

Fuit igitur quantitas aquæ experimento inventa ad quantitatem, quam theoria seposita impedimentorum consideratione indicat, ut 11922 ad 26830; qui numeri, quamvis non parum differant, tamen egregie theoriā confirmant, quod ipsum nunc clare ob oculos ponam.

In formula $nb \sqrt{\frac{n}{g}} \times \log. \frac{a}{a-e}$, posuimus pro a altitudinem velocitati maximæ aquæ effluentis debitam, qualis revera fuit in experimento, non qualis remotis obstaculis futura fuisset; fecimus nempe $a = 141$: in theoria vero est $a = 433$. Quod si autem valor iste posterior assumatur, retinendo valorem altitudinis $e = 73$, fit $nb \sqrt{\frac{n}{g}} \log. \frac{a}{a-e}$ proxime $= 6700$, qui numerus nunc multo minor est numero per experimentum eruto, cum antea fuerit admodum major. Talis autem fit cum altitudo e servare valorem ponitur: Verum prouti altitudo a aucta fuit ab 141 usque ad 433, ita certe etiam altitudo e est augenda, foretque utraque altitudo in eadem ratione augenda, si impedimenta primis guttulis æqualiter resisterent & sequentibus: sed minorem resistentiam offendunt cæteris paribus particulæ, quo tardius moventur, atque proin etiam guttulæ quæ cadunt cis terminum R minus retardantur, quam quæ terminum istum transgrediuntur: Facile est exinde colligere in minori ratione augendam esse altitudinem e quam alteram a , ipsam vero rationem dicere non possumus, nisi à posteriori, faciendo scilicet, ut theoria conveniat cum experimento; ita reperitur ponendum esse $e = 120$, qui numerus animo ad omnes circumstantias bene attento plane satisfacit.

Sic igitur manifestum mihi videtur, experimenti successum talem fuisse, ut plane cum theoria conveniat. Hujusmodi autem exempla omnino demonstrant, veras motuum leges in fluidis nos tradidisse, eaque inter infinita alia selegi, quod nullam habent nexum neque affinitatem cum regula communi, quæ fluida ubique velocitate effluere statuit, toti altitudini aquæ supra foramen debita, neque possint principiis consuetis solvi. Cæterum quoniam in hoc experimento motus aquæ retardatus fuit, aliud institueré volui, quo omnia impedimenta admodum diminuerentur, ut sic apparet eo magis ad se invicem accedere numeros experimenti & regulæ, quo minora essent impedimenta.

Expe-

Experimentum 12.

Jam itaque usus fui tubo cylindrico per quem facilior fit transfluxus eo-
que ob eandem rationem ampliore: erat præterea arca cui tubus insertus fuit
multo amplior, & denique altitudo aquæ in arca contentæ supra axem tubi
multo minor fuit, ut minori velocitate aquæ transfluerent, ficque obstacu-
la minoris momenti offenderent: Cætera fuerunt, ut ante.

Fuit igitur altitudo aquæ supra axem tubi = 130. *part.* $P = 553.$ *part.*
 $PQ = 453.$ *part.* $PR = 297.$ diameter GF vel $MN = 19.$ *part.* tubique longi-
tudo 130. *part.*

Vidi aquam in patinam delapsam cylindrum explevisse, qui $8\frac{1}{2}$ *part.*
in diametro continebat ad altitudinem 281. *part.* & cujus proinde capacitas
erat 15950. *part. cub.* In hoc casu ponendum est $a = \frac{453 \cdot 453}{4 \cdot 553} = 93.$ *part.*
 $e = 40.$ *part.* $n = g = 284.$ *particulis quadratis* & $b = 130.$ His vero factis
substitutionibus fit

$$nb \sqrt{\frac{n}{g}} \times \log. \frac{a}{a-e} = 284. 130. \log. \frac{93}{53} = 20760,$$

cui numerus in experimento respondet, ut vidimus, 15950. Hic vero nu-
merus fere quatuor quintas alterius explet, ficque eidem proxime accedit,
cum in præcedenti exemplo ob rationes allatas similis numerus à simili plus
quam dimidio defecerit,

Jam igitur abunde patet, solis obstaculis extrinsecis attribuendum esse,
quod experimenta non ad amissim respondeant formulis; interim tamen ta-
lia esse, ut non possint melius harum formularum robur demonstrare.

HYDRODYNAMICÆ

SECTIO QUINTA.

De motu aquarum ex vasis constanter plenis.

§. I.



Vasa plena servantur, cum continue totidem affunduntur aquæ, quot effluunt; affusio autem esse potest vel in eadem cum motus superficiei aquæ directione eademque singulis momentis velocitate, quasi scilicet nova continue crearetur superficies, cui velocitas aquæ proximæ jam insit, vel lateralis & sine impetu, veluti si superficies, quæ continue nova creari fingitur, nullo motu prædita sit & demum ab aqua inferiore ad motum cienda. Reliquos affundendi novas aquas, qui infiniti sunt, modos præteribo.

Regula interim circa hunc motum, præsertim posteriorem, recepta est, aquam effluere velocitate conveniente altitudini superficiei supra lumen: facile tamen est prævidere illam valere non posse, nisi pro vase ubique infinite amplo, in reliquis autem fore, ut motus à quiete incipiens sensim sensimque per aliqua temporis intervalla augeatur, & post infinitum demum tempus omnem velocitatem acquirat. Attamen, si dicendum, quod res est, fiunt istæ accelerationes plerunque tam celeriter, ut minimo tempusculo tantum non tota velocitas adsit: Verum res secus se habet in prælongis aquæ ductibus, in quibus velocitatum augmenta oculos non effugiunt & cum distinctis mensuris observari possunt.

