} - nv\sqrt{v} + \frac{n^3}{mm} v\sqrt{v} \right)$$

altera vero affusioni inserviens laterali, nempe $dx = N dv : (na - nv)$ abit in hanc post eandem substitutionem

$$\text{(II)}\ dt = N\gamma dv : (na\sqrt{v} - nv\sqrt{v})$$

Hæ vero æquationes debito modo integratæ dant pro prima

$$(a)\ t = \frac{mN\gamma}{n\sqrt{(mma - nna)}} \times log. \frac{m\sqrt{a} + \sqrt{(mmv - nnv)}}{m\sqrt{a} - \sqrt{(mmv - nnv)}}$$

& pro altera, quæ ex priori deducitur, posito $m = \infty$

$$(b)\ t = \frac{N\gamma}{n\sqrt{a}} \times log. \frac{\sqrt{a} + \sqrt{v}}{\sqrt{a} - \sqrt{v}}.\ \text{Q. E. I.}$$

Scholium.

§. 13. Si vas de quo sermo est sit cylindricum utcunque intortum & inclinatum, cujus longitudo ponatur $= b$, manente altitudine superficiei aqueæ supra foramen $= a$, erit rursus, ut §. 11. $N = \frac{nn}{m} b$.

Quoniam autem, ut constat, $2\gamma\sqrt{A}$ exprimit tempus, quod corpus insumit cadendo libere & à quiete per altitudinem A, patet quantitatem $\frac{2mN\gamma}{nn\sqrt{a}} \left(= 2\gamma\sqrt{\frac{bb}{a}} \right)$ exprimere tempus quo corpus moveri incipiens à quiete libere descendit per altitudinem $\frac{bb}{a}$: accipiemus istud tempus pro com-

communi menſura idemque ponemus $= \theta$, & mutabitur pro vaſis ſeu canalibus cylindricis æquatio (α) in hanc

$$t = \frac{n\theta}{2\sqrt{(mm-nn)}} \times log. \frac{m\sqrt{a}+\sqrt{(mmv-nnv)}}{m\sqrt{a}-\sqrt{(mmv-nnv)}}$$

altera vera ſignata (β) talis fit

$$t = \frac{n\theta}{2m} \times log. \frac{\sqrt{a}+\sqrt{v}}{\sqrt{a}-\sqrt{v}},$$

ex quarum utraque apparet, non poſſe non breviſſimo tempore aquas omnem fere velocitatem acquirere, idque eo citius quo amplior eſt tubus, quo brevior, & quo magis verticalis: Neque accelerationes ullo modo eſſe perceptibiles, niſi prælongi ſtatuantur aquæ ductus & tunc quoque brevi tempore omnes fere accelerationum gradus percurri, quod utrumque nunc exemplo illuſtrabo.

(I) Quæritur tempus quo fluidum ex cylindro conſtanter pleno verticali, ſedecim pedes anglicos longo & cujus diameter quintupla ſit diametri foraminis, velocitatem acquirit quæ debeatur altitudini $\frac{99}{100}a$, idque in hypotheſi, ad quam æquatio ſecunda pertinet; ſic eſt $\frac{n}{m} = \frac{1}{25}$, $v = \frac{99}{100}a$, $b = a$, unde tempus quod corpus inſumit cadendo libere per ſpatium $\frac{bb}{a}$, ſeu $\theta =$ uni minuto ſecundo; hinc fit $t = \frac{1}{50} log. 399.$ id eſt, proxime nonæ parti unius minuti ſecundi, quod tempusculum utique imperceptibile eſt; Cum vero tempus notabile aſſumitur, fiunt mutationes altitudinum v, inſenſibiles. Si tempus ſimile (quo nempe velocitas pariter nonaginta novem centeſimis partibus altitudinis, quanta poſt tempus infinitum fit, debita generetur) in prima hypotheſi quæratur, nempe tempus quo obtinetur $v = \frac{99}{100} \times \left(\frac{mma}{mm-nn}\right)$ reperitur illud præcedente paullulum majus, ſed exceſſu inſenſibili: unde patet in hujusmodi vaſis non poſſe fere aquas ſat celeriter affundi in vas ſuperius, ut hypotheſi ſatisfiat, nec adeoque ratione ejusdem hypotheſeos experimenta alia ſumi poſſe, quam ut exploretur, num revera tanta ſit altitudo BP in figura trigeſima, quanta vi paragraphi quinti eſſe debet, ut punctum e aut f, durante fluxu ſitum ſervet, quem ante fluxum obturato orificio LM, nullaque exiſtente aqua in vaſe ſuperiore habuit.

(II) Quæritur nunc idem tempus pro secunda rursus hypothesi, si tubus ejusdem fuerit amplitudinis eodemque foramine instructus, sed oblique situs longitudinemque b habuerit 184 *perticarum* seu 1104 *pedum Paris.* dum altitudo superficiei aqueæ supra orificium effluxus sit 16. *ped. Paris.* Ita fiet $b =$ 1104, & $\frac{bb}{a} = 76176$. atque præterpropter $\theta = 72$ *sec. min.* unde tempus quæsitum medium est inter octo novemque minuta secunda, quod certe satis notabile est. Si vero tempus desideretur, quo altitudo v exæquet tantum quartam partem altitudinis a, reperietur illud æquale $\frac{72}{50}$ *log.* 3 $=$ proxime uni minuto secundo cum dimidio.

Nescio an hæc conveniant cum iis, quæ Mariottus à se observata refert in *tract. de mot. aquar. part.* 5. *disc.* 1. ubi mentionem facit alicujus fontis salientis, qui est à *Chantilly*, ad quem aquæ devehuntur per canalem 184. *perticas* longum, si modo recte ex antecedentibus conjeci, eratque summa superficiei aqueæ altitudo supra orificium effluxus indicata per a sedecim *pedum*: diameter aquæductus erat 5. *poll.* orificium autem habebat diametrum unius pollicis. Videtur mihi Mariottus ita loqui ac si accelerationes multo fuissent tardiores, quam ab formula nostra indicantur, quod nescio an tribuendum sit huic quod fortasse alium, præter orificium de quo hic sermo est, exitum habuerint aquæ, an, quod aquæ ductus dum fluxus inciperet non fuerit aqua plenus, quod posterius multa faciunt, ut credam; si neutrum fuerit, confido phænomena qualia à Mariotto observata fuerunt & quotidie de novo observari poterunt plane convenisse cum calculo nostro. Cæterum verba Mariotti hæc sunt: *Illud insuper*, ait, *singulari eidem jactui accidit, quod obturato manu orificio per decem aut duodecim scrupulorum secundorum temporis spatium eodemq; postea reserato, aqua non protinus erumpat, sed paullatim assurgens jactus ascendat ad 3. poll. postea ad pedis altitudinem & denique ad duos pedes successive notabilibus intervallis..... Sed tandem tamen toto impetu suo aquæ exiliebant.*

Problema.

§. 14. Invenire quantitatem aquæ per datum vas, constanter plenum conservandum, dato tempore transfluentem.

Solutio.

Solutio.

Adhibitis rurſus poſitionibus & denominationibus paragraphi tertii & duodecimi, invenienda nunc erit æquatio inter x & t: quia vero, ut vidimus §. 12. eſt $dt = \frac{\gamma dx}{\sqrt{v}}$, erit $\sqrt{v} = \frac{\gamma dx}{dt}$, hicque valor ſubſtituendus erit in æquationibus, quas dedimus §. 3. integratis; prior harum æquationum hæc fuit: $v = \frac{mma}{mm-nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3 - nmm}{mmN} x}\right)$

quæ pro præſecuti inſtituto mutatur in hanc

$$\text{(I)} \quad \frac{\gamma\gamma dx^2}{dt^2} = \frac{mma}{mm-nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3 - nmm}{mmN} x}\right)$$

altera ex §. 3. allegatarum æquationum talis fuit

$$v = a \times \left(1 - c^{\frac{-n}{N} x}\right)$$

quæ adeoque ſubminiſtrat in præſenti caſu ſequentem

$$\text{(II)} \quad \frac{\gamma\gamma dx^2}{dt^2} = a \times \left(1 - c^{\frac{-n}{N} x}\right)$$

Erunt nunc æquationes (I) & (II) integrandæ, quod quidem facile eſt & quia prior alteram continet (utraque enim eadem eſt ſi $m = \infty$) hanc ſolam pertractabimus, eamque nunc ſub hâc forma conſiderabimus.

$$dt = \frac{\gamma\sqrt{(mm-nn)}}{m\sqrt{a}} dx : \sqrt{\left(1 - c^{\frac{n^3 - nmm}{mmN} x}\right)}$$

Ponatur autem ut integrationis modus eo magis pateſcat

$$c^{\frac{n^3 - nmm}{mmN} x} = z, \text{ atque proin } dx = \frac{mmN dz}{(n^3 - nmm) z},$$

dein brevitatis ergo indicetur quantitas conſtans

$$\frac{\gamma\sqrt{(mm-nn)}}{m\sqrt{a}} \times \frac{mmN}{n^3 - nmm}, \text{ ſeu } \frac{-\gamma mN}{n\sqrt{(mm-nn)a}} \text{ per } \alpha,$$

$$\text{\& habebitur } dt = \frac{\alpha dz}{z\sqrt{(1-z)}},$$

in

in quâ si præterea fiat $1 - z = qq$, seu $z = 1 - qq$, $dz = -2qdq$, oritur

$$dt = \frac{-2\alpha dq}{1-qq} = \frac{-\alpha dq}{1+q} \; \frac{-\alpha dq}{1-q}$$

cujus integralis est

$$t = -\alpha \log.(1+q) + \alpha \log.(1-q) = \alpha \log.\frac{1-q}{1+q}.$$

Nec opus est constante, quandoquidem ex natura rei t & x, simul evanescere debent, posito autem $x = 0$, fit $z = 1$, & $q = 0$, igitur pariter t & q simul à nihilo incipere debent, cui conditioni satisfacit æquatio inventa $t = \alpha \log.\frac{1-q}{1+q}$: Superest ut retrogrado ordine valores pristinos reassumamus, ita vero fit

$$t = \alpha \log.\frac{1-\sqrt{(1-z)}}{1+\sqrt{(1-z)}} \text{ vel}$$

$$t = \frac{\gamma m N}{n\sqrt{(mm-nn)a}} \times \log.\frac{1+\sqrt{(1-z)}}{1-\sqrt{(1-z)}} \text{ vel denique}$$

$$\text{(I) } t = \frac{\gamma m N}{n\sqrt{(mm-nn)a}} \times \Big[\log.\Big[1+\sqrt{\Big(1-c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\Big)}\Big]$$

$$-\log.\Big[1-\sqrt{\Big(1-c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\Big)}\Big]\Big]$$

Istaque æquatio posito $m = \infty$ dat alteram æquationem quæsitam

$$\text{(II) } t = \frac{\gamma N}{n\sqrt{a}} \times \Big[\log.\Big[1+\sqrt{\Big(1-c^{\frac{-n}{N}x}\Big)}\Big]$$

$$-\log.\Big[1-\sqrt{\Big(1-c^{\frac{-n}{N}x}\Big)}\Big]\Big] \text{ Q. E. I.}$$

Corollarium I.

§. 15. Si ponatur $x = \infty$, ut appareat natura rei, cum infinita jam transfluxit aquæ quantitas assumaturque m major quam n, prouti plerumque esse solet, evanescere censenda est, in utroque logarithmo affirmative sumto, quantitas exponentialis & habebitur utrobique *log.* 2. At vero in logarithmo negative sumto statuenda est

$$\sqrt{\Big(1-c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\Big)} = 1 - \tfrac{1}{2}c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x} \text{ \& proinde,}$$

log.

$$\log.\left[1-\sqrt{\left(1-c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)}\right]=\log.\tfrac{1}{2}c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}=\frac{n^3-nmm}{mmN}x-\log.2.$$

Hæ ſubſtitutiones ſi recte fiant, erit pro primo quem finximus affuſionis modo

$$\text{(I)}\ t=\frac{\gamma mN}{n\sqrt{(mm-nn)a}}\times\left(2\log.2+\frac{mmn-n^3}{mmN}x\right)$$

quæ poſito rurſus $m=\infty$ dat pro altero caſu

$$\text{(II)}\ t=\frac{\gamma N}{n\sqrt{a}}\times\left(2.\log.2+\frac{n}{N}x\right).$$

Sequitur ex iſtis formulis, minori quidem quantitate transfluere aquas, ac ſi ſtatim ab initio omni velocitate, quam in utroque caſu poſt tempus infinitum acquirunt, effluerent: differentiam tamen nunquam certum transgredi terminum & poſt tempus infinitum finitis comprehendi terminis.

Corollarium 2.

§. 16. Quum convertimus æquationes inventas, obtinemus

$$\text{(I)}\ x=\frac{2mmN}{mmn-n^3}\left[\log.\left(1+c^{\frac{-t}{\alpha}}\right)-\log.2+\frac{t}{2\alpha}\right],\ \&$$

$$\text{(II)}\ x=\frac{2N}{n}\times\left[\log.\left(1+c^{\frac{-t}{\beta}}\right)-\log.2+\frac{t}{2\beta}\right]$$

ubi α, ut ſupra, $=\frac{-\gamma mN}{n\sqrt{(mm-nn)a}}$ & $\beta=\frac{-\gamma N}{n\sqrt{a}}$.

Si præterea, ut in proximo Corollario, ponatur $t=\infty$, évaneſcit unitas præ quantitatibus, exponentialibus, quæ ſupra omnem ordinem infinitæ ſunt, & fit $\log.\left(1+c^{\frac{-t}{\alpha}}\right)=-\frac{t}{\alpha}$ atque $\log.\left(1+c^{\frac{-t}{\beta}}\right)=-\frac{t}{\beta}$: unde tunc erit reſumtis valoribus litterarum α & β.

$$\text{(I)}\ x=\frac{mt\sqrt{a}}{\gamma\sqrt{(mm-nn)}}-\frac{2mmN}{mmn-n^3}\log.2,\ \&$$

$$\text{(II)}\ x=\frac{t\sqrt{a}}{\gamma}-\frac{2N}{n}\log.2.$$

Igitur ſi ſtatim à fluxus initio utrobique aquæ omni, quam acquirere

 poſſunt,

poſſunt, velocitate conſtanter effluerent, non excederet earum quantitas poſt tempus infinitum quantitatem pro eodem tempore theoriæ reſpondentem, niſi parvula quantitate, quæ in primo caſu exprimitur per $\frac{2mmN}{mm-nn}$ *log.* 2. & in ſecundo per $\frac{aN}{n}$ *log.* 2. Atque ſi loco temporis infiniti ſumas tempus tantum aliquot ſcrupulorum ſecundorum, idem *theorema* proxime locum habebit; ita ut ſi v. gr. poſt decem prima minuta ſecunda effluxerit quantitas Q, effluxura fere ſit totidem minutis ſecundis proxime ſequentibus $Q+\frac{2mmN}{mmn-n^3}$ *log.* 2. vel in altero caſu $Q+\frac{2N}{n}$ *log.* 2.

Scholium.

§. 17. Ad theoriam hactenus expoſitam pertinet etiam motus aquarum per ſiphones. Indicat autem theoria, poſſe ſiphonis axem utcunque inflecti, neque inde motum aquarum deturbatum iri, modo altitudo ſuperficiei aqueæ ſupra orificium effluxus eadem maneat; cum præterea aquæductus, ſiphones aut diabetæ hujuſcemodique vaſa alia ſoleant eſſe cylindrica erit ut monui §. 13. quoties id contingit, ponendum $N = \frac{nn}{m} b$, intelligendo per b longitudinem canalis aut ſiphonis: in formulis quoque paragraphorum 14, 15, & 16, erunt quantitates ſic interpretandæ, ubi de temporibus quæſtio eſt, ut $2\gamma\sqrt{A}$ repræſentet tempus quod corpus impendit in deſcenſum per altitudinem verticalem A à quiete cœptum.

Cæterum, ut dixi paſſim, nihil indicat ſingulare theoria hujus ſectionis, quod ſub ſenſus cadat, niſi in aquæ ductibus admodum longis, ad horizontalem valde obliquis & orificium non admodum ſtrictum habentibus; hæc tria enim concurrunt ad retardandas ſicque notabiles efficiendas accelerationes, quarum menſuræ potiſſimum theoriam commendant.

Eſt tamen & in his circumſtantiis medium aliquod obſervandum, ne impedimenta ab adhæſione aquæ oriunda nimia ſint

Quod attinet ad affuſionem aquarum, mihi viſus ſum animadvertere, ſi ver-

verticaliter fiat & cum impetu, tantum abeſſe, ut inde motus acceleretur, quin potius retardetur, niſi aquarum affuſio fiat in totam ſuperficiem æquabiliter eo, quem §. 4. expoſui, modo, ſi enim aliter affundantur, motus aquarum in vaſe perturbatur, iſque motus confuſus effluxum retardat.

§. 18. Denique huc quodammodo pertinent experimenta ab Clar. Joanne Poleno inſtituta, ut refert in libro primo de *motu aquæ mixto*, p. 21. & ſeqq. quæ ideo hic alleganda eſſe cenſui, quod egregie demonſtrant, ubique celeritatem ultimam in vaſis conſtanter plenis eam eſſe, quæ integræ aquæ altitudini conveniat, ſi vaſa non ſint ſubmerſa, aut differentiæ altitudinum aquæ internæ & externæ in vaſis ſubmerſis, quamvis de cætero nihil in illis ſit, quod nunc novum adhuc ſit, quia nullæ illic conſiderantur accelerationes.

Finge cylindrum, cujus axis habeat ſitum verticalem, amplitudinis veluti infinitæ; fundum integrum ſit: in pariete autem fiſſura ſit axi parallela, foramen habens parallelogrammi rectanguli, quæ à fundo ad cylindri uſque ſummitatem extendatur. Puta porro aquam in cylindrum affundi æquabiliter, ita, ut æqualibus temporibus quantitates injiciantur æquales, effluent aquæ ex cylindro per fiſſuram: nec tamen ab initio eadem effluent quantitate, qua ſuperne affunduntur, ſed minori: igitur aſſurget ſuperficies aquæ in cylindro ad certam uſque altitudinem aſſymptoton; ſi vero is jam intelligatur adeſſe terminus, immutata manebit altitudo aquæ & eadem quantitate effluent conſtanter aquæ, qua affunduntur: Apparet quoque, altitudinem aquæ in cylindro eo majorem fore, quo largius affundantur: Quæritur itaque auctis quantitatibus aquarum dato tempore affundendis, in quanam ratione creſcere debeant altitudines, ad quas aquæ in cylindro aſſurgent.

Solutio hæc eſt. Sit altitudo aquæ, cum eſt in ſtatu permanente $= \alpha$: & abſcindatur à ſuperficie pars quæ ſit $= x$, una cum differentiali dx: ſit latitudo rimæ $= n$, habebimus veluti foramen amplitudinis $= n\,dx$, per quod aquæ effluunt velocitate $\sqrt{x}$: igitur quantitas aquæ dato tempore ibi effluentis eſt ut $n\,dx\sqrt{x}$, cujus integralis eſt $\frac{2}{3}nx\sqrt{x}$; quæ exprimit quantitatem aquæ dato tempore per rimæ longitudinem abſciſſam x effluentem: & ſic quantitas aquæ eodem tempore per rimam integram effluens exprimetur per $\frac{2}{3}n\alpha\sqrt{\alpha}$: tantum autem effluit, quantum affunditur; hinc ſi quantitas aquæ dato illo tempore affuſæ dicatur q, erit $\frac{2}{3}n\alpha\sqrt{\alpha} = q$. Id indicat quantitates aqua-

rum dato tempore affundendarum ſequi rationem ſeſquiplicatam altitudinum, ad quas aquæ à fundo cylindri aſcendunt: aut viciſſim altitudines ſequi rationem ſubtriplicatam quadratorum quantitatum, quibus aquæ dato tempore affunduntur.

§. 19. Soluto hoc problemate venio ad alterum Cl. Poleno conſideratum.

Sit idem cylindrus, ſed aquis in foſſa veluti vaſe infinito ſtagnantibus, ſubmerſus; dicaturque altitudo ſubmerſionis $= a$, quæritur nunc iiſdem poſitis, ut antea, rurſus æquatio inter altitudinem α ſuperficiei aqueæ internæ ſupra externam, & quantitatem q dato tempore affundendam.

Quod ad illam rimæ partem α, quæ aquas ejicit & ſupra aquam externam eminet, illam jam vidimus dato tempore erogare quantitatem $\frac{2}{3} n \alpha \sqrt{\alpha}$: reſidua autem rimæ pars ſubmerſa aquas ubique communi velocitate tranſmittit, ut ex infra dicendis patebit, & quidem velocitate $\sqrt{\alpha}$, ita, ut multiplicata hâc velocitate per magnitudinem rimæ ſubmerſæ $n a$, habeatur quantitas, quam dato tempore ejicit $= n a \sqrt{\alpha}$. Si utraque quantitas in ſummam conjiciatur, habebitur $(\frac{2}{3} \alpha + a) n \sqrt{\alpha} = q$.

Ope hujus æquationis cognoſcitur q ex datis altitudinibus a & α: aut viciſſim altitudo α ex cognitis quantitatibus a & q.

Convenire autem hanc æquationem admodum accurate cum experimentis, ipſe oſtendit celeberrimus eorum auctor, cujus ſolutio ab hâc noſtra non differt. Sequitur ex iſta æquatione, elevationes α eo majores eſſe pro iiſdem aquarum affuſionibus, quo minor eſt altitudo ſubmerſionis a.

Experimenta quæ ad Sectionem V. pertinent.

Ad §. 5.

VAſe uſus ſum §. 5. deſcripto cum tubulo vitreo (Fig. 30.) Primo autem obturavi orificium L M, tubumque R N aqua implevi, donec ſuperficies ejus raderet foraminulum in a: aquam tunc tubo ingreſſam obſervavi extremitate attigiſſe punctum f: poſtea reſerato orificio L M, & aquis effluentibus novas affundebam in vas ſuperius E F P Q adhibita diligentia, ut extremitas aquæ in f interea nec aſcenderet nec deſcenderet. Hæc dum fierent

rent elevabatur ſuperficies A B, nunquam autem certum terminum tranſgrediebatur; fuit nempe quantum videre potui, maxima altitudo P B ſeu F A $=$ $\frac{nn}{mm-nn}a$, denotante $\frac{n}{m}$ rationem inter orificium inferius L M & ſuperius R S, & a altitudinem verticalem orificii poſterioris ſupra alterum.

Id vero ſolum eſt, quod ipſemet inſtitui experimentum, quamvis multæ ſint propoſitiones in hâc ſectione contentæ, quæ mereantur attentionem eæque ſatis inexpectatæ, non potui tamen de illis experimenta ſumere; ſunt enim ita comparatæ in vaſis brevioribus, ut quod ſingulare habent, id ſenſus effugiat, rem autem experiri in longis aquæductibus commode non potui: cum aliis hæc dabitur occaſio, theoriam hanc examinaturis, animum advertent ad ſequentia:

I°. In fontibus ſalientibus obſervetur altitudo jactus integra; poſtmodum obturato prius orificio eodemque mox reſerato videatur aquæ quantitas, quæ effluat, dum aqua ad dimidiam altitudinem jactus integri, aut aliam partem quamcunque perveniat, quod quidem breviſſimo eveniet tempore, illius quantitatis menſura ſit longitudo cylindri ſuper foramine, per quod aquæ exiliunt, exſtructi, quam longitudinem vocavimus x, altitudinem vero jactus integram nominavimus a, altitudinemque jactus qui nondum totam attigerit altitudinem, obſervatam deſignavimus per v. Tum denique inſtituto calculo exploreter, num hæ quantitates recte reſpondeant æquationibus pro utroque affundendi modo exhibitis in paragrapho tertio.

II°. Fiant omnia, ut ante, hoc ſaltem diſcrimine, quod loco quantitatis effluentis tempus effluxus notetur, ut ſic examinari poſſint formulæ paragraphi decimi tertii, & denique comparetur quantitas cum tempore fluxus, ut appareat num recte reſpondeat formulæ §. 14.

III°. Tum præcipue fiat id experimenti genus, quod indicavi paragrapho decimo ſexto, obſervando ſcilicet, quantitates aquarum dimidiis temporibus reſpondentes; dixi autem, quantumvis magnum ſumatur tempus, differentiam harum quantitatum nunquam exæquare $\frac{2mmN}{mmn-n^3}$ *log.* 2. in priori, quem finximus, affundendi modo; aut $\frac{2N}{n}$ *log.* 2. in poſteriori.

Istas autem differentias, utut nunquam perfecte orituras, minimo tamen tempore proxime adfuturas esse.

Quæ reliqua sunt in hâc sectione Corollaria & Scholia quisque facile videbit, quo modo ad experimenta vocari possint: Velim autem, priusquam judicium ferat, attentus sit ad omnes circumstantias ratione impedimentorum, contractionis venæ, aliorumque, quas nolo ubique repetere. Ad §. §. 17. & 18. Experimenta pro confirmatione problematis §. 17. ad vasa non submersa pertinentis, vide p. 26. *lib. cit.* Jll. Poleni.

Cum vero in vase submerso esset altitudo $a = 55$. *lin. Paris.* (quæ altitudo ei dicitur mortua) quinque instituit experimenta, in quibus altitudo, quam dicit, viva seu α erat successive linearum $8\frac{3}{4}$; 25; 42; 58 & $73\frac{1}{2}$: his substitutis valoribus in æquatione §. 18. exhibita sequitur, quantitates aquarum dato tempore affusarum fuisse ut 100; 199; 299; 396 & 495: actu affusæ fuerunt in ratione ut 100, 200, 300, 400, & 500: differentia tantilla est, ut dubitari possit, an non perfectus consensus futurus fuisset, si omnes mensuræ rectissime haberi potuissent.

Reliqua etiam experimenta à viro Cl. instituta cum theoria perfecte consentiunt: calculum eorum videre est apud ipsum Auctorem. E re autem duxi eadem hic apponere, quia ad argumentum hujusce sectionis pertinent, quamvis cæterum libenter fatear, me magis desiderare illa experimenta, quæ à calculo mutationem *momentanearum*, nemini quod sciam adhuc consideratarum, pendent, quam quæ statum *permanentem* supponunt.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ

SECTIO SEXTA.

De fluidis non effluentibus ſeu intra latera vaſorum motis.

§. I.

HActenus conſideravimus aquas effluentes ; nunc vero contemplabimur motus aquarum, quæ vaſorum limites non præterfluunt. Omnes hos motus ad duo reducam genera , ambo ſeorſim pertractanda :

1°. Cum fluidum in tubo infinite longo continue movetur verſus eandem plagam.

2°. Cum motibus reciprocis ſeu oſcillatoriis agitatur.

De motu aquarum per canales indefinite longos.

Caſus I.

§. 2. Sit primo canalis horizontaliter poſitus , ſed amplitudinibus data quacunque varians lege : ponatur fluidum in illo ita poſitum , quod fieri ſolet in tubis ſtrictioribus , ut ambæ ſuperficies extremæ ſitum obtineant ad axem canalis perpendicularem & ſic datâ quadam velocitate moveri incipere. Hæc ſi ita ſint , nullaque plane motus impedimenta adeſſe fingantur , perſpicuum eſt , motui aquarum nullum finem fore , quemadmodum globus ſuper tabula horizontali liberrime progrediens motum ſine fine concontinuat. Attamen inſignis inter utrumque motum intercedit differentia : globi nempe partes omnes uniformi continue progrediuntur velocitate , in aqua perpetuo motum mutant : Neque difficile erit motum iſtum definire, cum conſiderabimus , motum talem eſſe debere, ut *aſcenſus potentialis* totius aquæ idem conſervetur , qui ab initio motus fuit : Determinavimus autem *aſcenſum potent.* aquæ certâ velocitate in canali quocunque motæ in ſectionis tertiæ

tiæ paragrapho ſecundo: Igitur nihil ad ſolutionem quæſtionis amplius reſiduum eſt: Neque tamen abs re erit unum alterumve ejus rei exemplum attuliſſe.

Exemplum 1.

Si v. gr. canalis B gfC (Fig. 31.) qui figuram habeat coni-truncati; intelligatur pars ejus B G F C fluido plena moto verſus gf; habeantque particulæ fluidi in G F velocitatem debitam altitudini v; ac denique pervenerit fluidum in ſitum $bgfc$: His poſitis quæritur velocitas fluidi in gf. Vocabo autem altitudinem velocitati aquæ in gf debitam $= V$; Sit vertex coni in H; diameter in B C $= n$; diameter in G F $= m$: longitudo B G $= a$; G$g = b$, erit diameter $gf = \frac{ma - mb + nb}{a}$. Deinde quia ſolidum B G F C eſt æquale ſolido $bgfc$ erit $BC^2 \times BH - GF^2 \times GH = bc^2 \times bH - gf^2 \times gH$: unde $bc^2 \times bH = BC^2 \times BH - GF^2 \times GH + gf^2 \times gH$: eſt vero $bH = \frac{BH}{BC} \times bc$: igitur $bc^3 = BC^3 - \frac{GF^2 \times GH \times BC}{BH} + \frac{gf^2 \times gH \times BC}{BH} = BC^3 - GF^3 + gf^3$, ſeu

$$bc = \sqrt{Cub.\, n^3 - m^3 + \left(\frac{ma - mb + nb}{a}\right)^3},$$

Eſt vero per §. 3. *ſect.* 3. *aſcenſus potent.* aquæ in ſitu B G F C $= \frac{3m^3 v}{n(mm + mn + nn)}$; pariterque *aſcenſus potent.* ejusdem aquæ in ſitu $bgfc$ reperitur $= \frac{3a^3 v}{\beta(\alpha\alpha + \alpha\beta + \beta\beta)}$, poſito brevitatis ergo α & β pro inventis valoribus diametrorum gf & bc. Erit igitur

$$V = \frac{m^3 \times (\alpha\alpha + \alpha\beta + \beta\beta) \times \beta \times v}{a^3 \times (mm + mn + nn)\, n}.$$

Ex hâc formula facile colligitur, majori continue velocitate moveri particulas anteriores, minori poſteriores, & ſic, ut ſi foraminulum gf cenſeatur infinite parvum, fiat velocitas aquæ in gf infinita & in bc infinite parva.

Exemplum 2.

Fuerit canalis compoſitus ex duobus tubis cylindricis BN & OP (Fig. 32.)

(Fig. 32.) inæqualis amplitudinis ; in ramo ampliore moveri ponatur fluidum B G F C versus P velocitate quæ respondeat altitudini v. Ita perspicuum est nullam motus mutationem adfore , priusquam superficies G F pervenerit in M N ; ab hoc autem temporis puncto motum continue variari donec fluidum omne subingressum fuerit tubum strictiorem. Quæritur itaque cum fluidum situm tenet $bgfc$, quænam futura sit velocitas superficiei fg; altitudinem autem hujus velocitatis designabimus per V. Fig. 32.

Sint diametri G F & gf ut n & m : longitudo B G vocetur $= a$; bM $= b$, erit O$g = \frac{nn}{mm} \times (a-b)$; *ascensus potent.* aquæ B G F C $= v$; *ascensus potent.* aquæ $bgfc = \frac{n^4 a - n^4 b + m^4 b}{n^4 a} \times V$; ergo

$$V = \frac{n^4 a}{n^4 a - n^4 b + m^4 b} v.$$

Ex his intelligitur velocitatem primæ guttulæ in tubum strictiorem irrumpentis respondere altitudini $\frac{n^4}{m^4} v$, hanc vero velocitatem citissime decrescere, ita ut postquam parvula fluidi pars transfluxit, jam possit censeri $V = \frac{a}{a-b} v$, & cum omne fluidum transfluxerit, pristinam assumat velocitatem. Fuerit v. gr. diameter tubi amplioris decupla alterius, & effluet prima guttula ex tubo ampliore in strictiorem velocitate debita altitudini $10000\, v$: si vero decimam fluidi partem jam transfluxisse ponas, invenies altitudinem, quæ conveniat velocitati fluidi in tubo strictiori progredientis, proxime æqualem $\frac{10}{9} v$.

Si tempus quæras, quo fiat transfluxus fluidi Of, invenies illud æquale $\frac{2(n^4 a - n^4 b + m^4 b)^{\frac{3}{2}} - 2m^6 a\sqrt{a}}{3mm(n^4 - m^4)\sqrt{av}}$. Igitur omne fluidum transfluit tempore $\frac{2n^6 a\sqrt{a} - 2m^6 a\sqrt{a}}{3mm(n^4 - m^4)\sqrt{av}} = \frac{2(n^4 + mmnn + m^4)a}{3mm(nn+mm)\sqrt{v}}$, ubi per $\frac{a}{\sqrt{v}}$ intelligitur tempus, quo fluidum in tubo ampliori libere motum absolvit spatium a. Hæc vero, ut dixi, se ita habebunt si nulla sint motus impedimenta , simulque in toto tractu canalis compositi velocitates amplitudinibus reciproce proportionales ponantur. Interim jam alibi monui non posse aquas lateri M N proximas

ximas hanc legem ſervare. Cum itaque talis caſus occurrit, eo magis conveniet motus realis cum theoria, quo longior fuerit pars *b m* & quo pauciora adfuerint obſtacula.

§. 3. Quod ſi nunc canalis fuerit non horizontaliter ſed oblique ad horizontem poſitus, apparet omnia ſimiliter ſe habere, niſi quod *aſcenſus potent.* aquæ in omni ſitu æquandus ſit *aſcenſui potent.* initiali aucto *deſcenſu actuali*, id eſt, deſcenſui verticali centri gravitatis. Atque ſi nullo impulſu aqua ſua ſponte ſe movere incipiat, erit ſimpliciter *deſcenſus actualis* æqualis *aſcenſui potent.*

Igitur aqua continue progredi perget, quamdiu centrum gravitatis loco humiliori poſitum eſt, ac fuit ab initio motus. At vero cum tubus ita fuerit formatus & inflexus eaque fluidi quantitate repletus, ut centrum gravitatis priſtinam altitudinem reaſſumere poſſit, tunc fluidum motum obtinebit retrogradum & ſine fine oſcillabitur. De iſto motu præcipuam hujus ſectionis partem faciente mox dicemus. Interea obſervare licet, fieri poſſe, ut aqua omnis ex loco humiliore per altiorem ſua ſponte ſine prævia ſuctione præterfluat, ſi modo omnia debito modo ſe habeant.

De oſcillationibus fluidorum in tubis recurvis.

Caſus II.

§. 4. Dedit Pater meus in *Comm. Acad. Scient. Petrop.* tom. 2. theoremata quædam, quæ inſignem manifeſtant uſum quem theoria virium vivarum habet in rebus mechanicis. Illud vero quod tertio loco poſitum eſt ita ſe habet.

Fig. 33. *Sit tubus cylindricus A B C H (Fig. 33.) utrobiq; apertus atq; inflexus in duo crura B A & C H ad partem horizontalem B C; ſit ſinus anguli A B C = p, & ſinus anguli H C B = q; exiſtente nimirum ſinu toto = 1; ſit porro ille tubus aqua plenus uſq; ad horizontalem M N; voceturq; L longitudo partis tubi M B C N aqua plenæ: Erunt agitati liquoris in hoc tubo oſcillationes tam majores, quam minores omnes tautochronæ atq; ejuſdem durationis cum oſcillationibus minimis penduli alicujus ſimplicis, cujus longitudo* $= \frac{L}{p+q}$.

Huic theoremati eodem auctore ſubnectitur tale corollarium.

Si

Si anguli ABC & HCB sunt recti, qui unicus casus est à Newtono solutus, erit longitudo penduli simplicis, quod oscillanti aquæ isochronum est, $= \frac{1}{2} L$, *ut invenit Newtonus.*

§. 5. Hæc sunt quæ adhuc cum publico communicata fuerunt circa oscillationes fluidorum, & quidem primo à Newtono, ut undarum naturam, à Patre meo, ut fertilitatem principii *virium vivarum* ostenderet. Quia vero nostrum institutum est pleniorem dare de motibus aquarum theoriam, è re erit istud argumenti genus in tota sua extensione prosequi: Igitur disquiram, quibus modis oscillationes fluidi inæquales fiant isochronæ, & quibus non item? Dein pro prioribus dabo longitudinem penduli simplicis tautochroni, pro alteris tempus durationis indicabo: tubos autem utcunque inflexos & inæqualiter amplos considerabo.

Lemma.

§. 6. Sit c A d (Fig. 34.) uter seu canalis aqua plenus formæ cujuscunque datæ desinens utrobique in duos canales cylindricos ac & fd, utcunque ad horizontem inclinatos & cujuscunque amplitudinis, quorum alterum plenum aqua ponam usque in a, alterum usque in f; oporteat determinare altitudinem centri gravitatis omnis aquæ, ex data altitudine centri gravitatis aquæ in utre c A d contentæ, cæterisque quantum sufficit præcognitis. Fig. 34.

Solutio.

Fuerit centrum gravitatis aquæ in vase c A d contentæ in C, ductaque intelligatur per istud punctum C verticalis A B, deinde ducantur horizontales am, cg, fn, & dh una cum verticalibus cb & de. Ponatur $ac = a$: $fd = \alpha$: $bc = b$; $ed = \beta$: amplitudo tubi $ac = g$; amplitudo tubi $fd = \gamma$: sit porro massa aquea seu capacitas canalis c A $d = M$, linea A $g = f$; A $h = \phi$: AC $= m$: Dividantur lineæ mg & nh bifariam punctis D & E & sic erunt centra gravitatis aquarum in tubis cylindricis contentarum in altitudinibus punctorum D & E.

His positis fit AD $= f + \frac{1}{2} b$; AE $= \phi + \frac{1}{2} \beta$: massa aquæ in $ac = ga$: in $fd = \gamma\alpha$: Igitur si centrum gravitatis quæsitum pro omni aqua ac A df intelligatur in altitudine F positum, habebitur, ut constat in mechanicis, AF multiplicando massam aquæ in ac per D A, massam aquæ fd per E A & massam

aquæ in $c\,A\,d$ per CA, aggregatumque horum productorum dividendo per summam harum massarum. Unde invenitur.

$$AF = \frac{ga \times (f + \frac{1}{2}b) + \gamma\alpha \times (\phi + \frac{1}{2}\zeta) + Mm}{ga + \gamma\alpha + M}$$

Problema.

§. 7. Determinare ubique velocitates aquæ oscillantis, posito oscillationes ultra terminos tuborum cylindricorum non divagari.

Solutio.

Sit aqua oscillationem inchoans in situ $a\,c\,A\,d\,f$ perveneritque postmodum in situm $o\,c\,A\,d\,p$, retentisque denominationibus in præcedente paragrapho factis, ponatur $ao = x$; erit $fp = \frac{gx}{\gamma}$: unde (si nempe centrum gravitatis omnis aquæ descendisse putetur ex F in O) erit vi præcedentis paragraphi

$$AO = \frac{g \times (a - x) \times (f + \frac{1}{2}b - \frac{bx}{2a}) + \gamma \times (\alpha + \frac{gx}{\gamma}) \times (\phi + \frac{1}{2}\zeta + \frac{\zeta gx}{2\alpha\gamma}) + Mm}{ga + \gamma\alpha + M}$$

Inde deducitur descensus centri gravitatis seu *descensus actualis*

$$FO = \frac{(b - \zeta + f - \phi)gx - (\frac{bg}{2a} + \frac{bgg}{2\alpha\gamma})xx}{ga + \gamma\alpha + M}$$

Sit nunc velocitas aquæ in tubo $a\,c$ (cum nempe superficies est in o) talis quæ respondeat altitudini v, & erit tunc *ascensus potent.* aquæ in altero tubo $= \frac{gg}{\gamma\gamma}v$: pariterque *ascensus potent.* aquæ $c\,A\,d$, erit proportionalis altitudini v, eamque proinde ponemus $= Nv$ (ubi N pendet à figura utris $c\,A\,d$ & determinari potest per §. 2. Sect. 3.) Jam vero si multiplicatis ubique *ascensibus potentialibus* per suas massas producta dividantur per summam massarum, habebitur *ascensus potent.* omnis aquæ $o\,c\,A\,d\,p =$

$$\frac{(ga - gx + \frac{\alpha gg}{\gamma} + \frac{g^3 x}{\gamma\gamma} + MN)\,v}{ga + \gamma\alpha + M}$$

Et quia hic *ascensus potentialis* est æqualis *descensui actuali* FO paullo ante invento, erit

$v =$

$$v = \frac{(b - \mathfrak{C} + f - \Phi)gx - \left(\frac{bg}{2a} + \frac{bgg}{2\alpha\gamma}\right)xx}{ga - gx + \frac{\alpha gg}{\gamma} + \frac{g^3 x}{\gamma\gamma} + MN} \quad \text{Q. E. I.}$$

Corollarium 1.

§. 8. Quia linea $mn = mg - nb + gh = b - \mathfrak{C} + f - m$, ponemus $mn = c$, simulque multiplicabimus denominatorem & numeratorem per $2\gamma\gamma\alpha\alpha$: Ita vero habebimus

$$v = \frac{2g\gamma\gamma a\alpha cx - (g\gamma\gamma\alpha b + gg\gamma a\mathfrak{C})xx}{2g\gamma\gamma aa\alpha - 2g\gamma\gamma a\alpha x + 2gg\gamma a\alpha\alpha + 2g^3 a\alpha x + 2\gamma\gamma a\alpha MN}$$

Corollarium 2.

§. 9. Si fiat $v = 0$, patet tunc valorem x denotare totam fluidi superficiei excursionem in tubo ac, quæ sic invenitur æqualis $\frac{2\gamma a\alpha c}{\gamma\alpha b + ga\mathfrak{C}}$, in altero vero tubo fit $= \frac{2ga\alpha c}{\gamma\alpha b + ga\mathfrak{C}}$.

Igitur poterit aqua in tubo strictiori ad quamcunque elevari altitudinem, si modo ratio amplitudinum g & γ sat magna sumatur.

Corollarium 3.

§. 10. Pars illa vasis cAd, quam neutra superficierum unquam attingi ponimus, nihil pertinet ad istas fluidi excursiones sive augendas sive diminuendas: facere tamen potest, ut inferius ostendetur, ad accelerandas retardandasque oscillationes.

Corollarium 4.

§. 11. Ponatur uterque tubus communis amplitudinis, erit, posito nempe $g = \gamma$,

$$v = \frac{2ga\alpha cx - (g\alpha b + ga\mathfrak{C})xx}{2gaa\alpha + 2ga\alpha\alpha + 2a\alpha MN}.$$

In hoc casu maxima superficiei utriusque velocitas est, cum in medio totius excursionis positæ sunt, secus ac fit, cum tubi sunt inæqualis amplitudinis.

Notandum quoque eſt, ſimiles eſſe inter ſe retardationes & accelerationes in diſtantiis ſimilibus ſuperficierum à punctis mediarum excurſionum, id eſt, à locis maximarum velocitatum.

Theorema.

§. 12. Cum amplitudines tuborum cylindricorum prædicto modo ſunt æquales, erunt oſcillationes tam majores quam minores inter ſe Iſochronæ, modo ſuperficies nunquam deſcendant infra orificia eorundem tuborum.

Demonſtratio.

Ex mechanicis conſtat, quod ſi mobile oſcillans ſpatium perfecerit $= x$, habeatque in ſingulis locis elementum temporis $dt = \frac{m\,dx}{\sqrt{nx - xx}}$, intelligendo per m & n quantitates conſtantes, id faciat oſcillationes ſuas tam majores quam minores eodem tempore.

Quia vero in noſtro caſu eſt

$$v = \frac{2gaacx - (gab + gac)xx}{2gaaa + 2gaaa + 2aaMN},$$

& quia velocitas ipſa eſt æqualis $\sqrt{v}$, erit

$$dt = dx\sqrt{\left(\frac{2gaaa + 2gaaa + 2aaMN}{gab + gac}\right)} : \sqrt{\left(\frac{2aacx}{gab + gac} - xx\right)},$$

ubi pariter omnes litteræ conſtantem habent valorem præter x, quæ ſpatium percurſum denotat; patet has quoque fluidi oſcillationes iſochronas fore, Q. E. D.

Problema.

§. 13. Invenire longitudinem penduli ſimplicis, quod ſit tautochronum cum oſcillationibus fluidi præfatis.

Solutio.

In mechanicis demonſtratur, quod, cum $dt = \frac{m\,dx}{\sqrt{nx - xx}}$, ſit longitudo penduli ſimplicis tautochroni $= \frac{1}{2}mm$: Erit igitur in noſtro caſu de quo ſermo eſt longitudo penduli quæſita $= \frac{gaaa + gaaa + aaMN}{gab + gac}$. Q. E. I.

Corol-

Corollarium. 1.

§. 14. Si ponatur canalis $c A d$ ejusdem amplitudinis cum tubis conjunctis, ejusque longitudo vocetur l, erit massa aquæ in eo contentæ, quam vocavimus $M = gl$; & *ascensus potent.* aquæ in illo contentæ, quem posuimus $= Nv$, erit $= v$, ita ut habeatur $N = 1$. Substitutis autem, istis valoribus pro litteris M & N, prodit longitudo penduli tautochroni pro isto casu particulari $=$

$$\frac{aa\alpha + a\alpha\alpha + a\alpha l}{\alpha b + a\zeta} = \frac{a\alpha}{\alpha b + a\zeta} \times (a + \alpha + l) = \frac{a + \alpha + l}{\frac{b}{a} + \frac{\zeta}{\alpha}}$$

Quia vero $a + \alpha + l$ est longitudo totius tractus aqua pleni & $\frac{b}{a}$ significat rationem sinus anguli bac ad sinum totum pariter atque $\frac{\zeta}{\alpha}$ denotat rationem sinus anguli efd ad sinum totum, videmus non differre nostram solutionem ab illa, quam Pater meus pro isto casu dedit, quamque supra recensui §. 4.

Corollarium 2.

§. 15. Si ponatur canalis $c A d$ infinitæ ubique amplitudinis, erit $MN = 0$ (per §. 2. *sect.* 3.) & longitudo penduli tantochroni $= \frac{a + \alpha}{\frac{b}{a} + \frac{\zeta}{\alpha}}$, quasi nempe totus canalis intermedius $c A d$ abesset, tubique cylindrici inter se immediate essent conjuncti.

Est tamen hîc speciale aliquid considerandum, quod infra monebo.

Scholion.

§. 16. Complectitur hoc theorema omnes casus, qui oscillationes tantochronas faciunt, ubi tubi ac & pd sunt recti: cum vero hi tubi, in quibus fluidi superficies excurrunt, incurvati sunt, dantur alii insuper tantochronismi casus, quos facile foret determinare, si hisce diutius immorari vellemus. Cæterum cum tubi hi inæqualis amplitudinis sunt, fiunt quoque tempora oscillationibus diversarum magnitudinum respondentia inæqualia, & quomodo tempus tale definiri debeat unicuique apparet ex §. 8. ubi velocitatem fluidi in quolibet puncto dedimus.

Hæc

Hæc autem de oſcillationibus finitis. Si nunc oſcillationes minimas eſſe cenſeamus, videbimus illas fieri omnes inter ſe tantochronas, manente eadem fluidi quantitate, eodemque canali, quæcunque interea ſint canalis figura & amplitudines. Id exponam in ſequenti paragrapho.

Theorema.

§. 17. Oſcillationes minimæ fluidi in quocunque canali oſcillantis, quamvis inæquales inter ſe, ſunt omnes Iſochronæ.

Demonſtratio.

Cum oſcillationes ſunt minimæ, poſſunt illæ canalis particulæ, in quibus ſuperficies fluidi agitantur, pro cylindricis haberi, igitur manentibus denominationibus iisdem, manebit valor, quem aſſignavimus litteræ v in §. 8. & ex eadem ratione ſequitur, litteras a, b, α, β & x ceu infinite parvi valoris negligi poſſe præ $\frac{M}{g}$, ſic ut in præſenti caſu cenſeri debeat

$$v = \frac{2g\gamma a\alpha cx - (g\gamma\alpha b + ggab)xx}{2\gamma a\alpha MN}$$

Sunt igitur vi paragraphi duodecimi oſcillationes omnes, quoad minimæ ſunt, inter ſe Iſochronæ. Q. E. D.

Problema.

§. 18. Determinare longitudinem penduli ſimplicis tautochroni cum oſcillationibus minimis fluidi in canali quocunque agitati.

Solutio.

Quia in omni motu eſt elementum temporis $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$, erit nunc

$$dt = dx\sqrt{\left(\frac{2\gamma a\alpha MN}{g\gamma\alpha b + ggab}\right)} : \sqrt{\left(\frac{2\gamma a\alpha cx}{\gamma\alpha b + ga\beta} - xx\right)}$$

Igitur vi Paragraphi decimi tertii erit longitudo quæſita penduli cum prædictis oſcillationibus tautochroni $= \frac{\gamma a\alpha MN}{g\gamma\alpha b + gga\beta}$. Q. E. I.

Scholium.

§. 19. Quamvis jam paſſim monuerim, quid intelligendum ſit per quan-

quantitates M & N, tamen hic apponam totam conſtructionem, ut natura rei eo magis unicuique pateat.

Fuerit canalis qualiscunque ABCDE, (Fig. 35. *a* & *b*) aqua plenus usque in B & D; ponatur ſinus totus $= 1$, ſinus anguli DBC $= \frac{b}{a} = m$, ſinus anguli BDC $= \frac{c}{a} = n$, erit longitudo penduli tautochroni $= \frac{\gamma MN}{mg\gamma + ngg}$, ubi g denotat amplitudinem canalis in B & γ amplitudinem ejus in D. Fig. 35. *a* & *b*.

Concipiatur nunc longitudo canalis BCD fluido plena in rectam extenſa *bcd*, ſuper qua ceu axe fiat curva FGH, quæ ſit ſcala amplitudinum in locis homologis, ita, ut poſita *bc* = BC ſit *c*G ad *b*F, ut amplitudo in C ad amplitudinem in B. Igitur ſi *b*F repræſentet amplitudinem in B, tunc ſpatium *bd*HF repræſentabit magnitudinem M. Deinde ſuper eodem axe *bd* conſtruatur alia curva LMN, cujus applicata *c*M ſit ubique $\frac{bF^2}{cG}$ & erit (per §. 2. *ſect.* 3.) N = ſpatio *bd*NL diviſo per ſpatium *bd*HF, ita ut ſit M × N = ſpatio *bd*NL, quod multiplicatum per $\frac{\gamma}{mg\gamma + ngg}$ dabit longitudinem penduli tautochroni.

Corollarium 1.

§. 20. Si tubus BCD ſit ubique ejusdem amplitudinis, ejusque longitudo dicatur l, erit FH linea recta ipſi *bd* parallela, pariter atque LN: hinc ſpatium *bd*NL $= gl$ & longitudo penduli tautochroni $= \frac{l}{m+n}$.

Corollarium 2.

§. 21. Sit BCD canalis conicus longitudinis l; erit *c*G (poſita *bc* $= x$) $= \left(\frac{x}{l}[\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g}\right)^2$; unde *c*M $= gg : \left(\frac{x}{l}[\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g}\right)^2$; ergo ſpatium *bc*ML $= \frac{ggl}{\sqrt{g\gamma} - g} - \frac{ggl}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}} : \left(\frac{x}{l}[\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g}\right)$ & proinde totum ſpatium *bd*NL $= \frac{ggl}{\sqrt{g\gamma} - g} + \frac{ggl}{\sqrt{g\gamma} - \gamma} = \frac{ggl}{\sqrt{g\gamma}}$: Eſt igitur longitudo penduli tautochroni cum oſcillante aqua $= \frac{l\sqrt{g\gamma}}{m\gamma + ng}$.

Hinc intelligitur cæteris paribus oſcillari aquam tardiſſime cum ampli-

tudines in B & D ſunt in ratione reciproca ſinuum angulorum reſpondentium D B C & B D C: dein quo longior ſit pars aqua plena & quo minores anguli modo dicti, eò pariter tardiores fieri oſcillationes.

Porro comparatis inter ſe tubis cylindricis & conicis, poſitisque angulis B D C & D B C æqualibus, perſpicuum eſt, citius oſcillari aquam cæteris paribus in conicis quam cylindricis, quia nempe $\frac{l\sqrt{g\gamma}}{\gamma+g}$ ſemper minor eſt quam $\frac{1}{2}l$, quæcunque ratio inæqualis intercedat inter g & γ. Si porro prædicti anguli inæquales ponantur, fieri poteſt tam ut tardius quam ut citius oſcilletur aqua in uno tuborum genere reſpectu alterius, quod ut exemplo confirmem, ponam angulum D B C rectum, id eſt, $m = 1$, & ſinum alterius anguli B D C ſeu $n = \frac{1}{4}$, ita erit longitudo penduli pro tubis cylindricis $= \frac{4}{5}l$: Si vero ſub iisdem reliquis circumſtantiis tubo cylindrico ſubſtituas conicum, qui amplitudinem in B habeat quadruplo majorem, quam eſt amplitudo in D, habebis, poſito $\gamma = \frac{1}{4}g$, longitudinem penduli $= l$: longius eſt itaque cæteris paribus pendulum tautochronum pro tubo conico quam pro cylindrico, & tardius fiunt oſcillationes in illo, quam in hoc: ſed ſi nunc, manentibus rurſus reliquis, tubum conicum ſtrictiorem ponamus in B quam in D, contrarium erit: fuerit v. gr. $\gamma = 4g$, erit longitudo penduli $= \frac{8}{17}l$, & proinde minor, quam ſi tubus cylindricus foret; rurſusque minor erit, ſi amplitudinem in B admodum majorem ponas, quam eſt in D: ita ſi fuerit $\gamma = \frac{1}{64}g$, erit longitudo penduli $= \frac{8}{17}l$, ut ante. Notabile eſt, ut in præcedente etiam vidimus exemplo, quod, manentibus amplitudine in B, ſitu canalis B C D ejusdemque longitudine, duæ ſemper diverſæ definiri poſſint amplitudines in D pro eadem penduli tautochroni longitudine, niſi cum anguli D B C & B D C ſunt æquales. Hujus rei exemplum eſt particulare, quod, ſive amplitudo in D æqualis ſit amplitudini in B, ſive rationem ad eandem habeat quadratam ſinus ang. B D C & ſin. ang. D B C, eodem tempore oſcillationes fluidi abſolvantur in tubo utroque.

Scholion Generale.

§. 22. Experimenta de oſcillantibus fluidis ita ſumpſi, ut crebra tentatione longitudinem penduli ſimplicis Iſochroni invenirem, hancque longitudinem in diverſis caſibus talem præter propter eſſe obſervare potui, quam theo

theoria in hâc ſectione indicat ; aliquando tamen longitudinem illam debitâ paullo majorem inveni ; cujus rei rationem haud difficulter hanc eſſe vidi, quod frictiones fluidi excurſiones non ſolum diminuant, ſed & retardent, ut &, quod tubi eo in loco, quo inflectuntur, ſtrictiores eſſe ſoleant : Id poſterius, ſi omni cura evitetur, ſique ipſæ inflexiones non uno angulo ſed lente fiant, & ſi denique pro liquore oſcillante mercurius puriſſimus adhibeatur, dubium mihi nullum ſupereſt, fore ut experimenta præmiſſam theoriam ad amuſſim confirment, ita, ut operæ pretium non duxerim anxie de illis inquirere.

Id tamen ratione experimentorum à me inſtitutorum ſuperaddam, quod amplitudines tuborum ante experimentum in diverſis eorum locis accurate exploraverim ope columellæ mercurii, quæ dum gradatim totam longitudinem tubi percurreret, longitudinibus ſuis diverſis, quarum menſuras aſſiduè accipiebam, amplitudinum variationes ubique manifeſtabat : Et hæ quidem amplitudines ita in tubo erunt explorandæ, poſtquam jam fuerit incurvatus, nam ab incurvatione amplitudines admodum decreſcunt. Hæc ratio fuit, quod in primo hanc in rem à me ſumto experimento, ſucceſſus expectationem meam fefellerit : Tubum nempe vitreum, cujusmodi pro barometris conficiendis adhibere ſolent, ſatis amplum eundemque fere perfecte cylindricum, incurvare feci, ut oſtendit propemodum Figura vigeſima ſeptima, eoque deinde mercurio maximam partem repleto, oſcillationes ejus longe tardius fieri vidi, quam expectaveram, quia non attendi, tubum ab incurvatione in D inſigniter fuiſſe conſtrictum, præſertim ubi anguli formantur. Hujus igitur rei, ut rationem haberem, tubis deinceps lente incurvatis uſus fui, quales oſtendit Fig. 35. *a.* in iisque amplitudines poſt incurvationem diligenter exploravi.

HYDRODYNAMICÆ

SECTIO SEPTIMA.

De motu aquarum per vasa submersa, ubi exemplis ostenditur, quam insigniter utile sit principium conservationis virium vivarum, vel iis in casibus, quibus continue aliquid de illis perdi censendum est.

PARS PRIMA.

De descensu aquarum.

§. I.

Inge cylindrum aquâ plenum, cujus fundum perforatum sit, illudque ad certam altitudinem aquæ stagnanti veluti infinitæ submersum, & facile intelliges superficiem aquæ in cylindro contentæ descensuram, & quidem infra superficiem aquæ exterioris, dein rursus ascensuram & sic porro. Hæ vero oscillationes admodum differunt ab oscillationibus in præcedente sectione consideratis, in quibus nempe motus reciproci semper sunt inverso ordine iidem cum motibus, qui præcesserunt. Quis autem hic præsumat refluxum aquarum seu ascensum eundem fore, qui fuerat descensus. Talia si quis statueret, is certe vehementer falleretur, etiamsi vel nihil motus diminuatur ab adhæsione aquarum ad latera vasis hujuscemodique aliis impedimentis, non secus atque regulæ motuum à percussione pro corporibus elasticis valde diversæ sunt ab iis, quæ pro corporibus mollibus valent, utut in utroque casu corpora liberrime moveri censeantur. Utor hoc simili, quod argumentum nostrum egregie illustrat: Prouti enim regulæ motuum in corporibus mollibus recte determinatur, si post collisionem ea *vis vivæ* pars deperdita censeatur, quæ in compressionem corporum impensa fuit (neque enim hæc ut in corporibus elasticis restituitur motui progressivo) ita ascensus fluidi non minus recte definietur, si accurate examinetur, quantum *vis vivæ* singulis momentis motui particularum aquearum intestino communicetur, nunquam rediturum ad motum progressivum, de quo sermo est.

§. 2. Cum itaque res eo deducta sit, ut exploretur, quantum *vis vivæ* in motibus istis reciprocis continue perdatur, disquisitionem ab hoc incipiemus.

Primò

Primò autem patet omnem *vim vivam* quæ particulis effluentibus ineſt tranſire ad aquam externam nec ullo modo promovere ſubſequentem aſcenſum ſeu influxum aquæ externæ in tubum: Nimis hæc eſt clara hypotheſis, quam ut majori explicatione opus habeat: reſpicit autem aquarum effluxum & in hoc unica eſt conſideranda. Venit jam altera, quæ pertinet ad aquarum influxum.

Secundò igitur non minus perſpicuum mihi quidem eſt, quod irruente aqua per foramen majori velocitate, quam quæ aquæ internæ aſcendenti ineſt, exceſſus ille rurſus motum quendam inteſtinum in eadem aqua interna cieat, parum aut nihil ad aſcenſum conferentem. Hoc ſi ita ſit, ponaturque amplitudo foraminis $= 1$, amplitudo cylindri $= n$, *aſcenſus potent.* guttulæ irrumpentis $= nnv$, ejusque velocitas $= n\sqrt{v}$, retinebit hæc particula motu ſuo, quem cum reliqua aqua interna communem habet, velocitatem $\sqrt{v}$, conſervabitque proinde *aſcenſum potent.* v; reliquum autem *aſcenſus potent.* nempe $nnv - v$ ad motum particularum inteſtinum transiiſſe cenſendum eſt. Hypotheſis iſta, quamvis Phyſica ſit & proxime tantum vera, tamen magnam habet utilitatem ad motus fluidorum ſine notabili errore determinandos, quoties in vaſe uniformis continuitas, quæ hactenus aſſumta fuit, prærumpitur, veluti cum aqua per plura foramina tranſire cogitur; Imo crediderim unicam eſſe, cujus ope hujusmodi motus mira phænomena recte explicari poſſint. Quapropter velim, ut recte animo perpendatur, antequam ad alia divertatur lector.

§. 3. Jam igitur quæſtionem ipſam examinabimus, incipiendo ab aquarum deſcenſu. Concipiatur cylindrus AIMB, (Fig. 36.) aqua plenus usque in XY & aquæ infinitæ RTVS ſubmerſus, ita ut longitudo ejus ſit in ſitu verticali habeat ejus fundum lumen PL, per quod aqua ex vaſe in aquam circumfluam effluere poſſit. Quæritur velocitas aquæ internæ, poſtquam ſuperficies ejus per datum ſpatium XC vel YD deſcendit, poſita MY vel IX $= a$, MV $= b$, MD $= x$, amplitudine foraminis $= 1$, & denique amplitudine cylindri $= n$. Fig. 36.

Solutio eadem erit, quam pro ſimili quæſtione, ſed ea admodum generali, dedimus in ſectione tertia: obſervetur tantum, quod ſumta particula aquæ infinitè parva CDFE æquali guttulæ PLON eo ipſo tempore ejectæ, *deſcenſus actualis* ſit nunc æſtimandus ex altitudine DV vel CT, cum in altero caſu definiendus erat ex tota altitudine DM.

Sit nempe velocitas ſuperficiei aqueæ CD ea, quæ debetur

altitudini v, & in ſitu infinite propinquo E F reſpondebit eadem velocitas altitudini $v - dv$; Et cum *aſcenſus potentialis* aquæ C D M L P I C ſit v, obtinebitur *aſcenſus potent.* ejusdem aquæ in ſitu proximo E F M L O N P I E, ſi multiplicetur maſſa E F M L P I E $(nx - ndx)$ per ſuum *aſcenſum potent.* $(v - dv)$ ut etiam guttula L O N P (ndx) per ſuum itidem *aſcenſum potentialem* nnv, aggregatumque productorum dividatur per ſummam maſſarum (nx): habetur itaque *iſte aſcenſus potentialis* $= \frac{(nx - ndx) \times (v - dv) + ndx \times nnv}{nx}$

ſeu $\frac{xv - vdx - xdv + nnvdx}{x}$.

Eſt proinde incrementum *aſcenſus potent.* $= \frac{-vdx - xdv + nnvdx}{x}$.

(*conf.* §. 6. *ſect.* 3.) Iſtud vero incrementum æquale cenſendum eſt cum *deſcenſu actuali* infinitè parvo, qui (per §. 7. *ſect.* 3. & per annotationem modo datam) eſt $= \frac{(x - b)dx}{x}$. Habetur itaque talis æquatio

$$-vdx - xdv + nnvdx = (x - b)dx,$$

quæ debito modo integrata mutatur in hanc

$$v = \frac{1}{nn-2} \times \left(x - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-2}}\right) - \frac{b}{nn-1} \times \left(1 - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-1}}\right).$$

Ex iſta vero æquatione talia ſequuntur corollaria.

§. 4. Fuerit amplitudo cylindri veluti infinita ratione foraminis, & erit cènſendum $v = \frac{x - b}{nn}$; ipſaque altitudo pro velocitate aquæ, dum effluit, eſt $= x - b$. Unde conſequens eſt, aquam effluere velocitate, quam grave acquirit cadendo ex altitudine ſuperficiei internæ ſupra externam, & eo usque effluet, donec ambæ ſuperficies ſint ad libellam poſitæ, tuncque omnis motus ceſſabit: adeoque eadem lege aquæ effluunt, quaſi fundum ſitum I M mutaret cum T V.

Cum vero foramen non poteſt ceu infinite parvum conſiderari, deſcendit ſuperficies aquæ internæ infra externam; atque ut innoteſcat ad quamnam profunditatem xy ſit deſcenſura ſuperficies C D, facienda eſt $v = o$, ſeu

$$(nn-1)\left(a^{nn-1}x - x^{nn-1}a\right) = (nn-2) \times \left(a^{nn-1}b - x^{nn-1}b\right),$$

nunquam autem ſuperficies interna tantum deſcendet infra ſuperficiem externam

nam, quantum ſuper eandem elevata fuerat, provenit iſte defectus *ab aſcenſu pot.* aquæ durante deſcenſu ejectæ, cui debet eſſe proportionalis.

§. 5. Notabile eſt, quod cum eo profundius deſcendat aqua in cylindro, quo magis ab initio deſcenſus fuerit elevata & quo majori lumine perforatum eſt fundum, nunquam tamen omnis aqua ex cylindro effluere poſſit quantumvis fuerit ante deſcenſum elevata & pars cylindri ſubmerſa utlibet parva, ipſumque ſimul foramen vel totum fundum exhaurire ponatur.

§. 6. Velocitas ſuperficiei aquæ internæ maxima eſt, cum ſumitur

$$x = \left(\frac{a^{nn-1}}{nna - nnb - a + 2b} \right)^{1:(nn-2)}$$

Si proinde $n = 1$, exiſtente ſcilicet orificio cylindri toto aperto, fit $x = b$, & maxima eſt velocitas, cum ambæ ſuperficies ſunt in eadem altitudine poſitæ.

Quia vero multa ſunt, quæ ex hiſce æquationibus dignoſci nequeunt in duobus caſibus, nempe $nn = 1$ & $nn = 2$, hique multa habent particularia, eoſdem ſeorſim jam attingam.

§. 7. Sit primo $nn = 1$, & erit $-x\,dv = (x - b)\,dx$ (*per §. 3.*) vel $-dv = dx - \frac{b\,dx}{x}$, quæ ſic integrata, ut ſit ſimul $v = 0$ & $x = a$, dat $-v = x - a + b \log. \frac{a}{x}$, ſeu $v = a - x - b \log. \frac{a}{x}$: Exinde talia deduci poſſunt.

I°. Ut obtineatur maximus deſcenſus, faciendum eſt $a - x - b \log. \frac{a}{x} = 0$; patet autem ex iſta æquatione, nunquam negativum valorem obtinere litteram x, imo nequidem totam evaneſcere ſine contradictione, niſi ponatur $\frac{a}{b} = \infty$, quod indicat fieri non poſſe, ut omnis effluat aqua durante deſcenſu in iſto caſu & multo minus in reliquis, quod confirmat paragraphum quintum.

II°. Velocitas maxima talis eſt, quæ debetur altitudini $a - b - b \log. \frac{a}{b}$, atque ſi differentia inter a & b, quam ponam $= c$, ſit valde parva, exiſtentibus nimirum excurſionibus fluidi perexiguis ratione longitudinis, ad quam cylin-

cylindrus eſt ſubmerſus, poterit *log.* $\frac{a}{b}$ cenſeri $= \frac{c}{b} - \frac{cc}{2bb}$ ipſaque proinde altitudo maximæ debita velocitati ſeu $a - b - b\,log.\,\frac{a}{b} = \frac{cc}{2b}$, quod motum admodum lentum fore arguit.

Demonſtrabo autem in ſequentibus, totum motum cæteris paribus eundem manere, cum cylindri cenſentur infinite ſubmerſi, quocunque foramine fundum fuerit perforatum, ita ut motus aquæ internæ à diminuto foramine non retardetur; quod quamvis prima fronte admodum paradoxum videatur, non poterit tamen vera ejus ratio phyſica effugere animum ad hæc attentiorem. In eo ſcilicet verſatur, quod *vis viva*, quæ in tubo generatur, veluti infinita ſit præ vi viva aquæ per foramen tranſeuntis nec adeoque hujus foraminis conſideratio computum diverſum faciat.

Demonſtrabimus etiam ſimiles eſſe motus reciprocos & oſcillationes tam majores quam minores inter ſe eſſe Iſochronas, atque pro hiſce longitudinem penduli ſimplicis tautochroni determinabimus.

§. 8. Fuerit nunc $nn = 2$; Ita vero habetur vi §. 3. $v\,dx - x\,dv = (x - b)\,dx$, vel $\frac{x\,dv - v\,dx}{xx} = \frac{(b-x)\,dx}{xx}$, quæ recte integrata abit in hanc $v = \frac{bx}{a} - b + x\,log.\,\frac{a}{x}$. Si fiat $\frac{bx}{a} - b + x\,log.\,\frac{a}{x} = 0$, dabit x locum maximi deſcenſus; locus autem maximæ velocitatis habebitur, faciendo $x = c^{\frac{b-a}{a}}\,a$, ubi per c intelligitur numerus, cujus logarithmus eſt unitas.

Poſtquam ſic varios perſtrinximus caſus pro diverſis foraminum magnitudinibus, ſupereſt ut etiam conſideremus, quid in diverſis altitudinum a & b caſibus ſuccedere poſſit.

§. 9. Et primo quidem ſi b nulla ſtatuatur præ a, quod fit cum cylindri fundum tantum radit ſuperficiem aquæ exterioris, tunc prodit

$$v = \frac{1}{nn-2}\left(x - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-2}}\right)$$

quæ quidem æquatio non niſi forma differt ab illa, quæ §. 14. *Sect.* 3. data fuit pro eo caſu, quo aquæ ex cylindro in aërem ejici ponuntur. Et ſæpe etiam exper-

expertus ſum cylindrum eodem tempore evacuari, ſive aquæ in aërem ejiciantur, ſive fundum aquæ ſtagnanti tantillum ſubmergatur. Docet hæc experientia parum aut nihil obſtare aërem externum effluxui, cum reſiſtentia plus quam octingenties major notabiliorem effectum non exerat. Quia adeoque iſte caſus nihil particulare habet, quod non loco citato monitum fuerit, huic non ulterius immorabimur: Inquiremus potius, quid fieri debeat, cum elevatio aquæ internæ ſuper externam, quanta ab initio deſcenſus eſt, ſumitur valde parva & negligenda præ immerſione cylindri; cui hypotheſi ſatisfit, cum exceſſus altitudinis a ſuper altitudinem b (quem exceſſum rurſus vocabimus (ut §. 7.) c) eſt admodum parvus.

§. 10. Cum itaque ponitur $a - b = c$, ponendum etiam erit $a - x = z$, tumque utraque quantitas, nempe c & z, erunt negligendæ præ quantitatibus a & b, ſed ſi $a - x = z$, erit $x = a - z$ & $x^{nn-1} = (a-z)^{nn-1} =$

$$a^{nn-1} - (nn-1)a^{nn-2}z + \left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}}{2}\right)a^{nn-3}zz$$
$$-\left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}.\overline{nn-3}}{2.3.}\right)a^{nn-4}z^3 + \&c.$$

Hæc ſeries quantum ad inſtitutum noſtrum ſufficit eſt continuanda; ſufficiet autem ad tres usque terminos. Igitur in æquatione integrata quam dedimus §. 3. ponemus, $x = a - z$ &

$$x^{nn-1} = a^{nn-1} - (nn-1)a^{nn-2}z + \left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}}{2}\right)a^{nn-3}zz \ \&$$

ſic erit

$$v = \frac{1}{nn-2}\left[a - z - a + (nn-1)z - \left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}}{2}\right)\frac{zz}{a}\right]$$
$$- \frac{b}{nn-1}\left[1 - 1 + (nn-1)\frac{z}{a} - \left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}}{2}\right)\frac{zz}{aa}\right]$$

In qua æquatione ſi termini ſe deſtruentes deleantur, atque ponatur $a - c$ pro b, rejiciaturque terminus qui affectatur quantitate $\frac{czz}{aa}$, prodit ſimpliciter

$$v = \frac{2cz - zz}{2a}.$$

ex quâ formula, cum littera n evanuerit, indicium habemus, nihil magni-

tudinem orificii pertinere ad motum aquæ internæ, cujus rei originem jam ſupra (§. 7.) indicavi.

In ſequentibus autem demonſtrabimus, non differre hunc motum à ſubſequente motu refluo, hincque oſcillationes fieri tautochronas. Priusquam vero ad alia pergam monendum duxi, in iſto calculo quantitates $\frac{c}{a}$ & $\frac{z}{a}$ non ſolum præ unitate, ſed & præ $\frac{1}{nn}$ ceu infinite parvas poſitas fuiſſe, ad quod animus probe eſt advertendus in inſtituendis experimentis; licet utique theoriam infinite parvorum ad experimenta, ſine notabili errore revocare diminuendo admodum quantitates, quæ in theoria ceu infinite parvæ conſideratæ fuerunt, ſed faciendum eſt, ut in experimento omnia huic legi ſint ſubjecta. Ita v. gr. ſi in cylindro omne fundum abſit, poſito $n = 1$, idque ſubmerſum ponatur ad altitudinem triginta quinque pollicum, ſatis accurate ſumetur experimentum, cum aqua ante oſcillationes elevata tantum fuerit ad altitudinem unius pollicis ſupra ſuperficiem aquæ circumfluæ; nec dum error notabilis erit, ſi vel orificiium inferius ad dimidium obſtruatur exiſtente tunc $\frac{c}{a}$ ad $\frac{1}{nn}$ ut 1. 9, quæ ratio in noſtro experimento tuto adhuc negligi poteſt: at ſi jam diametrum tubi duplam ponas diametri orificii, occluſis tribus quartis aperturæ integræ partibus, jam fiet $n = 4$ & $\frac{c}{a}$ ad $\frac{1}{nn}$ ut 4 ad 9, quæ ratio non ſatis parva amplius erit, ut experimentum conditionibus theoriæ cum ſufficienti præciſione ſatisfacere affirmari poſſit.

Hic itaque jam porro inquirere conveniet, quid de his caſibus ſtatuendum ſit, quibus $\frac{c}{a}$ & $\frac{1}{nn}$ notabilem quidem inter ſe habent rationem, utraque vero quantitas ſit admodum exigua, quod nimirum fit, cum cylindrus profundiſſime ſubmergitur, ſimul autem fundum parvulo eſt pertuſum foramine.

§. 11. Sed iſte, quem modo finximus, caſus melius ex æquatione differentiali paragraphi tertii, quam ex integrali, ut antea factum, deducitur: poteſt autem pro his circumſtantiis rejici terminus $-v\,dx$ præ $nnv\,dx$, atque ſic aſſumi $-x\,dv + nnv\,dx = (x - b)\,dx$, in quâ ſi rurſus ponitur $a - b = c$ & $a - x = z$, prodit

$$a\,dv + z\,dv + nnv\,dz = (c - z)\,dz$$

cujus

cujus ſecundus terminus $z\,d\,v$ rurſus præ primo negligi poteſt, ita vero habetur

$$a\,dv + nnv\,dz = (c - z)\,dz.$$

Ponatur hic (ſumto α pro numero, cujus logarithmus hyperbolicus eſt unitas) $v = \frac{1}{nn}\alpha^{\frac{-nnz}{a}}\,q$; hoc modo mutabitur poſtrema æquatio in hanc

$$\alpha^{\frac{-nnz}{a}}\,a\,dq = nn(c - z)\,dz, \text{ vel}$$

$$a\,dq = nn\,\alpha^{\frac{nnz}{a}} \times (c - z)dz:$$

Hæc vero ita eſt integranda, ut z & v vel etiam z & q ſimul evaneſcant; habebitur igitur

$$q = \left(c + \frac{a}{nn} - z\right)\alpha^{\frac{nnz}{a}} - c - \frac{a}{nn}, \text{ vel denique}$$

$$v = \frac{1}{nn}\left(c + \frac{a}{nn} - z\right) - \frac{1}{nn}\left(c + \frac{a}{nn}\right)\alpha^{\frac{-nnz}{a}};$$

Ex iſta vero æquatione deducitur:

I. Oriri rurſus, ut paragrapho decimo alia mathodo inventum fuit, $v = \frac{2cz - zz}{2a}$, ſi nempe rurſus ponatur $\frac{nnz}{a}$ numerus valde parvus. Id vero ut pateat, reſolvenda eſt quantitas exponentialis $\alpha^{\frac{-nnz}{a}}$ in ſeriem, quæ eſt ipſi æqualis, $1 - \frac{nnz}{a} + \frac{n^4zz}{2aa} - \frac{n^6z^3}{2.3a^3} +$ &c. ex quâ pro noſtro ſcopo tres priores termini ſufficiunt; eo autem ſubſtituto valore rejectoque termino rejiciendo, reperitur ut dixi

$$v = \frac{2cz - zz}{2a}$$

II. At ſi viciſſim $\frac{nn}{1}$ infinites major ponatur quam $\frac{a}{z}$ aut $\frac{a}{c}$, quia tunc $\alpha^{\frac{-nnz}{a}} = 0$, ut & $\frac{a}{nn} = 0$, fieri intelligitur $v = c - z$, ſive $v = x - b$, ut §. 4.

III. Neutram vero præmiſſarum formularum ſine notabili errore locum habere patet, cum $\frac{nnc}{a}$, numerus eſt mediocris, nempe nec infinitus, nec infinite parvus, & tamen utraque quantitas $\frac{nn}{1}$ & $\frac{a}{c}$ infinita.

Fuerit v. gr. elevatio indicata per c unius pollicis, immersio cylindri b 80. *poll.* ipsaque a 81. *poll.* dein ponatur diameter tubi tripla diametri foraminis, id est, $nn = 81$, erit $v = \frac{2-z-2\alpha^{-z}}{nn}$, atque si porro ponatur $z = c = 1$, ut habeatur altitudo velocitatis, cum utraque superficies est ad libellam posita, erit $v = \frac{\alpha-2}{nn\alpha}$, id est, proxime $v = \frac{1}{507}$ *poll.* cum secundum paragraphum decimum debuisset oriri $v = \frac{1}{162}$ *poll.* & secundum paragraphum quartum $v = 0$. In eodem exemplo fit spatium integrum, quod superficies percurrit non omnino octo quintarum partium unius pollicis, locusque maximæ velocitatis est præterpropter sexaginta novem centesimarum partium ejusdem mensuræ infra altitudinem initialem.

§. 12. Non difficilius esset ad omnes vasorum figuras extendere, quæ hactenus dicta sunt, imo etiam ad spatia finita, quibus aqua externa determinetur: fiunt autem formulæ plerumque adeo prolixæ, ut consultius duxerim easdem silentio præterire, & specimine saltem aliquo particularem ostendere modum, quo theoria ad quoslibet casus alios eruendos applicanda sit.

Attentionem particulariorem merentur, quæ de motu aquarum in tubis inferius largiter apertis, & profundissime submersis indicavi, quia in his motus oscillatorius, ut in pendulis, constantis durationis est, & undarum in mari fluxus illustratur ab illis. Existimavi autem prius de refluxu aquarum in cylindris submersis generaliter tractandum esse, atque ostendendum in ista hypothesi refluxum non differre à præcedente fluxu, quam motus totus oscillatorius examinetur. Jam igitur de isto refluxu commentabimur, deinceps utrumque motum in diversis casibus combinaturi, ne aliquid in argumento desiderari possit.

PARS SECUNDA.

De ascensu aquarum.

§. 13. Postquam aquæ descenderunt in vase submerso, quantum id ipsis natura rei permittit, duo potissimum consideranda se offerunt; primo excessus altitudinis superficiei externæ supra internam & secundo *vis viva* seu productum ex *ascensu potentiali* in massam illius aquæ, quæ ex cylindro in aquam cir-

circumſtagnantem durante deſcenſu ejecta fuit: hæc enim *vis viva*, quæ redire non poteſt ad aquam in cylindro, facit potiſſimum ut aquæ multum abſint, quo minus priſtinam, ex quâ ceciderant, in refluxu attingant altitudinem: nec tamen unica eſt hæc ratio, etiamſi vel nihil obſtent impedimenta tenacitatis, adhæſionis, hujuſmodique alia: Altera ratio indicata fuit §. 2. Iſtius vero rationis menſura ex ipſo aſcenſu eſt deducenda, cum prior ad deſcenſum pertineat & ſola, abſtrahendo animum ab impedimentis extrinſecis, in cauſa eſt, cur non aqua in aſcenſu tantum ſupra ſuperficiem externam elevetur, quantum infra eandem depreſſa fuerat. Notandum enim eſt, futurum fuiſſe, aquis vel per minimum foramen influentibus, ut eadem velocitate aſcenderent, tanquam ſi omne fundum deeſſet, plenoque orificio irrumperent, ſi modo poſt influxum impetum, quem in aquas internas faciunt, totum exererent ad earum aſcenſum promovendum: Verum quicunque hanc rem recte perpendit facile videt, plerumque impetum iſtum totum fere impendi in motum aliquem inteſtinum, qui nihil aſcenſum promoveat; dico autem notanter plerumque (quod bene notetur velim) quia cum foramen magnum admodum eſt, non difficulter prævidetur, impetum aquarum influentium ita apte fieri, ut motus internus haud parum inde promoveatur; at cum foramen minus eſt, liquet, rem ſecus ſe habere. Recte igitur adhibetur hypotheſis noſtra, cum vel fundum omne abeſt, aut fere totum eſt perforatum (ſic enim exceſſus velocitatis aquæ influentis ſupra velocitatem aquæ internæ nullus, aut valde exiguus eſt, & nullum illa in hanc impetum facit) vel etiam cum foramen minimum eſt, quia ſic omnis impetus infringitur. Sed ſi foramen rationem habuerit ad amplitudinem tubi, veluti ut $\sqrt{2}$. ad 1, vel ut 2. ad 1, aut circiter, major paululum erit motus quam qui ex iſta hypotheſi ſequitur, quia tunc notabilem impetum faciunt aquæ irruentes, nec is omnis per rei naturam perditur.

Facile igitur eſt ſine inſtituto calculo prævidere ſequentes in aquarum, poſtquam ex certa altitudine delapſæ fuerunt, refluxu affectiones.

I. Nullum nempe fore refluxum ſenſibilem, ſi foramen ſit valde parvum.

II. Cum pars cylindri ſubmerſa non mutata maneat, nunquam aquas in refluxu certum terminum prætergreſſuras, ſi vel in infinitum elevatæ fuerint aquæ in prævio deſcenſu: nunquam enim, ex quâcunque altitudine incipiat deſcenſus, omnes aquæ ex cylindro effluunt, ut vidimus, §. §. 5. & 7.

III. Cum descensus incipere intelligatur ab altitudine XY, subsequensque ascensus fieri usque in CD, fore productum *descensus actualis* massæ aquæ XYDC usque ad TV in massam, mensuram rationis utriusque combinatæ, quæ, ut §. 2. dictum, ascensum à præcedente descensu differre faciunt, & cum ratio secundo loco recensita evanescat, si omne auferatur fundum IM, fore tunc istud productum æquale *vi vivæ* omnis aquæ, durante descensu ejectæ, ita ut sine alio calculo, præter hactenus jam positos, ascensus aquarum in cylindro toto aperto definiri possit.

IV. Ascensum fore æqualem descensui, cum cylindrus infinite submersus intelligitur evanescentibus tunc præfatis diminutionis causis.

V. Hinc igitur oscillationes sine fine fore, quia postremæ oscillationes semper sint veluti infinite parvæ ratione submersionis altitudinum: faciunt autem impedimenta aliena, quorum nullam hucusque rationem habuimus, ut omnis motus cito admodum cesset.

§. 14. His generatim præmonitis, problema accuratiori calculo subjiciemus: duplicem autem dabo solutionem, alteram ad principia modo exposita accommodatam, alteram specie quodammodo diversam.

Igitur retentis tum figura, tum denominationibus §. 3. considerabimus aquam ex altitudine XY descendisse usque in xy, & ab hoc termino ascensum suum inchoare; dicatur My vel I$x = \alpha$ & postquam jam ascendit usque ad cd vel ef, ponatur M$d = \xi$, $df = d\xi$: His ita ad calculum præparatis, designataque rursus per v altitudine debita velocitati aquæ in cd & per $v + dv$ simili altitudine in situ proximo ef, inquiremus in *incrementum ascensus potentialis* aquæ accedens, dum cylindrum subit guttula LONP, superficiesque ex cd ascendit in ef; Perspicuum autem est, cum ubique *ascensus potent.* aquæ internæ multiplicatus per suam massam exprimatur per $n\xi v$ (nec enim ulla attentio adhibenda est ad motum intestinum) fore ejusdem producti incrementum $n\xi dv + nvd\xi$: Si vero præterea consideretur *ascensus potent.* $nnv - v$, (vid. §. 2.) quem guttula influens $nd\xi$ perdit, quique pariter debetur *descensui actuali* particulæ aqueæ $nd\xi$ per altitudinem $b - x$, patet esse ponendum

$$n\xi dv + nvd\xi + (nnv - v)nd\xi = (b - \xi)nd\xi, \text{ vel}$$
$$\xi dv + nnvd\xi = (b - \xi)d\xi.$$

Idem

Idem vero aliter ſic invenitur.

Conſideretur ſcilicet guttulæ L O N P quaſi nullam velocitatem fuiſſe, priuſquam influere inciperet, eandem vero ſtatim atque influere incipiat, acquirere *aſcenſum potentialem*, qui ſit $= nnv$, quamvis mox poſt ſui influxum (per annot. ſec. §. 2.) cenſenda ſit motum continuare velocitate communi $\sqrt{v}$. Quo facto ſic erit ratiocinandum. Ante influxum guttulæ, eſt *aſcenſus potent.* aquæ cdMLPIc (cujus maſſa $= n\xi$) $= v$. & *aſcenſ. potent.* guttulæ L O N P (cujus maſſa $= nd\xi$) $= o$; ergo *aſcenſus potentialis* omnis aquæ cdMLONPI$c = \frac{n\xi v}{n\xi + nd\xi} = \frac{\xi v}{\xi + d\xi}$.

At vero poſtquam guttula LONP influxit ſitumque aſſumſit L on P, eſt ejus *aſcenſ. potent.* $= nnv$, reliquæ autem aquæ efMLonPIe (cujus quidem maſſa rurſus $= n\xi$) *aſcenſus potent.* eſt $= v + dv$; igitur *aſcenſus potent.* omnis aquæ hic conſideratæ poſt influxum guttulæ eſt

$= \frac{nd\xi \times nnv + n\xi \times (v + dv)}{n\xi + nd\xi} = \frac{\xi v + \xi dv + nnvd\xi}{\xi + d\xi}$, cum ante eundem influxum fuerit $\frac{\xi v}{\xi + d\xi}$: cepit igitur incrementum $\frac{\xi dv + nnvd\xi}{\xi + d\xi}$, vel ſimplicius $\frac{\xi dv + nnvd\xi}{\xi}$. Iſtud vero incrementum æquandum eſt cum *deſcenſu actuali* quem aqua facit mutando ſitum cd MLONPIc ſitu efMLONPIe, qui deſcenſus æqualis eſt quartæ proportionali ad maſſam aquæ internæ $n\xi$, ad guttulam $nd\xi$ & altitudinem Vf vel $b - \xi$, ſic ut præfatus deſcenſus ſit $= \frac{(b-\xi)d\xi}{\xi}$: unde iterum habetur talis æquatio

$$\xi dv + nnvd\xi = (b - \xi)d\xi;$$

Hujus vero integralis poſt debitæ conſtantis additionem talis fit

$$v = \frac{b}{nn}\left(1 - \left(\frac{a}{\xi}\right)^{nn}\right) - \frac{1}{nn+1}\left(\xi - \left(\frac{a}{\xi}\right)^{nn} a\right),$$

quam nunc pro diverſis ejus circumſtantiis perpendemus.

§. 15. Et quidem cum fuerit amplitudo tubi infinities major, quam amplitudo foraminis, patet fieri $v = \frac{b-\xi}{nn}$, & irruere proinde aquam velocitate quæ debeatur altitudini ſuperficiei externæ ſuper internam, neque tunc ultra ſuperficiem aquæ externæ fiet aſcenſus. Cum

Cum vero amplitudo foraminis rationem habet finitam ad amplitudinem tubi, ascensus fit ultra superficiem R S veluti usque in $s\,t$: minor autem semper erit Vt quam Vy, nisi cum omne fundum abest, tunc enim erit Vt = Vy. Prouti monuimus §. 5. in descensu differentiam inter V Y & Vy, proportionalem esse & originem debere *ascensui potentiali* aquæ durante descensu ejectæ, ita nunc observari potest in ascensu differentiam inter Vy & Vt originem habere ab illisione guttularum L o n P in massam aquæ superjacentis, quæ quidem illisio non promovet ascensum, sed in inutilem motum intestinum impenditur, prouti indicatum fuit §. 2. Ergo cum omne fundum I M abest, aqua tubum eadem velocitâte ingreditur, qua jam gaudet aqua tubum antea ingressa & nulla fit collisio, quæ causa est cur in isto casu tantum ascendat aqua ultra superficiem R S, quantum fuerat infra illam depressa, quod æquatio, uti mox videbimus, indicat.

§. 16. Determinabitur maximus ascensus $s\,t$, faciendo $v = 0$. Igitur ut motus omnis recte definiatur, alternatim adhibendæ erunt formulæ §. §. 3. & 14. erutæ, quod nunc hoc unico illustrabo exemplo, quo $nn = 1$.

Si proinde $nn = 1$, fit $v = b\left(1 - \frac{\alpha}{\xi}\right) - \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{\alpha\alpha}{\xi}\right)$: eritque $v = 0$, cum sumitur $\xi = 2b - \alpha$, id est, cum sumitur Vt = Vy. Igitur si verbi gratia tubus A B M I aqua plenus, omnique fundo destitutus fuerit ad medietatem usque immersus aquæ exteriori, atque tota ipsius longitudo dicatur a, aqua sic agitabitur ut primo infra T V descendat, spatio $0{,}297\,a$, deinde simili spatio super eandem T V elevetur, rursusque infra eam deprimatur spatio $0{,}240\,a$, eodemque lineam illam iterum transcendat, & sic porro.

§. 17. Patet etiam cum α est $= 0$, tubo scilicet ab omni aqua vacuo, fore generaliter $v = \frac{b}{nn} - \frac{\xi}{nn+1}$: ascensumque integrum consequenter fore $\frac{nn+1}{nn}\,b$ vel ascensum supra superficiem exteriorem aquæ $= \frac{b}{nn}$.

§. 18. Venio nunc ad tubos infinite submersos, in quibus descensum cum suis affectionibus determinavimus §. 10. Utemur autem eadem plane methodo ad hunc casum definiendum quâ ibi usi sumus: erit nobis igitur depressio initialis Vy $(= b - \alpha) = c$, ascensus inde factus $y\,d$ $(= \xi - \alpha) = z$.

Sic

Sic eſt $\xi = \alpha + z$ & $b = \alpha + c$, ubi quantitates z & c ſunt ceu infinite parvæ conſiderandæ ratione quantitatis α. Habetur hinc

$$\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{nn} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+z}\right)^{nn} = \left(1+\frac{z}{\alpha}\right)^{-nn} =$$ adhibendo ſeriem notam

& ex illa ſumendo tres primos terminos $1 - \frac{nnz}{\alpha} + \frac{nn.\overline{nn+1}zz}{2\alpha\alpha}$. Subſtitutis iſtis valoribus pro b, ξ & $\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{nn}$ mutatur æquatio ultima paragraphi decimi quarti in hanc, $v = \frac{\alpha+c}{nn} \times \left(\frac{nnz}{\alpha} - \frac{nn \times \overline{nn+1}zz}{2\alpha\alpha}\right) -$

$$\frac{1}{nn+1} \times \left(\alpha + z - \alpha + nnz - \frac{nn.\overline{nn+1}zz}{2\alpha}\right) =$$

$$(\alpha + c) \times \left(\frac{z}{\alpha} - \frac{\overline{nn+1}zz}{2\alpha\alpha}\right) - \left(z - \frac{nnzz}{2\alpha}\right) =$$

$\frac{cz}{\alpha} - \frac{zz}{2\alpha} - \frac{\overline{nn+1}czz}{2\alpha\alpha}$: Poteſt autem negligi iſte ultimus terminus & ſic fit ſimpliciter

$$v = \frac{2cz - zz}{2\alpha},$$

quam æquationem n non amplius ingreditur: Neque illa differt ab æquatione pro deſcenſu §. 10. data, nempe $v = \frac{2cz - zz}{2a}$, quandoquidem quantitas a & α non differunt niſi quantitate minima $2c$.

Cæterum hic omnia etiam ſunt ſubintelligenda, quæ eodem §. 10. de tubo non nimis obſtruendo dicta ſunt.

§. 19. Sunt igitur deſcenſus & aſcenſus ſibi æquales; nam ex æquationibus noſtris patet, liquorem æqualiter librari ultra ſuperficiem aquæ externæ. Deinde vero potiſſimum ſequitur ex iſtis formulis, eſſe vel oſcillationes inæquales inter ſe iſochronas, modo omnes poſſint infinite parvæ cenſeri ratione ſubmerſionis: Pendulum autem ſimplex tautochronum eſſe ejuſdem longitudinis cum parte tubi ſubmerſa.

Differt iſtud theorema ab illo, quod §. 4. *ſect.* 6. de oſcillationibus in tubo cylindrico ex duobus cruribus verticalibus compoſito citatum fuit, in eo, quod ibi oſcillationes omnes non excluſis oſcillationibus finitæ magnitudinis ſint tautochronæ, cum in præſenti caſu oſcillationes finitæ ſint inæqualis dura-

tionis; deinde quod ibi longitudo penduli ſit æqualis dimidiæ longitudini tubi, cum hîc ſit æqualis integræ, quamvis ſi recte res perpendatur, hic potius ſit conſenſus quam diſſenſus dicendus ob tubi, quæ in priori caſu eſt, duplicationem.

§. 20. Utroque oſcillationum genere illuſtratur natura undarum vento agitatarum: neque enim aliter moventur, quam quod aquæ in illis continue aſcendant rurſuſque deſcendant. Ita patet quod dicit Newtonus, tempora undulationum eſſe in ratione dimidiata latitudinum undarum, quia ponit undarum formam ſibi conſtanter eſſe ſimilem & proinde earum latitudinem proportionalem profunditati, ad quam aquæ agitantur. Veriſimile autem eſt profunditatem eam eſſe, quæ pendulo ſimplici cum undis tautochrono, nempe *v.gr.* $60\frac{1}{2}$ *ped. Pariſ.* ſi ſingulis binis ſecundis fiat undarum aſcenſus deſcenſuſve.

§. 21. Quamvis noluèrim ad prolixitatem calculi evitandam, hoc argumentum in omni ſua extenſione proſequi, propterque ea de cylindricis vaſis tantum egerim, attamen quia in caſu ſubmerſionis infinitæ, enunciationes & theoremata parum de ſua concinnitate perdunt, ſuperaddam theorema generale pro oſcillationibus aquæ in tubo utcunque inæquali, omiſſa tamen demonſtratione, quæ ex alibi dictis unicuique obvia erit, præſertim vero ex iis quæ in *Sect.* 6. §. §. 6. 7. & *ſeqq.* uſque ad 20. expoſita fuerunt. Faciendum autem eſt, ut cylindricæ ſit ſtructuræ pars illa vaſis ſuperior, in quâ excurſiones fiunt.

§. 22. Fuerit igitur *b d* longitudo vaſis ſubmerſi (Fig. 35. *b*) Repræſentet *b* F ejus amplitudinem in loco ſuperficiei, ponaturque vas ita formatum, ut ſit curva F G H ſcala amplitudinum: ſumatur linea *b c* fiatque curva L M N, cujus applicata *c* M ſit ubique $= \frac{bF^2}{cG}$, & erit longitudo penduli iſochroni cum oſcillationibus aqueæ ſuperficiei = ſpatio *b d* N L diviſo per *b* L.

Corollarium.

§. 23. Ex præcedente paragrapho ſequitur, ſi tubus ſubmerſus conicus fuerit, habeatque amplitudinem in regione aquæ ſuperficiei, quæ ſit ad orificium ſubmerſum ut *m* ad *n*, fore longitudinem penduli Iſochroni cum vibrante aqua ad longitudinem ſubmerſi tubi, ut $\sqrt{m}$ ad $\sqrt{n}$, id eſt, ut radices prædictarum amplitudinum, atque ſi tubus idem ſitu, modo recto modo

do inverſo, ſubmergatur tantum non totus, fore longitudines pendulorum iſochronorum in ratione contraria orificiorum ſubmerſorum.

Scholium Generale.

§. 24. Quæ in hac ſectione continentur, quia novis hypotheſibus innituntur pleraque, eo magis operæ pretium erit experimentis tentare. Ego quidem diverſa inſtitui, non vacavit autem ſingula quæ mente conceperam exequi: quæ feci inferius recenſebo; Interim ut tutius judicium ferri poſſit de conſenſu experimentorum cum theoria, diſpiciendum prius erit pro rerum circumſtantiis, an & quantum fere contractio venæ effluentis (cujus naturam expoſui in *ſect.* 4.) calculum turbare poſſit: quod incommodum maxima parte tolli poterit, ſi fiat ut orificii inferioris latera parvulum aliquem cylindrum efforment, vix dimidiæ lineæ altitudinis, qua de re animo revolvatur experimentum quartum ad ſectionem quartam pertinens. Deinde etiam animus advertendus ad reſiſtentias ab adhæſione aquæ oriundas, quæ quidem parum retardant motus, ſi tempora oſcillationum reſpicias, multum autem excurſionibus detrahunt, præſertim ſi tubi ſtrictiores & longiores ſumantur. Igitur magis fidendum erit experimentis, quæ circa oſcillationum tempora facta fuerint, quia hæc tempora à diminutione excurſionum non multum admodum alterantur. Ratione primi experimentorum generis, quo excurſiones fluidorum in tubis, tam deſcenſus quam aſcenſus inquirendi obſervandique veniunt, hâc uſus fui circumſpectione, ut filum tubo circumvolverem eo in loco, ad quem aquas deſcenſuras vel aſcenſuras eſſe expectabam, idemque filum poſt ſæpe repetitum experimentum ita tandem locavi, ut ſuperficies fluidi oſcillantis nec ultra nec citra excurreret. Reliqua etiam loca, quæ in tubo obſervanda erant, pariter filo circumvoluto notavi. Quod deinde ad tempora oſcillationum pertinet, quia hæ citiſſime decreſcunt fiuntque imperceptibiles & plane nullæ, non potui illa aliter inquirere, quam explorando poſt ſæpiſſime iteratum experimentum longitudinem penduli ſimplicis iſochroni, quod dum oſcillabat digitum orificio tubi ſuperimpoſui eumque eo præciſe temporis puncto removi, ut & pendulum & fluidum oſcillationem ſimul inciperent.

EXPERIMENTA
Ad sect. sept. referenda.

Experimentum 1.

TUbum adhibui vitreum cylindricum diametri fere quatuor linearum, inferius totum apertum. Eum aquæ, in vase pellucido amplissimo stagnanti, submersi ad altitudinem 44. *lin.* digitumque orificio admovi superno, ne extrahendo tubi partem descenderet in illo aqua: extraxi deinceps tubum ad alt. 22. *lin.* ita ut tam pars tubi submersa, quam altitudo aquæ internæ supra externam esset 22. *lin.* moxque remoto digito observavi descensum superficiei in tubo infra superficiem aquæ stagnantis eumque vidi fuisse $9\frac{1}{2}$ *lin*,

Debuisset autem vi §. §. 7. & 17. descendere tredecim lineis; Defectus trium linearum cum dimidia unice fere adhæsioni aquæ ad latera tubi tribuendus videtur.

Observato descensu totum experimentum repetii, ut ascensum quoque proximum experirer: Visus autem mihi fuit 8. *lin.* qui vi paragraphi decimi sexti, habito respectu ad prævium descensum, esse debuerat $9\frac{1}{2}$ *lin.* nempe tantus, quantus fuit præcedens descensus. Hic vero experimentum unica tantum linea cum dimidia defecit, cum in prima experimenti parte ad tres usque lineas cum dimidia defectus adfuit, quia nimirum major ibi facta fuit excursio eaque velocitate majori, ita ut impedimenta, quæ una cum velocitatibus crescunt, admodum majora offenderit.

Experimentum 2.

Eodem tubo usus sum, sed eo lamina munito, quæ foramine erat pertusa amplitudine $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ratione amplitudinis tubi, cum superficies tubi esset octodecim lineis elevata supra aquam stagnantem, totidemque lineis fundum submersum, vidi superficiem tubi in descensu quinque fere lineis infra aquam stagnantem descendisse.

Paragraphus octavus autem descensum arguit $7\frac{1}{2}$ *lin.* defectum, qui plusquam $2\frac{1}{2}$ *lin.* fuit, rursus adhæsioni aquæ ad latera tubi adscribo.

Deinde

Deinde tubum hunc eadem lamina inſtructum admoto ſuperius digito aquæ immiſi ad profunditatem 18. *lin.* totum ab aquâ vacuum: remoto digito emerſit ſuperficies tubi ſupra aquam ſtagnantem integris octo lineis, cum §. 17. earum novem indicat pro iſto caſu.

Quod hic defectus minor admodum fuerit, quam in deſcenſu, rationi adſcripſi, quam prolixe paragrapho decimo tertio indicavi, cum dicerem motum paullo majorem oriturum, cum foramen amplitudinem reſpectu tubi notabilem veluti in ratione $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad 1, aut circiter habuerit, quam qui ex hypotheſi ſequitur: atque ut ea de re certus plane fierem, tubum adhibui breviorem & ampliorem, ut omnis fere impedimentis alienis effectus præriperetur, & experimentum cepi, quod ſequitur.

Experimentum 3.

Tubum adhibui cujus diameter erat plus quam ſeptem linearum, quem ex ferro confieri curavi, quia vitreus bene cylindricus non fuit ad manus: longitudo ejus fuit quatuor pollicum cum ſex lineis & ſemiſſe: amplitudo ejus ratione foraminis indicata per n fuit $= 1,860$ & $nn = 3,458$.

De iſto tubo experimentum ita ſumſi:

Obturato ſcilicet orificio ſuperiori identidem tentavi, ad quam profunditatem ſubmergendus eſſet aquæ in arca ampliſſima ſtagnanti, ut remoto protinus digito, qui orificium obtegebat, aqua ad limbum ejusdem orificii præciſe aſcenderet, nihilque præterflueret. Iſtam vero profunditatem expertus ſum 3. *poll.* cum tribus *lineis*; fuit igitur aſcenſus ſupra aquam externam unius pollicis & trium linearum cum dimidia, cum vel omnibus remotis impedimentis parum ultra undecim lineas aſcenſus fieri debuerit vi paragraphi 17. Recte igitur præmonitum fuit §. 13. non poſſe non aſcenſus fieri paullo majores in iſtiusmodi caſibus, quam hypotheſis poſtulat. Mox eidem tubo aliud applicui fundum; erat jam $n = 3,68$, & $nn = 13,54$: difficile fuit experimenti ſucceſſum recte dignoſcere, quia ſuperficies in tubo aſcendens ſemper fuit bullata: viſum tamen fuit, tubum nunc immergendum fuiſſe ad altitudinem 4. *poll.* cum duabus tribuſve lineis, manentibus ſic extra aquam præterpropter quatuor lineis, prorſus ut theoria indicat.

Experimentum 4.

Tubum cylindricum vitreum, qui tres præterpropter lineas habebat in diametro immersi ad altitudinem 20. *poll.* fecique, ut aqua in illo libraretur, elevata prius aquâ ad altitudinem unius fere pollicis. Ultra quatuor vel quinque itus reditusque bene notabiles non fecit, nec adeoque omni rigore longitudinem penduli simplicis isochroni examinare potui; mihi tamen illa visa fuit 22. aut 23. pollicum; ex quo intuli adhæsionem aquæ ad latera tubi non solum diminuere excursiones, sed & morari paulisper tempora oscillationum: debuisset enim secundum §. 19. esse præfata longitudo viginti tantummodo pollicum. Idem expertus sum in oscillationibus, quas in superiori sectione pertractavimus.

Cæterum obturato vel ad dimidium fere orificio inferiori, observare non potui, excursiones inde fuisse diminutas aut oscillationes retardatas, quod conforme est cum iis, quæ §. §. 7. & 18. habentur.

Experimentum 5.

Tubum conicum longitudine 21. *poll.* immersi aquæ orificio ampliore, ita ut unicus pollex extra aquam emineret: fuit autem alterum orificium alterius paululum plusquam duplum. Longitudinem penduli isochroni cum vibrationibus aquæ in tubo libratæ inveni quindecim *poll.* debuisset autem secundum §. 23. esse eadem longitudo paullo minor quatuordecim pollicibus. Denique similiter eodem tubo usus, sed situ inverso, deprehendi longitudinem penduli isochroni tantillo plusquam duplam ejus, quæ antea fuerat, prouti citato paragrapho indicatur.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ

SECTIO OCTAVA.

De motu fluidorum cum homogeneorum tum heterogeneorum per vasa irregularis & præruptæ structuræ, ubi ex theoria virium vivarum, quarum pars continue absorbeatur, explicantur præcipue Phænomena singularia fluidorum, per plurima foramina trajectorum, præmissis regulis generalibus pro motibus fluidorum ubique definiendis.

§. I.

ALiis adhuc principiis præter quam in sectione proxime præcedente usi non sumus, quam hisce duobus *quod velocitates fluidorum sint ubique reciproce proportionales amplitudinibus vasorum*, cujus ope invenitur *ascensus potentialis* totius aquæ ex dato *ascensu potentiali* cujusvis particulæ; tum quod *ascensus pot.* totius aquæ perpetuo æqualis maneat *descensui actuali*. Quoties ambo hæc principia locum habent, minime dubitandum est, quin methodo à nobis adhibita motus fluidorum recte definiatur. Non diffitebor tamen, hujusmodi fieri posse structuræ vasa, in quibus fluida moventur, ut neutrum istorum principiorum recte procedat. Prius equidem raro aut nunquam notabiliter à vero abducit, quia ubicunque locum non habet, ibi nullum fere aquæ habere solent motum, possuntque sine sensibili errore ceu stagnantes considerari: Longe vero aliter comparatum est alterum principium, quod apparebit ex inferioribus exemplis, & cujus rei luculentum esse possunt testimonium ea, quæ in superiori sectione protulimus circa refluxum aquarum; tantum enim abest, ut aquæ in vase submerso ex data altitudine delapsæ, ad hanc altitudinem regredi possint, prouti vi istius principii deberent, sublatis impedimentis extrinsecis, quin potius plerunque vix sensibilis sit earum ascensus præ descensu, quem antea fecerunt: imo nequidem ascendere superficies aquæ potest tan-

tantum ſupra aquam, cui tubus immergitur, quantum infra eandem depreſſa fuerat, niſi cum tubus totus eſt apertus: iſta vero ſuperficies multo minus deprimitur quam antea fuerat elevata. Horum rationem dedimus in ſuperiori ſectione: Hæc quia ita ſunt, regulas nunc dabo duas pro motu aquarum ubique definiendo, easque porro exemplis illuſtrabo talibus, quæ nulla adhuc theoria explicari potuerunt, cum noſtra autem egregie admodum conveniunt.

Regula 1.

§. 2. Diſpiciendum eſt, aſſumta alicubi in vaſe propoſito velocitate fluidi ceu cognita, quænam reliquis fluidi partibus futura ſit velocitas. Ita enim cognoſcetur *aſcenſus potentialis* totius fluidi ejusque incrementum. Hactenus conſideravimus fluida in infinita ſtrata parallela vel potius ad latera vaſis ubique perpendicularia diviſa, ſtatuimusque velocitates hiſce ſtratis reciproce proportionales: Facile quidem eſt vaſa effingere, ubi aliter moventur fluida; crediderim autem his in locis motum notabilem nunquam habere fluida ita, ut error ex iſta hypotheſi ſenſibilis naſci fere non poſſit: poterit tamen majoris accurationis ergo præfata regula adhiberi. Præſertim vero huc pertinet contractio venarum, cum fluida per foramina in tenuibus admodum laminis facta transire coguntur, qua in re magna eſt adhibenda circumſpectio: Effectus hujusmodi contractionum haud male, puto, prævidebuntur, cum recte perpenſa fuerint, quæ in ſectione quarta de illis monui.

Regula 2.

§. 3. Singulis momentis diſpiciendum eſt, quantum *vis vivæ*, ſeu quodnam productum ex *aſcenſu potentiali* in maſſam oriatur ad fluxum præcipuum, cujus natura quæritur, nihil conferens. Id vero rurſus uniuscujusque circumſpectæ æſtimationi relinquendum eſt. Quod ſic oritur, addendum eſt facto ex *aſcenſu potentiali*, quem motus præcipuus involvit, in maſſam, aggregatumque productorum demum æquale cenſendum eſt facto ex maſsâ omnis aquæ in ejusdem *deſcenſum actualem*.

Magni profecto eſt momenti hæc regula, & ut puto, fere unica ad motuum menſuras obtinendas, qui in vaſis irregularibus, pluribusque cavitatibus inter ſe communicantibus diviſis fiunt, quod nunc pluribus illuſtrabo exemplis. Pro-

Problema.

§. 4. Propositum fuerit vas ACRB (Fig 37.) infinitæ quasi ratione foraminum mox dicendorum ubique amplitudinis & diaphragmate aliquo EF in duas distinctum cavitates inter se communicantes, mediante foramine G: habeat præterea vas istud in infima sui parte aliud foramen D: deinde ponatur vas aquâ plenum usque in PQ, sic ut cavitas inferior CEFR tota sit humido repleta, atque insuper diaphragmati superjaceat pars altera PQFE. His positis, fluidoque jam moveri incipiente, quæritur velocitas aquæ per foramen D in aërem effluentis vel altitudo genitrix hujus velocitatis. Fig. 37.

Solutio.

Fuerit altitudo superficiei PQ supra foramen D $= x$, amplitudo foraminis D $= n$, alteriusque G $= m$. Perspicuum autem est *ascensum potentialem* cujusvis guttæ per G transfluentis nihil promovere effluxum per D, totumque impendi in motum aliquem excitandum intestinum, qui mox absorbetur sine alio effectu: necesse igitur est ut singulis momentis motus generetur novus in particulis foramen G transeuntibus, non minus atque in particulis per D effluentibus. Sed si *ascensus potentialis* guttulæ per D effluentis dicatur v, id est, si aqua exilire ponatur per D velocitate, cujus altitudo genitrix sit v, erit similis altitudo ratione guttulæ mole sua priori æqualis, per G eodem tempore transfluentis $\frac{nnv}{mm}$. Multiplicatis istis *ascensibus potentialibus* per massam, quam æqualem habent, quamque vocabo M, erit aggregatum productorum $= Mv + \frac{Mnnv}{mm}$. Et cum ob infinitam amplitudinem vasis alius motus non generetur, erit præfatum aggregatum (per *reg.* 2.) censendum æquale facto ex massa omnis aquæ in ejusdem *descensum actualem*. At vero si massa omnis aquæ dicatur μ, erit (per § 7. *Sect.* 3.) *descensus actualis*, qui fit dum guttula M effluit $= \frac{Mx}{\mu}$, ita ut productum commune sit $= Mx$. Igitur habetur

$$Mv + \frac{Mnnv}{mm} = Mx, \quad \text{sive} \quad v = \frac{mmx}{nn+mm}. \qquad \text{Q. E. F.}$$

Scholium I.

§. 5. Apparet ex isto exemplo, motum sine calculo differentiali de-

terminari posse, cum figura vasis ubique amplissimi motum hunc mutare non potest. Interim difficile futurum non fuisset, consideratione quoque habita ad amplitudines vasis, fluxum definire, & solo brevitatis studio id vitavimus pariterque omittemus in sequentibus, nisi fortasse motus notabiliter à figura vasis varia mutetur, quod fieri potest in tubis satis amplis, sed iis longissimis, in quibus fluidum movetur, præsertim si motus determinandi sint oscillatorii. Imo vidimus in præcedente Sectione, si oscillationes sint valde parvæ in tubis profundissime submersis, tunc tantum abesse, ut ad solum foramen fundi sit attendendum, neglectis amplitudinibus etiamsi satis magnis, quin potius ad has solas fere sit respiciendum.

Scholium 2.

§. 6. Quia in calculo, quem posuimus, *vis viva* cujusvis guttulæ per G transfluentis ab aqua cavitatis inferioris absorberi debet, perspicuum est, propositionem non esse extendendam ad illos casus, qui hypothesi repugnent, veluti cum diaphragma E F fundo C R proximum est simulque foramina sibi directe respondent: ita enim non arduum est providere, motum longe diversum fore ab eo, quem præsens theoria indicat. At vero, si distantia D G magna sit, sique simul foraminum situs sit obliquus & latera foraminum venis aqueis negent contractionem; dubium nullum est, quin theoria accurate omnibus phænomenis respondeat.

Corollarium.

§. 7. Si foramen G est admodum amplum præ altero, fit fere $v = x$, sed hæc altitudo v, cui nimirum respondet velocitas aquæ per D effluentis, non parum decrescit, crescente foramine D, ita ut si fuerit *v. gr.* duplum foraminis G, sit $v = \frac{1}{5} x$ & tantum non tota evanescat, cum foramen G est valde exiguum respectu foraminis D.

His ita inventis, jam quivis veram perspiciet rationem motuum illorum, quos Mariottus primus observavit, & quibus ceu valde *admirabilibus* testatur se supra modum fuisse delectatum, simulque intelliget, quam longe Auctor iste in reliquis perspicacissimus à viâ aberraverit in hisce disquisitionibus. Non abs re fore puto observata Mariotti hic apponere.

Fig. 38. §. 8. Vas adhibuit, quale repræsentat Figura trigesima octava, quæ non

non differt à priori nisi in eo, quod in ima parte cylindro A B C tubus horizontalis M D insertus sit perforatus lumine D, per quod aquæ verticaliter exiliunt: Diaphragma vero E F in medio perforatum est lumine G ut antea: infra illud parvulum erat foramen K, ut facilius cavitas inferior aquis impleri posset, quo facto idem obturabatur, reliquumque vasis replebatur.

His ita præparatis, effluentibusque aquis per D, observavit Mariottus, mox illas ascendisse usque in I, deinde sensim imminuta velocitate usque in N & tandem, imminente depletione tota cavitatis superioris, A B F E usque in O, tuncque assumtis confestim novis viribus assilivisse fere usque in F. Animadvertit etiam, si bene memini, altitudinem jactus initialis eo minorem esse, quo minus sit foramen G, ratione alterius D. Videatur ejus *tract. de motu aquarum part. IV. disc.* 1. Putat autem horum motuum mutationes explicari posse fingendo vasi A B F E amplissimo tubum strictiorem adhærere G L M D, per quem aquæ fluant. At vero demonstravimus & experientia quotidie docet, motum aquarum ex vase A B G L M D admodum diversum esse ab eo, qui modo indicatus fuit. Non minus falleretur si quis putaret aquam eadem velocitate exilire per foramen D, quasi illud in diaphragmate E F positum esset, nam fieri potest, ut altitudo jactus initialis sit major & minor altitudine F B. Nec denique ea effluent aquæ quantitate, uti facile quis suspicari posset, qua eodem tempore effluerent ex vase superiori simplici rescissa parte E F D C quamvis ita proxime se res habeat, cum foramen G admodum minus est foramine D.

§ 9. Nostra vero æquatio, nempe $v = \frac{mmx}{nn+mm}$, recte omnino respondet phænomenis: indicat enim aquam mox ab initio fluxus ad certam ascendere altitudinem, eamque tanto minorem, quanto minus est foramen diaphragmatis præ foramine altero; dein istum ascensum sensim diminui, donec aqua omnis ex cavitate superiori effluxerit, quo ipso momento protinus augmentum capit, totamque aquæ superincumbentis altitudinem tantum non attingit, quia tunc ex vase simplici eoque infinite amplo effluere censendæ sunt aquæ: paulisper tamen etiamnum retardantur aquæ à transitu aëris per foramen G, & sane notabiliter retardantur, cum foramen superius valde parvum est, de quo argumento mox quædam dicemus, cum de fluidis heterogeneis sermo erit. Si figura Mariotti debita proportione respondeat argumento instituto, oportet, ut foramen G alterius fecerit paullo plusquam dimidium.

§. 10. Indicat porro formula noſtra, quod multis fortaſſe nondum perſpectâ hâc theoriâ ſatis paradoxum videri potuiſſet, ſitum diaphragmatis EF ſive altiorem ſive humiliorem nullo modo mutare impetum ſive velocitatem aquæ effluentis; ratio autem iſtius phænomeni omnibus nunc, puto, manifeſta eſt.

§. 11. Jam vero examinabimus inſuper motum aquarum, cum plura ſunt diaphragmata foraminibus pertuſa, per quæ aquæ tranſire cogantur, ut effluxus per foramen D fieri poſſit. Poterit id eodem abſolvi modo, quo uſi ſumus in problemate §. 4. Ita autem inſtituto recte calculo retentisque denominationibus ibidem adhibitis apparebit eſſe

$$v = x : \left(1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \&c.\right)$$

ubi per α, β, γ &c. intelliguntur amplitudines foraminum, quæ ſunt in diaphragmatibus, dum n exprimit ut antea amplitudinem foraminis D, per quod aquæ effluunt.

§. 12. Si proinde loco unius diaphragmatis ſint in ſimili vaſe, quale
Fig. 39. (Fig. 39.) repræſentat, plura diaphragmata veluti in B, C, R &c. per quæ aqua transfluat, dum per infimum foramen D effluit, mutabitur & augebitur confeſtim velocitas aquæ effluentis, quoties aliqua cavitas depletur: talis autem eſſe poteſt proportio inter altitudines AB, BC, CR, RE &c. atque amplitudines foraminum D, G, F, H &c. ut ſemper, quoties nova depleri incipit concameratio, vena effluens ad eandem altitudinem O aſſurgat, ſeu eadem velocitate effluat. Id vero obtinetur (deſignatis amplitudinibus foraminum D, G, F, H &c. per n, α, β, γ, &c.) faciendo

$$BC = \frac{nn}{\alpha\alpha} AB;\ CR = \frac{nn}{\beta\beta} AB;\ RE = \frac{nn}{\gamma\gamma} AB\ \&c.$$

ita ut poſitis foraminibus inter ſe æqualibus ſint pariter lineæ AB, BC, CR, RE &c. inter ſe æquales faciendæ. Facile quoque erit in vaſe cylindrico eam conciliare foraminibus magnitudinem, ut ſuperficies fluidi eodem tempore ab uno diaphragmate ad ſubſequens quodcunque deſcendat, & cum hæc diaphragmata æqualiter à ſe invicem & à fundo diſtant, uniformis clepſydrarum ſtructura excogitari poteſt.

§. 13. Si vero omnia diaphragmata altiſſime poſita ſint, jucundus erit luſus

lusus hydraulicus, venam prosilientem D O videre, quæ æqualibus incrementis æqualibusque temporum intervallis, quod utrumque fieri potest, subsultim crescat.

§. 14. Propositum nunc sit motum fluidi exilientis indagare, cum per singula foramina alia atque alia fluida transfluunt. Fluida autem leviora continue ponenda esse apparet, quo sunt altius posita, ne motus turbetur, quod fit cum eodem tempore fluidum inferius ascendit, superiore descendente, per commune foramen. Innotescet hoc modo quisnam sit motus in aquis ex vase effluentibus undique clauso præter foraminulum aliquod superne existens, quod aëri transitum concedit. Hypothesin vero infinitæ vasis cylindrici amplitudinis ratione foraminum retinebimus, atque porro gravitatem specificam fluidi per D exilientis designabimus per A, illiusque quod per G transfluit notabimus littera B, similiterque gravitates specificas fluidorum per foramina, F, H, &c. fluentium indicabimus respective litteris C, D, &c. Denique cum etiam considerandæ hic sint altitudines diversorum fluidorum, quorum quidem, ob figuram vasis cylindricam solum infimum effluens altitudinem mutat, vocabimus x altitudinem fluidi infimi supra foramen D, fluidorum reliquorum, eo quo sibi superincumbunt ordine, altitudines designabimus respective per b, c, d &c. reliquas denominationes paragraphi undecimi retinebimus; quibus ita præparatis computus instituetur ut §. 4. factum est, neque enim quicquam aliud insuper observandum est, quam ut massæ guttularum iisdem tempusculis per diversa foramina transeuntium non simpliciter ex mole, sed etiam ex gravitate specificia æstimentur: *descensus* autem *actualis* pro singulis fluidis erit seorsim sumendus: Hisce vestigiis insistendo reperitur talis primo æquatio

$$Av + \frac{nn}{\alpha\alpha}Bv + \frac{nn}{\beta\beta}Cv + \frac{nn}{\gamma\gamma}Dv + \&c. = Ax + Bb + Cc + Dd, + \&c.$$

quæ reducta dat

$$v = (Ax + Bb + Cc + Dd + \&c.) : (A + \frac{nn}{\alpha\alpha}B + \frac{nn}{\beta\beta}C + \frac{nn}{\gamma\gamma}D + \&c.)$$

§. 15. Si duo sint liquores, erunt duo termini tam in numeratore quam in denominatore sumendi & tres termini cum tres fuerint liquores, atque sic porro: Si proinde liquor effluens sit, v. gr. mercurius, ipsique superincumbat aqua statuanturque gravitates specificæ horum liquorum ut 14. ad 1. fiet

$v =$

$$v = \frac{14x+b}{14+\frac{nn}{\alpha\alpha}}$$

atque ſi ratio foraminum D & G ſuerit ex gr. ut 3 ad 1, fiet

$$v = \frac{14x+b}{23}$$

§. 16. Patet quoque ratiocinium iſtud non excludere eos caſus, quibus fluida ſuperiora ſunt inferioribus ſpecifice graviora, modo fluida inferiora non aſcendant per eadem foramina, per quæ ſuperiora deſcendunt: neque vero id futurum eſſe præſumo (nec tamen affirmo) cum loco ſimplicis foraminis tubulus ſit quamvis exiguæ altitudinis, per quem liquor ſuperior deſcendat in inferiorem cavitatem, veluti in fig. 40. ubi quidem duo tantum liquores conſiderantur.

Hic autem altitudo C R variabilis eſt, & altitudo A C conſtans; interim tamen uniformitatis litterarum gratia vocabimus altitudinem A C $= x$, alteram C R $= b$; gravitatem ſpecificam fluidi per D erumpentis faciemus rurſus $=$ A, alteriusque fluidi per G transeuntis $=$ B, & erit altitudo D O ſeu

$$v = \frac{Ax+Bb}{A+\frac{nn}{\alpha\alpha}B}$$

Igitur ſi per foramina D & G reſpective fluant aqua & mercurius erit nunc

$$v = \frac{x+14b}{1+\frac{14nn}{\alpha\alpha}}.$$

§. 17. Ut porro innoteſcat motus fluidi ſimplicis ex vaſe ſuperne parvulo foramine aërem admittente, obſervandum eſt, nullam hic altitudinem eſſe b; quia aër utrique orificio incumbere ad eandem altitudinem cenſeri poteſt, erit proinde

$$v = \frac{Ax}{A+\frac{nn}{\alpha\alpha}B}$$

atque ſi fuerit $\frac{A}{B} = 850$, quæ præterpropter ſolet eſſe proportio inter gravitates ſpecificas aquæ & aëris, erit

$$v = \frac{850x}{850+\frac{nn}{\alpha\alpha}};$$

§. 18.

§, 18. Omnia hæc principia, quæ hactenus adhibuimus, facile ut jam dixi extenduntur ad vasa, quæ finitam ratione foraminum habent amplitudinem; Potest autem eorum veritas alio etiam modo admodum diverso evinci, uti ostendam, cum ad *hydraulico-staticam* pervenero, quia altero illo demonstrandi modo pressiones fluidorum in singulis vasis partibus magis fiunt perspicuæ; differunt autem horum fluidorum regulæ staticæ vehementer à legibus, quæ fluidis stagnantibus debentur.

Cæterum habent hæc suam utilitatem ad machinas hydraulicas recte perspiciendas; neque enim satis ad hæc attenti fuisse videntur artifices: dabitur autem occasio de iis uberius differendi in sequenti sectione, ubi calculum ponemus, quantum vis in propellendis aquis adhibitæ perdatur à transitu aquæ per plura foramina, ostensuri simul remedia adhibenda, ut illud virium detrimentum, quantum fieri potest, diminuatur. Prius vero alia quædam vasa composita in hâc Sectione considerabimus, quam ad hæc descendamus.

§. 19. Fit aliquando, ut vasa juxta se posita aquas unum ex altero recipiant effluxuras demum ex ultimo. Hosce vero motus jam exemplo illustrabimus.

Propositum fuerit vas cujuscunque formæ A G M B (Fig. 41.) quod nova aquarum affusione constanter plenum conservatur usque in A B. Ex eodem interim vase fluidum transire intelligatur per foramen M in aliud vas contiguum B M N C & ex hoc rursus in aliud C N R D per foramen N & sic porro, donec tandem aquæ in aërem ejiciantur, quæranturque loca superficierum H L, P Q, &c. postquam fuerunt ad statum *permanentiæ* reducta. Quæstio autem sic solvetur. Fig. 41.

Perspicuum nempe est ex eo, quod superficies A B, H L, P Q, &c. in eodem loco permanent, aquas iis transire per foramina M, N, R velocitatibus, quæ debeantur altitudinibus B H, L P, Q R, si modo transitus aquarum per unum foramen non acceleret earundem fluxum per foramen proximum, quod certe non fiet, nisi expresse opera detur, ut id aliquantum fiat. Præterea vero considerandum est, velocitates aquarum per foramina transfluentium reciproce esse foraminibus proportionales, quia in statu *permanentiæ* eodem tempore eædem aquarum quantitates per singula foramina trajiciuntur. Ex istis intelligitur, desig-

na-

natis amplitudinibus foraminum M, N, R, per m, n, p, fore $LP = \frac{mm}{nn} \times BH$; $QR = \frac{mm}{pp} \times BH$: Eſt vero $BH + LP + QR$ æqualis altitudini ſuperficiei AB ſupra foramen ultimum R ſeu DR; erit igitur

$$BH + \frac{mm}{nn} \times BH + \frac{mm}{pp} \times BH = DR,$$

$$\text{\& proinde } BH = DR : \left(1 + \frac{mm}{nn} + \frac{mm}{pp}\right); \text{ pariterque}$$

$$LP = \frac{mm}{nn} \times DR : \left(1 + \frac{mm}{nn} + \frac{mm}{pp}\right) \text{ atque}$$

$$QR = \frac{mm}{pp} \times DR : \left(1 + \frac{mm}{nn} + \frac{mm}{pp}\right), \text{ ſeu}$$

$$BH = DR : \left(1 + \frac{mm}{nn} + \frac{mm}{pp}\right)$$

$$LP = DR \cdot \left(1 + \frac{nn}{mm} + \frac{nn}{pp}\right)$$

$$QR = DR : \left(1 + \frac{pp}{nn} + \frac{pp}{mm}\right)$$

atque ſic determinantur ſitus invariabiles ſuperficierum HL, PQ, &c. At quanto tempore id fiat, ſi aliter ſuperficies illæ ſint poſitæ & quænam interea aquæ quantitas per ſingula foramina fluat, inferius examinabimus unà cum aliis quæſtionibus eo pertinentibus: Jam vero ex allatis valoribus altitudinum BH, LP, QR &c. præcipuas affectiones deducemus.

§. 20. I. Cum ſingula foramina ſunt inter ſe æque ampla, erit $BH = LP = QR$ &c. & quævis iſtarum altitudinum toties continebitur in altitudine DR, quoties vaſa replicantur.

II. Si vero aliquod foraminum ſit infinite parvum ratione reliquorum, erunt omnes ſuperficies, quæ ſunt cis foramen poſitæ, in eadem altitudine cum prima ſuperficie AB: reliquæ autem fundo GR erunt proximæ.

III. Si canalis fingatur continuus per ſingula foramina M, N, R &c. tranſiens, intelligitur, aquam per orificium canalis effluere debere velocitate, quæ debeatur toti altitudini DR. In noſtro vero caſu ea velocitas reſpondet tantum altitudini QR, cujus rei ratio & origo eſt, quod *aſcenſus potentialis* ſingularum guttularum per foramina, excepto ſolo foramine effluxus, transfluentium

tium absorbeatur. Igitur vis viva quæ singulis momentis perditur est ad vim vivam quæ singulis momentis generatur, ut D Q ad D R. Altitudines vero B H, L P, &c. repræsentant *respective* vim vivam, quæ continue guttulis per foramina M, N transfluentibus separatim demitur. Puto tamen si foramina fuerint fere æqualia, eorumque centra in rectam lineam posita, ac denique parietes B M, C N, D R non admodum à se invicem remoti sint, fieri posse, ut aliquanto majori velocitate aquæ erumpant, quam theoria ista indicat: In reliquis casibus non dubito de ejusdem accuratione, abstrahendo animum ab impedimentis sæpe indicatis.

IV. Denique perspicuum est, quoties superficies aquæ H L, P Q &c. situm suum mutant sive plures, sive una sola, mox omnes superficies loca mutaturas esse, donec eo quo dictum fuit modo fuerint ad æquilibrium repositæ. Mutationes autem istas generaliter definire nodosi æque ac prolixi est calculi, nisi vasa ponantur prismatica & infinitæ quasi amplitudinis ratione foraminum, ut nempe incrementa *ascensuum potentialium* aquarum M L, N Q &c. quæ locum mutant, negligi possint ratione *ascensuum potentialium*, qui in guttulis per M, N, R transfluentibus perpetuo generantur. Neque profecto restrictio hæc afficere nos debet, cum passim jam viderimus in vasis vel mediocriter admodum amplis posse sine sensibili errore incrementa motus massarum internarum rejici in calculo. Omittam igitur solutionem generalem, quæ mihi est, ob nimiam ejus prolixitatem, atque ut in hâc sectione adhuc feci, vasa ceu infinite ampla & quidem ad majorem concinnitatem prismatica ponam. Incipiam autem à vase bifido.

§. 21. Repræsentatur hujusmodi vas bifidum (Fig. 42.) cujus pars A M aquis plena, altera B N saltem usque ad H L repleta ponitur, cum jam fluxus per utrumque orificium M & N incipit: affundanturque aquæ in A B, ut vas constanter plenum servetur, sic autem fiet, ut aquæ in B N assurgant (aut etiam descendant pro rerum circumstantiis) quod cum ita sit, quæremus velocitatem superficiei aqueæ, cum perveniet in situm *h l*. Fig. 42.

Hunc in finem exprimemus amplitudinem orificii M per m, orificii N per n & amplitudinem $h\,l$ (quæ quidem ubique eadem ponitur) per g. Deinde ponemus B M $= a$, H M $= b$, B $h = x$, atque proinde h M $= a - x$. Sic vero patet ex positione infinitæ veluti vasorum A M & B N amplitudinis,

cum ſuperficies aquæ variabilis eſt in bl, fore altitudinem debitam velocitati aquæ per M transfluentis $= Bb = x$, velocitatemque ipſam $= \sqrt{x}$, ſimilemque altitudinem ratione orificii $N = bM = a - x$, atque velocitatem aquæ per N transfluentis $= \sqrt{a - x}$; eſt igitur quantitas dato tempuſculo per M in vas B N influentis ad quantitatem eodem tempuſculo ex vaſe effluentis ut $m\sqrt{x}$ ad $n\sqrt{a - x}$, harumque quantitatum differentia diviſa per amplitudinem g dat velocitatem ſuperficiei bl, quæ proinde velocitas, quam vocabimus v, exprimetur hâc æquatione,

$$v = \frac{m\sqrt{x} - n\sqrt{a - x}}{g}$$

§. 22. Ut jam innoteſcat tempus, quo ſuperficies fluidi ex H L venit in bl, vocabimus illud tempus t: quia autem eſt $dt = \frac{dx}{v}$, erit, poſito pro v valore modo invento,

$$dt = \frac{-g\,dx}{m\sqrt{x} - n\sqrt{a - x}}$$

Poteſt quidem hæc formula immediate rationalis fieri ponendo $x = \frac{4aqq}{(1+qq)^2}$, atque deinde debito modo conſtrui: Iſta vero methodus paullo prolixior eſt hâc altera, qua quantitas reducenda dividitur in duo membra ſeorſim integranda, nempe præmiſſa æquatio non differt ab hâc:

$$dt = \frac{mg\,dx\sqrt{x}}{nna - (mm+nn)x} + \frac{ng\,dx\sqrt{a-x}}{nna - (mm+nn)x}:$$

Et autem $\int \frac{mg\,dx\sqrt{x}}{nna - (mm+nn)x} = -\frac{2mg}{mm+nn}\sqrt{x} + \frac{mng\sqrt{a}}{(mm+nn)\sqrt{(mm+nn)}} \times$ $\log. \frac{n\sqrt{a} + \sqrt{mm+nn}\sqrt{x}}{n\sqrt{a} - \sqrt{mm+nn}\sqrt{x}}$; alteriusque membri integrale

nempe $\int \frac{ng\,dx\sqrt{a-x}}{nna - (mm+nn)x}$ fit $= \frac{-2ng}{mm+nn}\sqrt{(a-x)} +$ $\frac{mng\sqrt{a}}{(mm+nn)\times\sqrt{(mm+nn)}} \log. \frac{m\sqrt{a} + \sqrt{mm+nn}\times\sqrt{a-x}}{m\sqrt{a} - \sqrt{mm+nn}\times\sqrt{a-x}}$;

Patet exinde addita debita conſtante fore

$$t = \frac{2mg\sqrt{a-b} - 2mg\sqrt{x} + 2ng\sqrt{b} - 2ng\sqrt{a-x}}{mm+nn} +$$
$$\frac{mng\sqrt{a}}{(mm+nn)\times\sqrt{(mm+nn)}} \times$$

log.

$$\log. \frac{mna+(mm+nn)\times\sqrt{(ax-xx)}+m\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{ax}+n\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{(aa-ax)}}{mna+(mm+nn)\times\sqrt{(ax-xx)}-m\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{ax}-n\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{(aa-ax)}}$$

$$-\frac{mng\sqrt{a}}{(mm+nn)\times\sqrt{(mm+nn)}}\times$$

$$\log. \frac{mna+(mm+nn)\times\sqrt{(ab-bb)}+m\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{(aa-ab)}+n\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{ab}}{mna+(mm+nn)\times\sqrt{(ab-bb)}-m\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{(aa-ab)}-n\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{ab}}.$$

§. 23. Ex paragrapho 19. liquet superficiem bl in situ suo permanere cum est B b ($=x$) $=\frac{nna}{mm+nn}$. At vero si in æquatione integrata præcedentis paragraphi ponitur $x=\frac{nna}{mm+nn}$, fit denominator in quantitate logarithmicali $=o$, ipsaque proinde quantitas infinita : tempus igitur totius motus infinities majus est, quam cujuscunque partis.

Sed ut alium insuper casum determinemus, videbimus quanto tempore superficies aquæ ex infimo situ M N (posito nempe $b=o$) ascendat quantitate $\frac{1}{2}a$, posito $m:n=4:3$. fit autem

$$t=\frac{8g\sqrt{a}-14g\sqrt{\frac{1}{2}a}}{25}+\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log.\left(\frac{49+35\sqrt{2}}{49-35\sqrt{2}}\right)-\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log.-4, \text{ seu}$$

$$t=\frac{8g\sqrt{a}-7g\sqrt{2a}}{25}+\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log.\left(\frac{49+35\sqrt{2}}{140\sqrt{2}-196}\right),$$

id est, proxime $t=\frac{15g}{100}\times 2\sqrt{a}$, quod indicat, esse tempus istud ad tempus quo grave libere cadit per altitudinem B M proxime ut $15g$ ad 100: Pariter tempus descensus invenitur, si ab initio superficies bl fuerit ultra situm æquilibrii posita. Fuerit v. gr. utrumque vas aquis totum repletum, orificia autem M & N rationem nunc habeant quæ est inter 3 & 4, sitque tempus determinandum, quo superficies ex B descendat per dimidiam B M: hypotheses hæ faciunt $m=3$; $n=4$; $b=a$, atque $x=\frac{1}{2}a$, ita vero fit

$t=\frac{8g\sqrt{a}-7g\sqrt{2a}}{25}+\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log.\left(\frac{49+35\sqrt{2}}{49-35\sqrt{2}}\right)-\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log.-4.$ Ex quo apparet in utroque exemplo idem esse tempus.

§. 24. Priusquam descendamus ad vasa multifida indagasse conveniet, quænam aquæ quantitas per utrumque orificium M & N fluat, dum superficies aquæ ex situ H L venit in hl. Et primo quidem, quod ad orificium M

pertinet, perſpicuum eſt quantitatem aquæ dato tempuſculo (dt) per illud transfluentem proportionalem eſſe velocitati ($\sqrt{x}$) ductæ in magnitudinem orificii (m) ipſumque tempuſculum dt, ita ut hæc quantitas ſit

$$\left(\text{ob } dt = \frac{-g\,dx}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}} \text{ per §. 22.}\right) = \frac{-mg\,dx\sqrt{x}}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}},$$

atque proinde omnis quantitas quæ ab initio effluxerit

$$= -\int\frac{mg\,dx\sqrt{x}}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}}. \text{ Eſt autem } -\int\frac{mg\,dx\sqrt{x}}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}} =$$

$$\frac{mnga}{(m+n)^2}\,\log.\left(\frac{ma-mb-nb}{mx+nx-na}\right) + \frac{mg}{m+n}\times(a-b-x).$$

Eodem modo eruitur quantitas aquæ interea per orificium N effluentis (quæ ſcilicet eſt $= -\int\frac{ng\,dx\sqrt{a-x}}{m\sqrt{x}-n\sqrt{a-x}}$) $=$

$$\frac{mnga}{(m+n)^2}\,\log.\left(\frac{ma-mb-nb}{mx+nx-na}\right) - \frac{ng}{m+n}\times(a-b-x).$$

Atque inde etiam innoteſcit quantitas aquæ, quæ in AB affunditur, neque enim differt ab illa, quæ per M transfluit: aqua denique in vaſe BN collecta exprimitur per $g\,(a-b-x,)$ & cum differentia ſumitur aquarum per M & N transfluentium, oritur eadem iſta quantitas $g\,(a-b-x)$.

§. 25. Prouti §. 21. velocitatem ſuperficiei locum continue mutantis determinavimus pro vaſe bifido, ita nunc in vaſis multifidis velocitates ſingularum ſuperficierum definiemus. Fuerit nempe altitudo ſuperficiei ſupremæ ſupra proximam $= x$, altitudo hujus ſupra ſequentem $= y$, deinde $= z$, rurſuſque altitudo proxima $= s$, & ſic porro. Amplitudines vero orificiorum deſignentur per m, n, p, q. &c. amplitudines vaſis ſecundi, tertii, quarti &c. ſint M, N, P. &c. Sic patet fore velocitatem ſuperficiei ſecundæ $= \frac{m\sqrt{x}-n\sqrt{y}}{M}$; veloc. ſuperf. tert. $= \frac{n\sqrt{y}-p\sqrt{z}}{N}$; velocit. ſuperfic. quartæ $= \frac{p\sqrt{z}-q\sqrt{s}}{P}$ &c.

Porro cum ſpatiola iiſdem tempuſculis à ſuperficiebus percurſa ſint ut velocitates, apparet ſic ſingulis momentis determinari ſitus iſtarum ſuperficierum, quamvis æquationes ſint intractabiles fere. Id ex ſe patet, ſi vel unica

ca ſuperficies extra ſitum æquilibrii, ſupra §. 19. definiti poſita fuerit, fore ut omnes reliquæ motibus reciprocis agitentur, donec poſt tempus infinitum in priſtinum ſitum redierint ſimul.

§. 26. Sit porro vas ita formatum, ut oſtendit Fig. 43. diviſum ſcilicet in duas partes ABEG & LQNE inter ſe, mediante foramine M communicantes; ſintque præterea foramina H & N per quæ aquæ exiliant, dum in AB totidem affunduntur. Sint autem amplitudines in utroque vaſe veluti infinite amplæ ratione foraminum M, H & N; Hiſque poſitis propoſitum ſit velocitates invenire, quibus aquæ tam per H, quam per N ejiciantur ſeu altitudines iſtis velocitatibus debitas. Erunt autem velocitates invariabiles, quia vas aquis plenum conſervatur, ſimulque vaſis amplitudines reſpectu foraminum infinitæ cenſentur. Fig. 43.

Solutio iſtius problematis ex præcedentibus facile colligetur, ſi modo concipiatur foramen M in duas diviſum partes o & p, quarum altera o aquas foramini H, altera p foramini N mittat: partes autem o & p (quia per utramque eadem fluunt velocitate aquæ) eam habebunt rationem, quam inter ſe habent quantitates aquarum eodem tempore per H & N effluentium, id eſt, rationem compoſitam ex ratione amplitudinis H ad amplitudinem N & velocitatis in H ad velocitatem in N. Quibus præmonitis perſpicuum eſt, ſi amplitudines foraminum M, H & N indicentur per α, β, γ, altitudines autem velocitatibus in H & N debitæ deſignentur per x & y, ipſæque proinde velocitates per $\sqrt{x}$ & $\sqrt{y}$ fore amplitudinem $o = \frac{\beta\sqrt{x}}{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}\,\alpha$ & amplitudinem $p = \frac{\gamma\sqrt{y}}{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}\,\alpha$.

Ponatur nunc altitudo ſuperficiei AB ſupra orificium H $= a$, & habebitur x, ut demonſtratum fuit §. 4. ſi quadratum foraminis o dividatur per ſummam quadratorum foraminum o & H & quod oritur multiplicetur per a; ſic igitur fit $x = \frac{\alpha\alpha a x}{\alpha\alpha x + (\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y})^2}$, ex quo oritur hæc æquatio

$$(A)\quad \alpha\alpha x + (\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y})^2 = \alpha\alpha a.$$

Eodem modo ratione foraminum p & N, poſita altitudine AB ſupra N $= a + b$, obtinetur hæc altera æquatio:

$$(B)\ \alpha\alpha y + (\beta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y})^2 = \alpha\alpha \times (a+b).$$

Subtractâ æquatione (B) ab æquatione (A) prodit $y = x + b$, ex quo ſequitur, ſi venæ ambæ verticaliter ſurſum dirigantur, utramque ad eundem locum aſſilire. Deinde ſi in æquatione (A) ſubſtituatur pro y valor ejus $x + b$, erit

$$(C)\ \alpha\alpha x + (\beta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{x+b})^2 = \alpha\alpha a,$$

unde deducitur valor ipſius x æquatione quadrata.

§. 27. Ex præcedentis paragraphi æquationibus ſequentes fluunt affectiones.

I. Quia velocitas aquæ per M transfluentis eſt $= \frac{\beta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y}}{\alpha}$, erit altitudo generans hanc velocitatem $= \left(\frac{\beta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y}}{\alpha}\right)^2$; ſed ſi addantur æquationes (A) & (B) fit:

$$\left(\frac{\beta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y}}{\alpha}\right)^2 = \frac{2a + b - x - y}{2} = \text{ob}\,(y = x + b)\ a - x.$$

II. Si foramen H ſit valde exiguum ratione foraminum M & N, id eſt, ſi β poſſit cenſeri nulla ratione α & γ, abit æquatio (C) in hanc

$$\alpha\alpha x + \gamma\gamma x + \gamma\gamma b = \alpha\alpha a, \text{ ſeu}$$

$$x = \frac{\alpha\alpha a - \gamma\gamma b}{\alpha\alpha + \gamma\gamma};$$

Id vero egregie convenit cum paragrapho decimo nono, cum manifeſtum ſit aquam per foramen valde exiguum ad eandem altitudinem aſſilire, quam haberet aqua, ſi hæc laminam LQ tantum deorſum premat, quantum ab aqua interna ſurſum premitur; Iſta vero præfata altitudo vi paragraphi 19. eſt $\frac{\alpha\alpha a - \gamma\gamma b}{\alpha\alpha + \gamma\gamma}$; Eſt porro in iſta hypotheſi altitudo velocitatis aquarum in N ſeu

$$x + b = \frac{\alpha\alpha a + \alpha\alpha b}{\alpha\alpha + \gamma\gamma}$$

& denique altitudo velocitatis aquarum in M, ſeu

$$a - x = \frac{\gamma\gamma a + \gamma\gamma b}{\alpha\alpha + \gamma\gamma};$$

quæ poſteriores æquationes in iſto caſu particulari pariter ex §. 19. immediatè colligi aut prævideri potuiſſent.

III.

III. Si vero nunc alterum foramen N admodum exiguum præ ambobus reliquis ponatur, erit facto $\gamma = 0$

$$x = \frac{\alpha\alpha a}{\alpha\alpha + \beta\beta}; \text{ deinde}$$

$$x + b = \frac{\alpha\alpha a + \alpha\alpha b + \beta\beta b}{\alpha\alpha + \beta\beta}, \text{ \&}$$

$$a - x = \frac{\beta\beta a}{\alpha\alpha + \beta\beta}.$$

IV. Si $\gamma\gamma b = \alpha\alpha a$, fit $x = 0$. Nullam igitur in hoc casu pressionem sustinent partes laminæ L Q: imo inferiora versus premitur, si γ sit majus quam $\frac{\alpha\alpha a}{b}$, & lamina nullibi sit perforata.

Ista vero omnia similiter ex §. 19. facile colliguntur.

V. Ita quoque ope ejusdem paragraphi sine calculo novo prævideri potuisset, quid fieri debeat, cum positis foraminibus H & N in eadem altitudine summa foraminum eorum, ceu unicum amplitudinis $\beta + \gamma$ considerari potest: Indicant nempe tam §. 19. quam §. 26. esse

$$x = \frac{\alpha\alpha a}{\alpha\alpha + (\beta + \gamma)^2},$$

VI. Notari etiam potest, cum valor ipsius x fit imaginarius, id provenire ex eo, quod aquæ non solum non effluant, in aliquibus casibus per H, sed quod superficies L Q etiam descendat; unde fieri potest, ut infra orificium M descendat, quo ipso cessat aquarum contiguitas contra hypothesin propositionis. Si autem valor x est realis, tum dupliciter exprimitur, sed alter valor inutilis est reputandus; sic igitur cavendum ne præpostera radix ceu utilis assumatur.

VII. Denique ut casum specialissimum attingamus, ponemus omnia foramina inter se æqualia, & prodibit $5xx + (2b - 6a)x = -aa + 2ab - bb$, seu $x = \frac{3a - b - 2\sqrt{(aa + ab - bb)}}{5}$; atque si fuerit præterea $a = 3b$, erit $x =$ (proxime) $\frac{4}{15}b$, deinde altitudo velocitatis in foramine N seu $x + b = \frac{19}{15}b$ atque altitudo velocitati in M debita seu $a - x = \frac{41}{15}b$. Sunt itaque velocitates seu etiam, quia foramina æqualia sunt, quantitates aqua-

aquarum iisdem temporibus per foramina M, H & N transfluentium proxime ut $\sqrt{41.2}$ & $\sqrt{19}$.

§. 28. Ex his omnibus patet methodus determinandi motum in fluidis tum etiam, cum quantitas *virium vivarum* non conservatur; & simili modo semper absolvetur computus, quoties ex natura subjectæ quæstionis præsumi potest (uti in quæstionibus hujus sectionis accurate potuit) quantum *vis vivæ* singulis momentis inutilis ad motum determinandum evanescat. Neque enim soli sunt casus, quos adhuc examinavimus: lubet itaque alium addere, qui oscillationes fluidorum spectat, ut innotescat quantum inde decrementum excursiones fluidi capiant.

Fig. 44. Sint duo tubi amplitudine æquales & cylindrici AL & BH (Fig. 44.) verticaliter inserti vasi amplissimo horizontali A B O P. Sit vas istud totum aqua repletum: tubi autem aquam habeant usque in C & F; deinde sublato æquilibrio hæreat altera superficies in G altera in E; moxque aqua sibi relicta moveri incipiat. His positis tantum deberet superficies G descendere infra locum C, alteraque superficies E ascendere supra F, quanta est altitudo G C seu E F si omnis *vis viva* conservaretur (ab impedimentis frictionum aliisque similibus nunc animum abstrahimus): Verum patet, *vim vivam* omnis aquæ per A in vas horizontale fluentis absumi sine alio effectu ab aqua ibidem stagnante, indeque sequitur descensum superficiei G alteriusque ascensum minorem fore, quam modo dictum fuit: id igitur decrementum nunc explorabimus.

Ponatur ad hunc finem superficiem ex G pervenisse in M, ponaturque $GM = x$, $GC = b$, $CA = a$: erit $BE = a - b$, $EN = x$; $MC = FN = b - x$; Deinde fiat altitudo debita velocitati superficiei in $M = v$, in situ proximo $m = v + dv$; eritque incrementum *vis vivæ* aquæ (dum superficies percurrunt elementa Mm, Nn, seu dx) $= 2adv$, cui addenda est *vis viva* guttulæ, quæ ab aqua vasis horizontalis absumitur, nempe vdx, & erit summa $2adv + vdx$ æqualis *descensui actuali* aquæ multiplicato per massam aquæ, quod productum est æquale *descensui actuali* guttulæ dx, multiplicato per $2b - 2x$. Est igitur

$$2adv + vdx = 2bdx - 2xdx.$$

Hæc vero æquatio recte integrata abit in hanc

$v =$

$$v = 4a + 2b - 2x - c^{\frac{-x}{2a}} \times (2b + 4a)$$

unde si ponatur $4a + 2b - 2x - c^{\frac{-x}{2a}} \times (2b + 4a) = 0$, dabit valor ipsius x totam excursionem, à qua si auferatur b, residuum indicabit descensum infra punctum æquilibrii C.

§. 29. Ut vero exemplo quodam appareat, quantum hâc ratione oscillationes diminuantur, ponemus $a = b$, facta scilicet CA = GC & BE = o. Ita oritur

$$3a - x = c^{\frac{-x}{2a}} \times (3a) \text{ sive}$$

$$c^{\frac{x}{2a}} = \frac{3a}{3a - x} \text{ vel } x = 2a \log. \frac{3a}{3a - x},$$

cui æquationi prope admodum satisfacit valor $x = \frac{3}{4}a$. Est igitur decrementum excursionis seu $a - b$ = quartæ parti elevationis fluidi supra punctum medium: si majus observetur experimento, reliquum adhæsioni aquæ ad latera tuborum tribuendum erit.

§. 30. Neque ista diminutarum excursionum ratio plane, ut suspicor, auferetur, si vel æqualis fiat amplitudinis tubus horizontalis cum verticalibus, ob mutatam fluidi directionem in punctis A & B.

Cæterum infiniti alii fingi possent casus iisdem principiis solvendi, veluti si natura oscillationum indaganda sit in vase Fig. 44. cum id in parte horizontali diaphragmate in duas dispescitur partes solo lumine, quod diaphragma habeat, inter se communicantes & hujusmodi alii. Puto autem hæc jam sufficere, ut quisque sibi facile regulas generales pro istiusmodi quæstionibus solvendis formare possit.

EXPERIMENTA

Ad sectionem octavam pertinentia.

Experimentum I.

PAragraphum quartum, quo dicitur altitudinem velocitati aquæ per orificium D effluentis (Fig. 37.) esse $\frac{mmx}{nn + mm}$ eo confirmavi modo, ut

utrumque orificium G & D limbum haberet inſtar Zonulæ paullulum elevatum, ne contractioni venarum locus eſſet, tutumque fieri poſſet judicium à quantitate aquæ dato tempore effluentis ad velocitates. Deinde ſumtis accuratè menſuris, obſervatoque tempore quo ſuperficies per datum ſpatium A P deſcenderet, vidi tempus iſtud recte reſpondere velocitatibus dicto paragrapho definitis: obſervavi etiam nihilo mutari motum ab elevatione aut depreſſione diaphragmatis. Reliqua ad experimentum pertinentia memoria exciderunt, neque ea in chartam conjeci: ſuperfluum autem duxi experimentum repetere, quod unicuique facile erit imitari: fundamentum autem id eſt reliquis, quæ adeoque ulteriori diſquiſitione experimentali vix opus habent: volui tamen ſequentia præterea tentare.

Experimentum 2.

Vaſe uſus ſum, quale fere adhibuit Mariottus (*vid.* fig. 38.) rurſusque confirmavi æquationem noſtram hunc in modum: feci ut aquæ per orificium D horizontaliter effluerent, tuncque menſuras cepi altitudinis orificii D ſupra pavimentum & diſtantiam loci, ubi vena in pavimentum incidebat à puncto in eodem pavimento, cui orificium D verticaliter imminebat; Inde cognovi altitudinem velocitati aquæ in D effluentis debitam: eandem autem hanc altitudinem experimento proxime inveneram, quam theoria hujus ſectionis indicat §. IV. Similia experimenta apponam in fine experimentorum ad ſectionem duodecimam pertinentium, quæ ſimul theoriam noſtram *hydraulico-ſtaticam* confirmabunt.

Denique cum multa ſint in §. §. 26. & 27. quæ ſingulari calculo eruta fuerunt, operæ pretium erit de illis quoque experimenta ſumere, præſertim cum alia ſimul eadem opera ſumi poterunt experimenta, quæ in *ſect.* XII. recenſebuntur, ſi vas, quale Fig. 43. ſiſtit, ad hunc finem fieri curetur.

Cæterum hæc theoria etiam confirmatur experimentis in *Sectione Septima* recenſitis, quæ de oſcillationibus fluidorum in tubos per foramina influentium ſumſi.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ

SECTIO NONA.

De motu fluidorum, quæ non proprio pondere, sed potentia aliena ejiciuntur, ubi præsertim de Machinis Hydraulicis earundemque ultimo qui dari potest perfectionis gradu, & quomodo mechanica tam solidorum quam fluidorum ulterius perfici possit.

§. I.

IN hâc sectione, qua Machinas examinare hydraulicas, usumque earum, quantum fieri potest, perficere potissimum constitui, animum abstrahemus à variationibus motus, quæ originem ducunt à potentia vel inertia fluidi interni, quia ut vidimus motus aquæ internæ tantum non æquabilis est à primo fere fluxus initio, si orificium exile sit, uti est in Machinis hydraulicis plerisque ratione amplitudinum internarum. Res enim foret ridicula in rebus practicis sollicitos esse de mutationibus, quæ primis fluxus momentis fiunt, quasque jam determinavimus in sectione quarta, quod ibi operæ pretium esse poterat ut omnis theoriæ vis inde elucesceret. Igitur durante toto motu, brevitatis gratiâ, ponemus aquam constanter velocitate expelli, quæ se habeat ut radix potentiæ internæ prementis, postquam hæc potentia ad pondus cylindri aquei foramini superincumbentis reducta fuerit: nam quæcunque fuerit ista potentia, considerandum erit pondus cylindri verticalis aquei superficiei aqueæ internæ superincumbentis, atque altitudo istius cylindri dabit altitudinem velocitati aquæ exilientis debitam, si modo nulla adsint obstacula extrinseca, & aqua ex vase amplissimo ejiciatur. Hoc ita intelligendum est, ut si operculum A B pondere P oneratum (Fig. 45.) aquam per orificium F expellat, pondus autem P æquale sit ponderi cylindri aquei H A B I, tunc vena aquea F G altitudinem H I attingere debeat. Fig. 45.

Definitiones.

§. 2. Per *potentiam moventem* deinceps intelligam principium illud agens, quod consistit in pondere, pressione animata aliisve hujuscemodi viribus, uti dicuntur, mortuis.

Productum autem quod oritur à multiplicatione *potentiæ* istius *moventis* per ejusdem velocitatem æque ac tempus durante quo pressionem suam exerit, designabo per *potentiam absolutam.* Vel quia productum ex velocitate & tempore proportionale est simpliciter spatio percurso, licebit etiam *potentiam absolutam* colligere ex *potentia movente* multiplicata per spatium, quod eadem percurrit. Id vero productum ideo voco *potentiam absolutam*, quia ex illo demum æstimandi sunt labores hominum operariorum in elevandis aquis exantlati, quod mox demonstratum dabo in regulis, quæ mihi in hanc rem observatæ fuerunt. Interim visæ mihi fuerunt machinæ hydraulicæ commode se reduci pati ad duo genera, quorum alterum aquas cum impetu ejicit, alterum de loco in locum placide veluti transportat. Utrumque ordine suo pertractabo genus & denique sub finem quædam addam de diversis potentiis moventibus.

(A) *De machinis aquas cum impetu in altum projicientibus.*

Regula I.

§. 3. Labores hominum operariorum, qui machinis hydraulicis pro aquis elevandis apponuntur, æstimandi sunt ex *potentia absoluta*, id est, ex *potentia movente* seu pressione quam exerunt, ex tempore & ex velocitate puncti, cui *potentia movens* applicatur.

Demonstratio.

(α) De *potentia movente* res est perspicua: labores enim cæteris omnibus paribus sunt utique proportionales numero operariorum seu *potentiæ moventi.* (β) Ratione temporis res est non minus manifesta ex omnium circumstantiarum replicatione, quæ ex duplicatione temporis oritur. (γ) Denique quod ad velocitatem attinet res ex eo est deducenda, quod sive *potentiam moventem* duplices, sive ejus velocitatem non diversus oriatur effectus, nem-

nempe duplus ab utraque parte. Finge pondus P descensu suo aquam per orificium F ejicere ad altitudinem F G : deinde manentibus reliquis duplicatum puta orificium F, & vides ad eandem altitudinem F G eodemque tempore duplam aquæ quantitatem ejectum iri ab eadem *potentia movente* P, sed ea duplo celerius descendente. Pariter quantitas aquæ manentibus reliquis duplicabitur, si & orificium F & amplitudinem A B & pondus seu *potent. movent.* P duplices, tunc vero velocitas hujus potentiæ duplicatæ invariata manet. Igitur utroque modo effectus geminatur. Q. E. D.

Scholium.

§. 4. Propositio præcedens non sensu physiologico sed morali est interpretanda: moraliter neque plus neque minus æstimo laborem hominis, qui eadem celeritate conatum duplum exercet, quam ejus qui eodem conatu celeritatem duplicat, quia nempe uterque eundem edit effectum, fieri tamen potest, ut alterius labor, quamvis altero non minus robusti, sensu physiologico sit admodum major. Si quis conatu 20. librarum singulis minutis primis spatium 200. *ped.* faciat, is facile conatum geminabit, difficillime vero velocitatem. Ex hoc consequens est in omni machinarum genere dispiciendum præsertim esse, quomodo debeant esse constitutæ, ut pro eodem tempore minima hominum defatigatione productum ex conatu eorum in velocitatem omnium maximum sit: atque exinde patebit, quænam in ergatis longitudo vectibus sit tribuenda, quantus in rotis seu tympanis calcatoriis radius sit faciendus, quanta remis longitudo sit concilianda, & sic de aliis machinis.

Ratione usus autem tympanorum calcatoriorum, quæ frequentissime adhibentur ut momentum nostræ animadversionis eo magis fiat perspicuum, hoc experimentum intelligatur:

Ponamus in Fig. 46. altitudinem verticalem multorum milliarum, ad quam homo dato tempore ascendere debeat: tempus autem sumemus decem horarum, quia talis laboribus diurnis terminus esse solet, dein fingamus plures vias, A C, A D &c. diverse ad horizontalem B D inclinatas: His positis intelligimus eò celerius viatori progrediendum esse, quo viam selegerit minus inclinatam, ut eodem tempore culmen montis A attingat, & patet viam aliquam fore veluti A C, super quâ minima defatigatione iter absolvet, quando- Fig. 46.

doquidem nemo nec ſuper plano verticali incedere nec dato tempore viam infinitam abſolvere poteſt; Statuamus viam hanc minimæ defatigationis cum horizontali angulum facere A C B 30. *graduum*.

Quod ſi ita ſit, erit tympanum calcatorium ita fabricandum, ut pondus deſiderata velocitate ſuperetur, cum calcator perpetuo triginta *gradibus* à puncto tympani infimo diſtat.

Ex eodem principio etiam inter machinas diverſi generis ſelectus eſt faciendus: ita v. gr. ſi in ergatis vectiarius potentiam exerat, ſeu preſſionem horizontalem, quæ efficiat quartam ſui proprii ponderis partem, hocque niſu ſingulis minutis primis ſpatium 200. *ped.* abſolvat, is fere ut puto eodem defatigabitur modo, ac ſi eadem velocitate tympanum rotatorium ad angulum 30. *grad.* calcet; interim tamen pondus duplum eodem tempore ad eandem altitudinem hoc modo feret calcator, quia cæteris paribus preſſionem duplam exerit.

Regula 2.

§. 5. Exiſtente eadem *potentia abſoluta* dico omnes machinas, quæ nullas patiuntur frictiones & quæ nullos motus ad propoſitum finem inutiles generant, eundem effectum præſtare neque adeo unam alteri præferendam eſſe.

Demonſtratio.

Ex mechanicis conſtat machinam utcunque compoſitam rèduci poſſe ad vectem ſimplicem: igitur omnem machinationem hydraulicam repræſen-
Fig. 47. tare licebit ſimplici antlia vecte inſtructa Fig. 47. ubi nempe embolus ope vectis M N mobilis circa punctum M detruditur, atque ſic aqua per orificium F expellitur. At vero ſi potentia movens P vecti applicata intelligatur in N, videmus ex præcedente propoſitione nihil lucri accedere *potentiæ abſolutæ* ab aucta vel diminuta longitudine vectis M N: & certe quæcunque ſit iſta longitudo fieri poteſt, ut *potentia movens* eadem atque invariata velocitate mota eandem aquæ quantitatem eodem impetu expellat, ſi modo amplitudo antliæ A B rationem habeat conſtantem ad longitudinem vectis M N. Ex quibus perſpicuum eſt, omnes machinas eadem *potentia abſoluta* eundem effectum præſtare, ſi modo à frictionibus motibuſque ad deſtinatum finem inutilibus animus abſtrahatur.

Scholium.

Scholium.

§. 6. Non deſunt qui putent machinam excogitari poſſe, cujus ope minimo labore maxima aquæ quantitas ad quamcunque altitudinem elevari poſſit, animumque excrucient, in anquirendis rotis, vectibus, ponderibus appendendis: ſed operam perdunt, neque audiendi ſunt hujuſmodi promiſſores, cum magni quid ſibi videntur inveniſſe: Optima machina eſt, ſi ſolum ejus effectum reſpiciamus, quæ minimas patitur frictiones, nullosque generat motus inutiles, de quo utroque evitando præcepta trademus infrà.

Regula 3.

§. 7. In antliis, quales Figuris 45. & 47. repræſentantur, in quibus ſuperficies aquæ interna AB in eadem propemodum altitudine eſt cum foramine F, ſunt *potentiæ abſolutæ* pro iiſdem temporibus in triplicata ratione velocitatum aquarum exilientium.

Demonſtratio.

Sunt enim *potentiæ moventes* in duplicata ratione velocitatum, quibus aquæ per foramen F erumpunt & velocitates *potentiarum moventium* ſequuntur ipſam rationem velocitatum aquarum exilientium: Sed pro iiſdem temporibus ſunt *potentiæ abſolutæ* ut potentiæ moventes multiplicatæ per ſuas velocitates, ergo patet propoſitio.

Scholium.

§. 8. Sequitur ex iſta regula, ſi animus ſit aquam per foramen F ad altitudinem F G elevare, magnam *potentiæ abſolutæ* partem ſine fructu perdi, cum aquæ majori impetu erumpunt, quam quæ altitudini F G reſpondeat; fac enim aquas dupla velocitate expelli, requiretur *potentia abſoluta* octupla, neque tamen ratione finis propoſiti effectus plus quam duplus eſt cenſendus, quia nempe eodem tempore dupla aquarum quantitas elevatur: potuiſſetque iſte effectus obtineri *potentia abſoluta* ſubquadrupla exprimendo aquas ſimplici velocitate per foramen duplum; Hoc igitur nomine tres quartæ partes iſtius potentiæ inutiliter impenſæ dicendæ ſunt. Originem hujus detrimenti indicavi §. 5. eaque conſiſtit in motu qui generatur ad propoſitum finem inutili: nem-

pe

pe omnis motus qui aquis residuus est postquam altitudinem G attigerunt in nostro casu superfluus est dicendus.

Regula 4.

Fig. 48. §. 9. Cum aquæ expelluntur per canalem D F (Fig. 48.) habentque in orificio F velocitatem quæ debeatur altitudini verticali G F, est *potentia absoluta* eodem tempore impensa proportionalis velocitati aquæ in F ductæ in altitudinem G supra A B.

Demonstratio.

Est enim potentia movens P proportionalis præfatæ altitudini & velocitas istius potentiæ est ut velocitas aquæ in F.

Scholium.

§. 10. *Potentiæ absolutæ* majori ratione crescunt quam velocitates aquarum effluentium, id est, quam quantitates eodem tempore ejectæ: attamen differentia rationum fere insensibilis est, cum altitudo F G parva admodum est ratione altitudinis canalis F D: Sit ex. gr. F G æqualis $\frac{1}{4}$ F D (negligendo altitudinem B D) mox vero ejiciantur aquæ velocitate dupla, ita, ut nunc sit F D = F G; sic erunt *potentiæ absolutæ* ut $1 \times \frac{5}{4}$ ad 2×2 seu ut 5 ad 16 sic ut ad ejiciendam duplam aquæ quantitatem *potentia absoluta* requiratur plusquam tripla: Si vero F G statuatur prius = $\frac{1}{100}$ F D, & deinde aquæ rursus dupla velocitate exprimi ponantur, erunt nunc *potentiæ absolutæ* ut 1×101 ad 2×204 seu ut 101 ad 208, quæ ratio à subdupla parum deficit. Sequitur inde, quo minori velocitate aquæ hauriantur, eo majori cum fructu *potentiam absolutam* impendi, & tunc demum eam propemodum omnem utiliter impendi, cum fere insensibili velocitate aquæ per orificium F effluunt: poterit autem magnitudo orificii compensare velocitatis exiguitatem, ut dato tempore notabilis aquarum quantitas hauriri possit. Dispendium *potentiæ absolutæ* sic definietur.

Regula 5.

§. 11. Constitutum fuerit [ope antliæ A B D F, valvula in fundo instructæ & aquæ impositæ, aquas ex loco humiliori A D in altiorem F transfundere, fueritque velocitas media aquæ in F effluentis debita altitudini] F G, erit

erit dispendium *potentiæ absolutæ* ad integram hanc potentiam ut F G ad altitudinem G supra A B.

Demonstratio.

Fingamus augeri admodum orificium F diminuta in eadem ratione velocitate aquarum effluentium in F; sic non mutabitur quantitas aquæ dato tempore effluentis, si velocitas *potentiæ moventis* eadem sit, atque proinde idem erit effectus. Sed si velocitas ita diminuatur, ut altitudo ipsi debita sit insensibilis, exprimetur *potentia movens* per altitudinem F supra A B, cum antea *potentia movens* erat æqualis altitudini G supra A B; & cum in utroque casu eadem sit velocitas *potentiæ moventis*, erunt *potentiæ absolutæ* pro iisdem temporibus ut altitudo G ad altitudinem F supra communem A B. Igitur differentia altitudinum G & F exprimet dispendium, cum integra altitudo G supra A B repræsentat totam *potentiam absolutam.*

§. 12. Idem ratiocinium valet pro omni machinationum genere: Quoties nempe aquæ in locum, ad quem elevandæ sunt, evectæ notabilem habent velocitatem, magnum fit *potentiæ absolutæ* dispendium: posita enim altitudine elevationis $=$ A; altitudine debita velocitati aquarum in loco quo effunduntur $=$ B, integra potentia absoluta $=$ P, perdetur $\frac{B}{A+B} \times P$.

Notari etiam potest, cum aquæ trans altitudinem aliquam, cujus culmen in F positum sit, fundi debent ope antliæ tubo instructæ, continuandum esse tubum D F inferiora versus quantum id liceat, nec abrumpendum in F, prouti id apparet ex Fig. 49. Nam si v. gr. punctum F duplo altius positum sit, quam extremitas tubi G, duplo major *potentia absoluta* requiritur pro transfundendis aquis per canalem abruptum in F, quam per continuatum usque in G; si parvula utrobique velocitate effluant, cujus nempe altitudo genitrix parva sit ratione altitudinum F D vel G D. Fig. 49.

Regula 6.

§. 13. Cum in antliis quas hucusque consideravimus opercula A B seu potius emboli non bene lateribus machinarum respondent, hiatus relinquitur, & ab hoc aliud dispendii genus in potentiis absolutis oritur, quod in antliis, in quibus altitudo orificii suprà embolum negligi potest,

ſic determinatur. Ut aggregatum ex foramine effluxus & prædicto hiatu, ad eundem hiatum, ita *potentia abſoluta*, quæ impenditur, ad partem illius quæ inutilis eſt, ſeu ad ejusdem diſpendium.

Demonſtratio.

Nam aquæ per foramen & hiatum æqualiter premuntur, & æquali velocitate fluunt; perditur autem omnis *potentia abſoluta*, quæ aquas per hiatum cogit, & hæc ſe habet ad integram *potentiam abſolutam*, ut hiatus ad ſummam foraminis & hiatus.

Scholium.

§. 14. Convenit utique embolis uti bene formatis & politis; neceſſe quoque eſt ut cavitas antliæ ſit plane cylindrica, ejusdemque latera pariter perpolita. Vix autem crediderim, niſi id fiat alio fine, è re eſſe, ut emboli cavitates ultima accuratione expleant, quia fortaſſe ſic majus oritur virium diſpendium à frictionibus, quam ſi circumcirca parvulus relictus fuiſſet hiatus: Si enim hiatus ille centeſimam v. gr. partem foraminis effluxus efficiat, vix amplius locus erit frictionibus & non niſi centeſima præterpropter *potentiæ abſolutæ* pars inde perditur, & fortaſſe à frictione emboli cavitatem antliæ exacte occupantis majus diſpendium oritur. Igitur hoc reſpectu non eſt quod nimis ſollicite evitemus tranſitum aquæ per hiatum ab embolo relictum. Non reſpicit autem hæc animadverſio illas machinas, in quibus emboli retractione aquæ in antliam attrahendæ ſunt. Hic enim juſta & plena emboli magnitudo omnino eſt neceſſaria.

Regula 7.

§. 15. In machinis quæ plura habent foramina aquas transmittentia ex una cavitate in alteram, aliquid de *potentia abſoluta* perditur, cujus rei rationem in præcedente ſectione eſſe diximus, quod ſingularum guttularum ex una cavitate in alteram per foramen commune fluentium *aſcenſus potentialis* perit.

Quo plura ſunt & quo minora hujusmodi foramina, eo majus oritur *potentiæ abſolutæ* diſpendium, quod magni momenti eſſe ſolet, idque fortaſſe præter communem opinionem, in machinis, quas Vitruvius ab inventore vocat,

vocat, Cteſibianis. Loquor autem de foraminibus ita diſpoſitis, ut omnis aqua effluxura per illa tranſire debeat. Iſtud jam detrimenti genus tali definietur calculo.

Sit amplitudo foraminis ultimi aquas in aërem emittentis $= n$, amplitudines autem reliquorum foraminum, per quæ aquæ trajiciuntur intra machinam, deſignentur litteris α, β, γ, &c. & erit, poſita utrobique eadem *potentia movente*, altitudo debita velocitati aquæ effluentis ad ſimilem altitudinem nullis obſtantibus foraminibus internis, ut

1 ad $1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} +$ &c. (per §. 11. *ſect.* 8.) ſequitur inde factis iſtis altitudinibus inter ſe æqualibus, fore *potentias moventes* ut

$1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} +$ &c. ad 1, & quia utrobique velocitates potentiarum moventium eædem ſunt, ſimilem quoque pro iisdem temporibus rationem habebunt *potentiæ abſolutæ*. Superflua igitur eſt pars ejus $\frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} +$ &c. unde diſpendium *potentiæ abſolutæ* erit ad totam hanc potentiam ut

$$\frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \text{\&c. ad } 1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \text{\&c.}$$

Scholium.

§. 16. Quoties idea machinæ foramina poſtulat, per quæ aquæ ex uno modiolo in alium transfluant (quod fit in omni antliarum genere; veluti aſpirantium, *aſpirantes* gallice aut prementium, *foulantes* &c.) ſunt illa foramina quantum id reliquæ circumſtantiæ permittunt, ampliſſima facienda, ita ut amplitudo orificii effluxus parva admodum ſit reſpectu illorum foraminum internorum: Ut vero uſus regulæ clarius pateat, exempla conſiderabimus machinarum aliarum non minus uſitatarum.

Exemplum I.

Propoſita ſit machina (quam repræſentat Figura 50.) in qua emboli C & F alternatim deprimuntur, atque per diabetas A B, D E aquæ in modiolum B E H intruduntur, ut ſic jactus fiat continuus per orificium H. Cum hic emboli alternatim agant, alterutrum conſiderabimus quaſi ſolum ſed continue agentem; ita vero conſiderandum eſt foramen effluxus H, amplitudi- Fig. 50.

nis n, & alterutrum foraminum o, p, quibus ſingulis ſit amplitudo α; ita erit diſpendium *potentiæ abſolutæ* $= \frac{nn}{\alpha\alpha}$, poſita potentiâ integra $= 1 + \frac{nn}{\alpha\alpha}$, quæ quantitates ſunt ut nn ad $nn + \alpha\alpha$. Conſiderabile certe eſt hoc diſpendium, ſi iconibus harum machinarum fidere licet, in quibus ſæpe orificia o & p minora ſunt orificio effluxus H, quod ſi foret plus quam dimidium perderetur *potentiæ abſolutæ*. Erunt autem canales AB & DE per totum tractum, quantum id licet, amplificandi, ut machina parum de ſuâ præſtantia perdat.

Ceterum fuit hæc machina excogitata, ut jactus fieret continuus per H. Quia tamen fieri non poteſt, quin aliquod temporis intervallum intercedat inter ultimum emboli elevationis punctum, inſtantisque ejusdem depreſſionis initium, non poterit jactus omnino eſſe continuus & æquabilis. Huic vero incommodo optimum remedium attulit auctor machinæ illius, cujus mentionem facit D. Perrault in *Comment. ad Vitruvium pag.* 318. *edit.* 2. *Paris.* quamque in Bibliotheca Regia Paris. aſſervari dicit; inſerviet nobis hæc machina alterius exempli loco: figuram autem deſumam una cùm ejusdem deſcriptione ex ipſo Perraultio.

Exemplum 2.

„ Machina eſt referente præfato Perraultio, in quâ aqua expellitur ex
Fig. 51. „ modiolo A (Fig. 51.) mediante embolo B in catinum FG, ex quo aër,
„ ſi modo aliquid aquæ jam adſit, egredi non valet; quia tubus EF us-
„ que ad fundum fere deſcendit: ſic enim fit, ut aqua propulſa ex modio-
„ lo A per diabeten D, imumque catini occupans claudat orificium tubæ in
„ F, aërique tranſitum neget. Igitur cum embolus novas intrudit aquas
„ in mediolum, partim aëre partim aqua, repletum, hæ aquæ de novo af-
„ fuſæ vim exerunt in utrumque fluidum, & cum aqua non poſſit exilire
„ per tubum F E eadem velocitate qua irruit ex antlia per diabeten D, quia
„ ſcilicet (ſunt verba Perraultii) tubus FE in extremitate ſua E orificio per-
„ forata eſt multo minori, quam eſt orificium tubi D, aqua in catino ac-
„ cumulata aërem comprimit, ab eodemque reciproce preſſa, etiam dum
„ embolus elevatur, per tubam F E exilit. „

Perditur in hâc machina magna *potentiæ abſolutæ* pars à tranſitu aquæ per diabeten D, hocque diſpendium eo majus erit, quo anguſtior eſt iſte tubulus: fiat

fiat igitur amplus aut etiam plures tubi conſtruantur aquas transmittentes: majoris eſt momenti hæc annotatio in præſenti caſu, quod multo majus diſpendium ab anguſtia diabetes D oritur, quam in aliis machinis; fac enim amplitudinem hujus diabetes eandem, quæ eſt orificio E, & pone inſuper æqualibus temporis intervallis embolum deprimi, retrahique non perdetur jam ſolum dimidia *potentiæ abſolutæ* pars, ut aliàs, ſed plane quatuor quintæ partes inutiles fient. Quia vero multa ſunt in hâc machina, quæ ſingularem poſtulant calculum, placet illam ſeorſim perluſtrare.

Digreſſus continens aliquas commentationes in Machinam Hydraulicam quam repræſentat figura 51.

(α) Non poteſt jactus aqueus per E eſſe omnino æquabilis, durante tota emboli agitatione: Dum enim embolus elevatur, novæ aquæ non accedunt, atque ſic diminuitur quantitas aquæ in catino G E contentæ, aërque eidem ſuperincumbens dilatatur ac denique elater ipſius diminuitur: hinc quoque velocitate continue minori aqua erumpit donec rurſus ab embolo intruſo acceleretur.

Verum ſi ponatur ſpatium, quod aër in catino occupat longe majus ſpatio illo ab aqua, quæ durante una emboli elevatione ejicitur, occupato, ceſſat fere tota hæc inæqualitas, poſito embolum uniformiter agitari & diu ante fuiſſe agitatum, quæ poſterior hypothſis ideo neceſſaria eſt, quod primæ agitatione valde differant à ſequentibus. Igitur brevitatis ergo omnibus hiſce hypotheſibus ſatitfaciemus, ideſt, ubique *ſtatum*, qui dicitur, *permanentiæ* ponemus.

(β) Cum igitur primis emboli agitationibus ſenſim augeatur velocitas aquæ per E effluentis, mox fit ut jactus aqueus velocitatem tantum non integram attingat; quo rei ſtatu poſito, patet tantum aquæ depreſſione emboli impelli in catinum, quantum ex eodem tota emboli agitatione ejicitur.

Primis autem agitationibus plus intruditur, quam ejicitur, idque non ideo, ut putavit Dn. Perrault, quod orificium in E altero in G minus ſit (idemque enim ſuccederet ſi vel majus eſſet) ſed quod cauſa efficiens non poſſit ſtatim omnem ſuum exerere effectum in ejiciendis aquis.

(γ) Videbitur fortaſſe rem non ſatis perluſtrantibus fore, ut omnibus in ſtatu permanente jam poſitis, nullisque præſentibus obſtaculis alienis, aqua per foramen E velocitate exiliat, qua aſcendere poſſit ad altitudinem columnæ aqueæ in æquilibrio poſitam cum preſſione emboli: atque ita ſane foret, ſi preſſio emboli ſine interruptione adeſſet, nullusque in aqua *aſcenſus potentialis* perderetur: quia vero in utroque res aliter ſe habet, non poteſt non alia oriri in jactu aqueo velocitatis æſtimatio: Hinc quiſque non obſcure videt animum advertendum eſſe ad temporum rationem, quibus embolus deprimitur, retrahiturque, tum etiam ad rationem amplitudinum in canaliculo D & orificio E.

(δ) Ponamus igitur tempus quo embolus deprimitur $= \theta$; tempus unius integræ agitationis $= t$, amplitudinem orificii E $= \mu$, & diabetes D $= m$: deinde comparata potentia embolum detrudente cum ſuperincumbente columna aquea, faciamus hujus columnæ altitudinem $= a$, altitudinem vero aquæ exilientis velocitati debitam $= x$. His ita ad calculum præparatis licebit duobus indagare modis rationem quæ futura ſit inter velocitates aquarum in orificio E & diabete D, atque hinc valorem incognitæ x elicere. *Primò* enim patet tempore θ (quo ſcilicet embolus detruditur) tantum aquæ fluere per diabeten D, quantum tempore t (quo embolus deprimitur retrahiturque) effluit per E. Eſt igitur velocitas in D ad velocitatem in E ut $\frac{1}{m\theta}$ ad $\frac{1}{\mu t}$: & quum poſterior hæc velocitas ſit $= \sqrt{x}$, erit altera $= \frac{\mu t}{m\theta}\sqrt{x}$. *Secundò* quia velocitas aquæ effluentis debetur preſſioni aëris in catino, ſequitur hanc preſſionem æquivalere ponderi columnæ aqueæ altitudinis x; ſed ſi à preſſione emboli auferas preſſionem aëris, habebis preſſionem, quæ velocitatem aquæ in D generet; hinc quia differentia preſſionum exprimitur per $a - x$, repræſentabitur velocitas aquæ in D per $\sqrt{(a-x)}$; Igitur nunc eſt velocitas aquæ in D ad velocitatem aquæ in orificio E ut $\sqrt{(a-x)}$ ad $\sqrt{x}$. Combinatis rationibus utroque modo inventis, fit

$$\sqrt{(a-x)} : \sqrt{x} = \frac{1}{m\theta} : \frac{1}{\mu t}, \text{ ſive}$$

$$x = \frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a.$$

Pa-

Patet ex ista æquatione altitudinem jactus duplici titulo deficere ab altitudine columnæ prementis a, magis nempe deficit, cum celerius deprimitur, tardiusve elevatur embolus tum etiam cum orificium E ratione canaliculi D amplitudine crescit. Fuerit v. gr. amplitudo istius orificii æqualis amplitudini tubuli D atque pari celeritate embolus deprimatur eleveturque & prodibit $x = \frac{1}{5} a$, sic ut ad quintam partem tantum assurgat vena effluens altitudinis a.

(ε) Dispendium *potentiæ absolutæ* jam hoc modo eruetur, posito prius nullum laborem in elevandum embolum impendi. Sit velocitas quâ embolus deprimitur $= v$, & erit *potentia absoluta* tempore unius agitationis integræ impensa $= a v \theta$ (per paragraphum tertium) quia vero effectus in eo consistit, ut effluxus fiat per E durante tempore t ipsaque aqua ad altitudinem $\frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a$ elevetur, potuisset id antlia simplex figuræ quadragesimæ quintæ efficere, si pro *potentia premente* in illa sumtus fuisset cylindrus aqueus altitudinis $\frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a$, atque hæc potentia durante tempore t velocitate $\frac{\theta}{t} v$ egisset; unde *potentia absoluta* in hâc machina simplici, qua nihil de illa perditur, requisita futura fuisset =

$$\frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a \times \frac{\theta}{t} v \times t = \frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a v \theta.$$

Est igitur tota *potentia absoluta* ad partem ejus inutiliter perditam ut $a v \theta$ ad $a v \theta - \frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a v \theta$ seu ut $mm\theta\theta + \mu\mu tt$ ad $\mu\mu tt$. Igitur si integra *potentia absoluta* designetur per P, erit ejus dispendium $= \frac{\mu\mu tt}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times P$.

Necesse igitur est in hâc præ aliis antliis, ut diabetes amplitudine admodum superet orificium E, vel ut multiplex adsit. Si enim unicus adesset, isque amplitudine orificio E æqualis, simulque uniformi velocitate sursum deorsumque agitari ponatur embolus, dispendium oriretur quatuor quintarum totius partium: atque si vel duplo amplior fiat, etiamnum perdetur dimidium *potentiæ absolutæ*.

(ζ) Denique perspicuum est minorem pressionem sustinere latera catini G E, quam modioli A A, quippe pressiones istæ sint ut x ad a, id est, ut

$mm\theta\theta + \mu\mu tt$ ad $mm\theta\theta$, ex qua ratione artifices judicabunt de firmitate laterum, quæ pro utroque requiritur.

Regula 8.

§. 17. Quando embolus in antliis retrahitur & aqua in modiolum influit, non ſolum proprio pondere ſolicitata ſed maximam partem ab embolo attracta, tunc omnis *potentia abſoluta* in hanc attractionem impenſa caſu ſupervenit, quia antlia, ſub aquis, ut fit, poſita, ſua ſponte impleretur ſi ſufficiens huic impletioni tempus concederetur; nec adeoque attractio illa ita pertinet ad ejiciendas aquas certa cum velocitate, quin tota vitari poſſit, hocque nomine labor in illam impenſus mihi inutilis dicitur.

Quia vero influxus aquarum partim proprio pondere fit, partim etiam elevatione emboli, non poteſt diſpendium *potentiæ abſolutæ* ab effectu æſtimari: Quin potius calculus ita eſt ponendus, ut poſitis potentia embolum in certo ſitu elevante $= \pi$, velocitate emboli $= v$, tempuſculoque quantitatibus π & v reſpondente dt, dicatur omnis *potentia abſoluta* in elevationem emboli impenſa $= \int \pi v dt$ vel $= \int \pi dx$, ſi per dx intelligatur elementum ſpatioli tempuſculo dt percurſi. Sequitur inde, ſi conſtantis magnitudinis ſit, uti fere eſt conatus, quo embolus elevatur, fore *potentiam abſolutam* æqualem *potentiæ moventi* ductæ in ſpatium percurſum: ſimile autem ratiocinium cum valeat etiam pro depreſſione emboli ſimulque tantum elevetur embolus quantum deprimitur, apparet *potentias abſolutas*, quæ in attrahendas expellendaſque alternatim aquas impenduntur, proxime eſſe ut *potentiæ* utrobique *moventes*; unde diſpendium oritur quod eſt $= \frac{\pi}{\pi + p} \times P$, factis ſcilicet potentia elevante $= \pi$, potentia deprimente $= p$ & *potentia abſoluta* in elevationem depreſſionemque emboli impenſa $= P$.

Poteſt aliter diſpendium *potentiæ abſolutæ* proxime æſtimari ex eo, quod omnis *aſcenſus potentialis* aquæ in antliam influentis inutiliter generatus cenſeri debeat. Sed ſi iiſdem temporibus, ſive eadem velocitate embolus ſurſum deorſumque movetur, erit velocitas quâ aquæ admittuntur ad velocitatem quâ ejiciuntur reciproce ut foramina reſpondentia, ipſique *aſcenſus potentiales* utrobique erunt in ratione quadrata inverſa foraminum reſpondentium. Si deinde diver-

diversis temporibus fiant emboli elevatio & depressio, sunt velocitates reciproce ut tempora & *ascensus potentiales* reciproce ut quadrata temporum. Est igitur *ascensus potentialis* aquæ influxu generatus ad *ascensum potent.* qui ab effluxu oritur solusque intenditur, in ratione reciproca quadrata composita ex ratione foraminis influxus ad foramen effluxus & temporis, quo hauriuntur aquæ ad tempus quo expelluntur.

Scholium.

§. 18. Ex utraque æstimandi ratione sequitur lente embolum esse elevandum: ita enim parva fit *potentia movens* ratione primæ methodi aut magnum fit tempus elevationis ratione secundæ, atque sic operarii singulis elevationis emboli intervallis à conatu præcedentis depressionis exantlato reficientur. Posterior porro methodus indicat foramina, per quæ aquæ attrahuntur amplianda & multiplicanda esse; id vero etiam priori conforme est methodo, quia sic sufficiens fere aquæ quantitas sua sponte influit, minorique adeo *potentia movente* opus est.

Regula 9.

§. 19. Denique jactum aqueum verticaliter assurgentem nunquam eam attingere altitudinem observandum est, quæ debeatur aquæ velocitati initiali, id est, si vena fluidi verticaliter assurgere incipiat ab sua origine velocitate tali, quam grave libere cadendo ex altitudine *a* acquirat, non poterit fluidum ascendere ad totam altitudinem *a*, etiamsi aëris resistentiam removeas, aut quicquid excogitare velis, quod casu motum retardare queat. Ipsa enim rei natura defectum aliquem exigit necessario, cujus rei ratio physica hæc est: Nempe quælibet guttula etiamsi ascensum incipiens verticalem, non potest tamen, quin sensim ad latera deflectatur & tandem, cum ad summum pervenit, motu feratur horizontali, qui notabilis esse debet, quia per supremum limbum vel sectionem venæ aqueæ omnis aqua transit, quæ per foramen effluxit: fac igitur unicuique guttulæ eo temporis puncto quo horizontaliter movetur velocitatem inesse, quam grave lapsu libero per altitudinem *b* acquirit: ita vides non posse venam ultra altitudinem *a—b* assurgere: Atque hoc titulo dispendium oritur ratione *potentiæ absolutæ* totius ut *b* ad *a*.

Scholium.

§. 20. Observatum fuit inter aquas communi velocitate ex tubulis di-

verſimode formatis ejectas alias aliis altius aſſurgere: Ergo hic attendendum eſt ad ultimorum tubulorum aquas emittentium (*des ajutages*) conformationem aptiſſimam.

Hâc de re experimenta inſtituit D. Mariotte in *tract. de mot. aquar.*

Scholium Generale.

§. 21. Examinavimus adhuc impedimenta, quæ caſu ſuperveniunt in machinis hydraulicis aquas cum impetu ejicientibus: Præcipua illa eſſe puto, quæ expoſui; poterunt tamen alia inſuper excogitari, ſed, ut credo, minoris admodum momenti. Ubique fere menſuras dedimus omnino geometricas ſimulque modum indicavimus, quo iiſdem impedimentis maximâ ex parte obviam iri poſſit. Qui majoribus intendit, putans poſſe minimo labore ſeu (quod eodem recidere demonſtravi § 3.) minima *potentia abſoluta* quemvis effectum in elevandis aquis deſideratum præſtari, opinione fallitur, atque oleum & operam perdet. Si enim ab impedimentis iſtis expoſitis aliiſve ſimilibus fortaſſe excogitandis animum abſtrahas, machina in rerum natura perfectiſſima erit ſimplex antlia figuræ quadrageſimæ quintæ, atque ſi aquæ ejus ope in altum projectæ colligantur in G, dico fieri non potuiſſe ut minori labore eadem aquarum quantitas ad eandem altitudinem F G elevarentur.

Eſt deinde aliud machinarum genus, quod à machinationibus adhuc pertractatis differt in eo, quod hæ aquas cum impetu ejiciant, illæ placide ſine motu notabili transferant. Sed & in his ultimus perfectionis qui dari poteſt gradus eodem recidit. Sunt autem pleræque multis obſtaculis iiſque maximi momenti obnoxiæ. De his igitur nunc directe nobis erit agendum.

(B) *De machinis hydraulicis aquas ſine notabili impetu ex loco humiliori in altiorem tranſportantibus.*

Regula 10.

§. 22. Si pondus aliquod per datam altitudinem verticalem (*a*) *potentia movente* utcunque variabili ſed directe applicata elevetur nulluſque motus in ſummitate altitudinis propoſitæ corpori ſuperſit, conſtanter erit eadem *potentia abſoluta* in elevationem ponderis impenſa, nempe æqualis producto ex pondere corporis elevati & altitudine elevationis *a*.

De-

Demonſtratio.

Nam ſi pondus, quod vocabo A, aſcenderit per altitudinem y, eoque in loco animari ponatur potentia movente variabili P directe applicata, moverique velocitate v, erit tempuſculum, quo pondus per elementum dy elevatur $= \frac{dy}{v}$, quod ductum in *potentiam moventem* P, ejuſdemque velocitatem v, dat elementum *potentiæ abſolutæ* (per defin. §. 2.) $= P\,dy$, ergo $\int P\,dy$ dabit totam *potentiam abſolutam*, ſi poſt integrationem fiat $y = a$; in omni vero motu incrementum velocitatis dv eſt æquale potentiæ animanti ſeu moventi, quæ hîc eſt $\frac{P-A}{A}$ ductæ in tempuſculum quod nunc eſt $\frac{dy}{v}$; habemus igitur $dv = \left(\frac{P-A}{A}\right) \times \frac{dy}{v}$ vel $A\,v\,dv = P\,dy - A\,dy$, id eſt, $\frac{1}{2} A\,vv = \int P\,dy - Ay$, ſive $\int P\,dy = \frac{1}{2} A\,vv + Ay$, ubi faciendum eſt $y = a$ & $v = 0$ (per hypoth.) ita ut ſit $\int P\,dy = A\,a$.

Quia autem, ut vidimus, $\int P\,dy$ exprimit integram *potentiam abſolutam* in elevandum pondus impenſam, erit eadem hæc potentia conſtanter eadem, nominatimque æqualis producto ex pondere A & altitudine a, ut habet propoſito. Q. E. D.

Corollarium.

§. 23. Ex demonſtratione noſtra apparet, eſſe quoque *potentiam abſolutam* eandem, quoties velocitas in ſummitate eſt eadem, id eſt, quoties altitudo ad quam corpus velocitate ſua reſidua aſcendere poteſt, nempe $\frac{1}{2} vv$ eſt conſtans: atque ſi altitudo iſta dicatur b, erit *potentia abſoluta* $= A(a+b)$. Igitur patet nunc, quanta pars *potentiæ abſolutæ* perdatur, cum animus ſit pondus A ad altitudinem a elevare, idemque in ſummitate velocitatem reſiduam habeat debitam altitudini b; erit nempe diſpendium potentiæ ad integram potentiam ut b ad $b + a$.

Scholium I.

§. 24. Cavendum itaque eſt, ne machinæ ita ſint conſtructæ, ut vehementi motu aquæ ad locum deſtinatum transportentur. Parvum autem eſſe ſolet iſtud diſpendii genus in plerisque machinis.

Scholium 2.

§. 25. Omnia ſimiliter ſe habent ſi corpus non verticaliter, ſed ſuper plano utcunque inclinato, aut etiam curva qualicunque elevetur, ſemper enim tota *potentia abſoluta* erit æqualis $A(a+b)$, id eſt, producto ex pondere in altitudinem elevationis auctam altitudine velocitati corporis in ſummitate reſiduæ debita, cujus rei demonſtratione ſuperſedeo, quod parum differt à præcedente demonſtratione.

Scholium Generale.

§. 26. Quia omnium machinarum utcunque compoſitarum effectus reduci poſſunt ad naturam plani inclinati, perſpicuum eſt omnes machinas, ſi à frictionibus iisque *potentiarum abſolutarum* diſpendiis, quæ hactenus recenſuimus, animum removeamus eodem recidere, quia *potentia abſoluta* ſimpliciter pendet ab altitudine ad quam corpus eſt elevandum ejusdemque pondere. Habet hoc commune *potentia abſoluta* cum *vi viva* ſeu cum *aſcenſu deſcenſuve actuali.* Isque ultimus eſt perfectionis machinarum gradus, quem transgredi non licet, imo nec attingere quidem, ſemper enim remotis omnibus frictionibus diſpendiisque, potuiſſet eadem *potentia abſoluta* majus pondus ad eandem altitudinem elevari. Ut jam comparatio inſtitui poſſit quædam circa machinarum defectum, tam illarum quæ aquas ad deſideratam altitudinem veluti projiciunt, quam quæ easdem transportant, nunc harum poſteriorum defectus maxime notabiles quoque indicabimus.

(I.) Frictiones tanto obſtaculo ſunt in plerisque hujusmodi machinis, ut ſolæ maximam *potentiæ* partem abſorbeant, præſertim autem cum aſſerculi quadrati aut globi ovales, catena in circulum redeunte connexi, per canalem, cui ſunt accommodati, transeuntis aquas elevant.

(II.) Pleræque machinæ, præſertim vero rurſus quas modo indicavimus, roſariorum nomine deſignari ſolitæ ita ſunt comparatæ, ut aqua dum elevatur continue pars ejus deſtillet, ſive plane decidat in locum ex quo hauſta fuit ſive ſaltem ex loco ſuperiori in inferiorem, uti in roſariis; ſi in his globuli aut aſſerculi canali ſunt bene adaptati frictio fit fere inſuperabilis, ſin minus maxima aquæ quantitas per hiatus relictos deſtillat, ex ſupe-

rio-

rioribus divisionibus in inferiores, ita ut minima aquæ pars in illis superfit, cum culmen attigerunt, ejus quantitatis quam in toto itinere receperunt. Videntur itaque vel solo hoc nomine istæ machinæ admodum improbandæ, præsertim vero si aquæ limpidæ sint elevandæ, quæ antliis hauriri possint.

(III.) Solent quoque machinæ ejus esse indolis, ut aquam ultra altitudinem propositam attollant: Perditur autem potentia quæ excessui respondet, atque si aquæ trans molem sunt evehendæ, difficulter id obtinetur, quod indicavi §. 12.

(IV.) Sunt & machinæ, quæ directam potentiæ moventis applicationem non admittunt, ex quâ obliquitate rursus dispendium aliquod oritur.

§. 27. Istaque fere sunt, quæ notabilis momenti mihi visa fuerunt, obstacula; nescio autem an illis in tantum obviam iri possit, quantum de primo machinarum genere demonstravimus: frictionum diminuendarum artificia quædam norunt mechanici: machinas quæ situlis aquas hauriunt atque elevant prætulerim rosariis: situlæ autem ita sint fabricatæ, si modo id fieri possit, ut in situ infimo statim impleantur nihilque emittant priusquam ad situm supremum pervenerint. Cum aqua transfundenda est trans locum altiorem in alium minus altum, opera danda est, ut impetus aquæ labentis promoveat motum tympani seu rotæ in gyrum agendæ, quamvis multum absit ut sic *omnis potentia absoluta* utiliter impendatur, prouti fieri antlia figuræ 49. indicavimus (§. 12.) Principium actionis consistet, si recte judicio, aptissime in calcatura: homines enim isti labori maxime sunt assueti; pertinet huc, quod monui §. 4. occasione regulæ primæ de angulo acclivitatis, sub quo viator dato tempore minima defatigatione certam attingere possit altitudinem verticalem. Crediderim hominem mediocris staturæ, sanum & robustum super via ad 30. gradus acclivi incedentem non dificulter singulis horis 3600. pedes confecturum, atque proinde ad altitudinem verticalem 1800. pedum pondus corporis sui, quod ponam 144. librarum seu duorum pedum cubicorum aquæ, elevaturum. Talis igitur homo poterit ope machinæ calcatura circumagendæ & perfectissimæ (in qua scilicet nihil de *potentia absoluta* perdatur) singulis horis duos pedes cubicos aquæ ad altitudinem verticalem 1800. pedum elevare, seu quod idem est, singulis minutis secundis unum ped. cub. ad alt. unius pedis: machinas quæ multo minoris

ſunt effectus, officium facientibus operariis, parum puto commendabiles: Interim inſtituto experimento in ædibus Ill. D. *General* de Coulon cum antlia, quod in fine ſectionis apponam, effectum haud parum minorem expertus ſum, quo confirmatus ſum in ſententia mea operarios calcatura plurimum præſtare: facile autem prævideo in machinis admodum compoſitis longe minorem effectum prodire, quia in his maxima *potentiæ abſolutæ* pars inutilis impenditur. Notabile iſtius rei nunc afferam exemplum à notiſſima machina Marlyenſi, oſtenſurus quam incredibile fere *potentiæ abſolutæ* diſpendium ab omnibus impedimentis collectis oriatur.

Tractatum edidit Weidlerus de *machinis hydraulicis* in quo plenam deſcriptionem facit machinæ Marlyenſis, atque refert omnes aquas elevari à motu 14 rotarum, quarum alæ ab impetu ſequanæ propellantur: hunc impetum facit pro omnibus rotis æqualem ponderi 1000594 librarum, isque eſt quem nos deſignavimus nomine *potentiæ moventis*. Præterea alas motu ferri ex aliquibus circumſtantiis colligere potui, quo conficiant $3\frac{3}{4}$ pedes ſingulis minutis ſecundis, atque hæc velocitas habenda eſt pro velocitate *potentiæ moventis*; deinde addit ſingulis diebus elevari vi illius machinæ 11700000 libras aquæ ad altit. 500 ped. His ita poſitis videamus nunc in machina ſimpliciſſima fig. 45, qua nihil de *potentia abſoluta* perdi intelligatur, quanta ad iſtam effectum potentia P pariter velocitate ut $3\frac{3}{4}$ mota requiratur. Erit autem altitudo F G = 500 ped. & quoniam tempore 24 horarum ejici debeant per lumen F 11700000 libræ, id eſt, 162500 ped. cub. magnitudo iſtius luminis ponenda erit = 0, 0108 partium pedis unius quadrati: Velocitas aquæ in F tanta eſt, ut abſolvat ſingulis minutis ſecundis 173 ped. Igitur continet velocitatem $3\frac{3}{4}$, quam pondus P habere ponitur, 46 vicibus & toties ſuperare debet amplitudo antliæ A B amplitudinem luminis F: Erit proinde amplitudo A B fingenda 0, 4968, part. ped, quadrat. ex quo conſequens eſt, pondus P æquale futurum ponderi cylindri aquei ſuper baſi A B ad altitudinem 500 ped. conſtructi ſeu ponderi 248, 4 pedum cub. aquæ, id eſt, ponderi 17885 librarum, quæ tantum quinquageſimam ſextam partem efficit *potentiæ moventis* quam eadem velocitate motam applicari oſtendit Weidlerus. Sic igitur in tota machina diſpendium fit quod $\frac{55}{56}$ integræ *potentiæ abſolutæ*. exæquat.

Poſtquam ita naturam machinarum hydraulicarum, quantum illud in ge-

generalibus fieri poteſt, examinavimus, haud abs re erit exemplum aliquod ſpeciale accuratius pertractare, & quia cochlea Archimedis multis gaudet egregiis proprietatibus, quas nemo ſatis, quantum ſcio, aperuit, ab hâc exemplum deſumam idque eo libentius, quod multi ſint, qui contra noſtras regulas putant ſingularem huic cochleæ virtutem ineſſe pro elevanda magna aquæ quantitate brevi tempore parvaque vi: falluntur autem qui ita cogitant: nam ſi obſtaculorum accidentalium nulla habeatur ratio, idem præſtat eadem *potentia abſoluta*, quod reliquæ machinæ omnes.

Commentationes ſpeciales de Cochlea Archimedis.

(I.) Varii ſunt auctores, qui modum docuerunt conſtruendi hanc cochleam: ſumma huc redit, ut canalis quidam aut plures ſuperficiei cylindricæ circumflectantur, & ita quidem ut canalis ubique eandem habeat inclinationem ratione axis cylindri, quam Vitruvius præter neceſſitatem in omnibus cochleis fieri jubet ad angulum ſemirectum. Requiritur ergo ante omnia, ut in ſuperficie cylindri linea ſpiralis ducatur ad cujus normam canalis ſit ponendus, id quod facillime meo judicio in ſuperficie admodum polita fieri poterit (præſertim cum helices non parum à ſe diſtare debent) circumvolvendo eidem aliquoties funiculum: hic enim tenſus ſua ſponte deſideratam lineam faciet, neque enim ſpiralis ſibi ſimilis ubique eſſe poteſt, aut conſtantem habere ad axem cylindri inclinationem, quin arcus inter duo puncta interceptus ſit omnium arcuum eoſdem terminos habentium minimus, quam indolem funiculo extenſo competere palam eſt: ſi vero frictiones impedimento ſint, filum ad minora intervalla extendi poterit. Sed non eſt, cur in re per ſe pluribus modis facillima ſcrupuloſi ſimus.

Lex ſpiralis primaria eſt, ut ubique æqualiter ad axem cylindri inclinet, cui legi ſequens innititur conſtructio, quam in gratiam infra dicendorum apponam:

Finge cylindrum rectum M *a f* N (Fig. 52. (1)) cujus ſuperficiei ſit inſcribenda deſiderata ſpiralis *a* 1 *b* 2 *c* 3 *d* &c. eandemque ſuperficiem puta explicatam in planam figura præditam parallelogrammi rectanguli A *a f* F (Fig. 52. (2)), ſumantur hic ab una parte AB, BC, CD, DE, & EF, ab altera Fig. 52. (1.) Fig. 52. (2.)

tera ab, bc, cd, de, & ef, ſingulæ ſingulis æquales; jungantur lineis rectis puncta B, C, D, E & F cum punctis a, b, c, d, & e: his ita factis, ſi ſuperficies plana rurſus in cylindricam convolvatur, junctis lineis AF & af, coincidentibuſque punctis A & a; B & b &c. fiet ut lineæ aB, bC, cD &c. in ſuperficie cylindrica lineam continuam forment, quæ ipſa erit ſpiralis deſiderata. Ad faciliorem intellectum in utraque figura puncta homologa communibus litteris diſtinxi.

(II.) Propoſitus jam fuerit cylindrus M $a f$ N (Fig. 52. (1)), habens ad ductum ſpiralis modo deſcriptæ circumflexum canalem, cujus diametrum veluti infinite parvum cenſebimus ratione diametri ad cylindrum pertinentis: atque ſic habebitur cochlea Archimedis, quâ ſi uti velimus ad elevandas aquas ex M in N, cylindrus erit horizontem verſus inclinandus, & ita quidem ut angulus a M H (interceptus inter diametrum baſeos M a, quæ eſt in plano verticali, & horizontalem M H) ſit major quam angulus $s a o$, quem faciunt tangentes circuli & ſpiralis in communi puncto a. Deinde converſo cylindro circa axem ſuum in directione $a g h$ M s aquæ influent per inferius canalis circumducti orificium effluentque per ſuperius.

(III) Ut naturam hujus elevationis recte intelligamus, tria ſe nobis offerunt puncta in qualibet ſpiralis helice examinanda, nempe puncta o, p & q, quorum primum o maxime diſtat ab horizonte, alterum p eidem proximum eſt, & q in eadem altitudine poſitum eſt cum puncto o in helice proxime inferiori ſumto: per ſingula puncta o ducta eſt recta $g n$; per puncta p recta $h m$ & per puncta q recta $s t$. Situs vero harum linearum determinabuntur in ſequentibus.

(IV) Sit radius, qui pertinet ad baſin cylindri, $= 1$ ſumaturque pro ſinu toto; ſinus anguli $s a o = m$, ejuſdemque coſinus $=$ M, ſinus anguli a M H $= n$, ejuſdemque coſinus $=$ N; arcus $a g = X$; coſinus illius arcus $= x$, erit perpendiculum ex o in horizontem demiſſum, nempe $o r = \frac{mNX}{M} + n(1+x)$. Quia vero $o r$ maxima eſt, fit $\frac{mNdX}{M} + ndx = 0$, & cum ex natura circuli ſit $dX = \frac{-dx}{\sqrt{1-xx}}$, erit $\frac{-mNdx}{M\sqrt{(1-xx)}} + ndx = 0$, ergo $\sqrt{1-xx} = \frac{mN}{Mn}$. Eſt igitur ſinus arcus quæſiti $a g = \frac{mN}{Mn}$ aut coſinus

$x =$

$x = \pm \frac{\sqrt{(nn-mm)}}{Mn}$: ſignum ſuperius dat arcum ag, inferius arcum ah determinantem puncta infima p.

Atque ſic determinavimus tum puncta ſuprema o, tum ima p, patetque arcus Mh & ag eſſe inter ſe æquales, ſimul autem ex quantitate irrationali $\sqrt{(nn-mm)}$ valorem litteræ x afficiente colligitur fieri non poſſe, ut m ſit major quam n: neque enim in hoc caſu punctum datur infimum, quod tota ſpiralis ubique aſcendit continue: Neque etiam inſerviet ſic cochlea ad elevandas aquas; unde jam patet ratio ejus, quod monui in articulo hujus digreſſionis ſecundo, de requiſito exceſſu anguli a MH ſupra angulum sao.

(V) Ponamus nunc globum alicubi eſſe in cavitate canalis, cochleamque in ſitu ſuo firmari: ſic minime quieſcet globus, quin exiſtat in puncto aliquo p. Quod ſi vero cochlea non retineri ponatur, globus deſcendet, deſcenſuque cochleam circumaget, atque ſi præterea fingatur, nullius eſſe ponderis cochleam motumque globi liberrime fieri nihil obſtantibus frictionibus, deſcendet globus ſuper recta mh non alia lege, quam globus libere ſuper plano inclinato deſcendens. Apparet itaque potentiam requiri ad impediendum globi deſcenſum, firmandamque cochleam. Iſtam potentiam applicatam ponemus in puncto f in plano circuli & perpendiculariter ad radium inquiſituri in rationem, quam habeat ad pondus globi in puncto aliquo p quieſcentis.

Sit pondus globi $= p$: quia vero actio globi eſt verticalis, reſolvenda erit in duas alias ad perpendiculum ſibi inſiſtentes, quarum una communem habeat cum axe cochleæ directionem, altera eidem perpendicularis ſit, prior cum nihil ad circumagendam cochleam conferat rejicienda, poſteriorque ſola conſideranda erit; eſt vero actio illa reſidua $= np$ & agit in vectem, qui eſt $=$ ſinui arcus Mh ſeu arcus ag, hicque ſinus (*per. art. IV.*) eſt $= \frac{mN}{Mn}$. Eſt igitur momentum actionis $= \frac{mN}{Mn} \times np = \frac{mNp}{M}$; hoc ſi dividas per radium baſeos, qui eſt vectis pertinens ad potentiam applicatam in f in æquilibrio poſitam cum actione globi, habebis iſtam potentiam quæſitam $= \frac{mNp}{M}$. Sic igitur directe ex natura vectis deducere licet, quod

alii ex principio alieno petere ſolent. Præmiſſis iſtis præmittendis uſum machinæ conſiderare nunc incipiemus, quem habet pro elevandis aquis.

Problema.

(VI) Quæritur quænam maxima ſit aquæ quantitas quam cochlea quavis revolutione ejicere poteſt.

Solutio.

Conſiderèmus helicem integram *a 1 b*, ſitque quantitas aquæ quam plena continet $= q$: Notandum autem eſt non poſſe helicem eſſe totam aqua repletam, ſi enim totus canalis plenus eſſet, effluerent aquæ per orificium inferius, igitur quivis ramus, qualis eſt *a 1 b*, partim aëre partim aqua occupatur, erit autem altera aquæ extremitas in *o* ceu puncto ſupremo, altera in *q*, ceu puncto ad libellam cum priori compoſito: pars igitur aqua plena eſt *o p q*, atque ſi hæc pars ponatur ad longitudinem totius helicis *a 1 b* ut *g* ad *b*, erit maxima aquæ quantitas una revolutione ejicienda $= \frac{gq}{b}$. Q.E.I.

Scholium I.

(VII) Quoniam, ut diximus, fieri non poteſt ut aqua per totum canalis tractum ſit contigua, cavendum eſt, ne ſeparatio aquæ impediatur, quod facile fieri poteſt cum totum cylindri fundum aquæ immergitur, quia ſic aëri prohibetur ingreſſus per orificium inferius canalis: Neque faciendum eſt, ut nimia fundi pars extra aquam promineat, quia ſic cochlea non omnem, quam una revolutione alias poſſet, aquam haurit; imo nihil hauriet, ſi immerſio punctum *b* non attingat: Debita autem fiet immerſio usque ad punctum *g*, quia ſic arcus helicis *o p q*, qui aquam retinere valet, maximus fit. Etſi enim nunquam rei periculum fecerim, & plerique auctores aliter de illa loqui videantur, malim tamen rationi, quam auctoritati illorum, qui ad immerſionem hanc animum non adverterunt, credere.

Regula igitur *ratione immerſionis* hæc obſervabitur, fundum nempe ſubmergetur, donec chorda arcus extra aquam eminentis ſit $= \frac{2mN}{Mn}$, ubi litteræ *m*, N, M, & *n* idem ſignificant, quod in articulo quarto.

Scho-

Scholium 2.

(VIII) Apparet quidem post levem rei contemplationem eò majorem esse rationem inter arcum helicis *opq* & integram helicem *a1b*, id est, inter *g* & *h*, atque proinde eo majorem ceteris paribus aquæ quantitatem singulis revolutionibus ejici, quo minor est angulus *sao* & quo major angulus *a*MH, seu quo minor est distantia inter duas proximas helices & quo magis cochlea versus horizontem inclinat: Veram autem illam rationem algebraice exprimere non licet: In omni tamen casu particulari id facili appropinquatione obtinetur.

Exemplum præcedentis regulæ desumam à cochlea, qualem Vitruvius adhibere & construere docet. Facit autem angulum *sao* semirectum & sic $m = M = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0,70710$: deinde inter NG & MG rationem statuit, quæ est ut 3 ad 4; inde deducitur angulus GNM vel *a*MH $= 53°, 8'$, ejusque sinus $n = 0,80000$ atque consinus $N = 0,60000$: ergo (per *art. III.*) est sinus arcus *ag* altissimum punctum *o* definientis $= \frac{mN}{Mn} = \frac{3}{4}$, ipseque arcus $ag = 48°, 35'$. Debet adeoque vi regulæ *art. VII.* arcus extra aquam eminens in fundo esse $97°, 10'$; immergeturque arcus $262°, 50'$.

Ut jam præterea definiamus rationem inter arcum helicis *opq* & helicem integram *a1b*, notandum est, eandem esse illam rationem, quæ intercedit inter arcum circularem *ghMs* & circumferentiam circuli, quod ex figura socia manifestum est. Determinatur autem arcus *ghMs* hunc in modum. Est nempe arc. *ghMs* = arc. *aghMs* — arc. *ag*. Sed vidimus in articulo tertio, si ex quocunque puncto spiralis, veluti *o* & *q* perpendicula ad horizontem punctum M radentem demittantur, qualia sunt *or* & *qx*, fore istud perpendiculum $= \frac{mNX}{M} + n(1+x)$ seu in nostro casu $= 0,60000X + 0,80000(1+x)$, denotante X arcum circularem, puncto in spirali assumto respondentem, nempe arcum *ag* aut arc. *aghMs* & *x* significante ejusdem arcus cosinum. Est vero arc. $ag = 48°, 35' =$ (quia radius exprimitur unitate) $0,84797$, ejusque cosinus $= 0,66153$: Igitur in nostro casu fit $or = 0,50878 + 1,32922 = 1,83800$. Quia porro puncta *o* & *q* sunt in eadem altitudine posita, atque lineæ *or* & *qx* inter se æquales, apparet quæstionem nunc eo esse reductam, ut alius arcus *aghMs* inveniatur puncto *q* respondens,