Quicquid autem ejus rei sit, cum nullibi displicere possit accuratio mathematica, constitui motum aquarum à principio ad quemvis datum terminum considerare & prosequi.

§. 2. Omnes hujus motus proprietates ad tres præcipue æquationes se reduci patiuntur 1°. inter quantitatem aquæ ejectæ respondentisque velocitatis; 2°. inter tempus & velocitatem & 3°. inter quantitatem aquæ & tempus. Harum æquationum si una habeatur reliquæ inde sua sponte fluunt.

Primam

Primam igitur solam accuratius scrutabimur : Hic vero memores finius eorum, quæ in præcedente sectione monita fuerunt circa contractionem venæ per simplicia orificia, aut tubos convergentes effluentis, & dilatationem ejusdem, cum per tubos divergentes ejicitur. Indicavimus autem §. 3. *Art. 1. Sect. IV.* eò usque venam considerandam esse, donec particularum velocitates (abstrahendo animum à mutationibus quas gravitas in particulis extra vas producit) amplius non mutantur, & omnem illam venæ partem cæu intra vas motam æstimandam esse, quasi scilicet superficies venæ eousque indurescat. Igitur deinceps cum de vase per quod aquæ effluunt sermo erit, subintelligendum erit vas illud ideale, cujus orificium effluxus sit sectio venæ nulli deinceps mutationi subjectæ, nisi quæ descensui vel ascensui venæ debetur.

Problema.

§. 3. Invenire velocitatem aquæ effluentis ex vase constanter pleno, postquam jam data aquæ quantitas effluxit.

Solutio.

Duo sunt modi affundendæ aquæ præcipue consideratu digni, quorum quivis aliam postulat problematis solutionem : vel enim aqua verticaliter in vas depluere ponitur & ita quidem, ut eadem præcise affluat velocitate, quam habet aquæ superficies, vel lateraliter affluit aqua, sicque caret impetu, quo sua sponte aquæ superficiem insequi possit & in motum demum est cienda.

Casus I.

Ut pro primo casu æquationem inveniamus inter quantitatem aquæ ejectæ, velocitatemque respondentem, iisdem unica mutata circumstantia vestigiis insistendum erit, quæ in primis paragraphis sectionis tertiæ secuti sumus.

Sit igitur ut in §. 6. *Sect. 3.* vas propositum *a i m b* (Fig. 15. & 16.) quod affusione aquarum constanter plenum servatur usque in *c d*; effluant autem aquæ per foramen *p l*; ponaturque eam aquæ quantitatem jam effluxisse, quæ contineri possit in cylindro super foramine *p l* erecto altitudinis *x*, ultimam autem guttulam effluxisse velocitate, qua ascendere possit ad altitudinem *q s* seu *v*; sic jam exhibenda erit æquatio inter *x* & *v*.

Sit curva *C G I* scala amplitudinum, talis nempe, ut, denotante *H L* alti-

altitudinem supra foramen, exprimat HG amplitudinem vasis in illo loco. Deinde fiat tertia curva tru , cujus applicata Hr fit ubique æqualis tertiæ continue proportionali ad GH & PL seu cujus applicata Hr fit $\equiv PL^2 : GH$.

Dicatur spatium $DCIL \equiv M$, spatium $DtuL \equiv N$, & erit *ascensus potentialis* aquæ in vase contentæ, postquam prædicta quantitas jam effluxit (per §. 2. sect. 3.) $\equiv \frac{N}{M}v$. Effluere porro intelligatur particula $plon$, superficiesque cd descendere in ef , erit jam velocitatis altitudo pro particula $plon \equiv v + dv$; atque si nunc construatur parallelogrammum $LxyO$, cujus latus LO fit $\equiv lo$ & alterum $Lx \equiv PL$, erit *ascensus potentialis* ejusdem aquæ in situ $efmlonpie$ æqualis tertiæ proportionali ad spatium $EFLONP$ IE, (quod rursus est $\equiv M$, quia $PLON$ exprimit magnitudinem guttulæ $plon$, dum $CDFE$ exprimit quantitatem minimam cdf isti guttulæ æqualem) spatium $wuxyOLF$ (quod est $\equiv$ spatio $N - DtwF + LxyO$, unde si PL seu Lx ponatur $\equiv n$, $CD \equiv m$, $LO \equiv lo \equiv dx$, erit $Dt \equiv \frac{nn}{m}$, $DF \equiv \frac{n}{m}dx$, hinc spatiolum $DtwF \equiv \frac{n^3}{mm}dx$ & spatium $LxyO \equiv ndx$ & denique spatium $wuxyOLF \equiv N - \frac{n^3}{mm}dx + ndx$) & altitudinem $v + dv$. Est igitur *ascensus potentialis* modo dictus $\equiv (N - \frac{n^3}{mm}dx + ndx) \times (v + dv) : M \equiv$ rejectis differentialibus secundi ordinis $\frac{N}{M}v + \frac{N}{M}dv - \frac{n^3}{mmM}vdx + \frac{n}{M}vdx$, sic ut incrementum *ascensus potentialis*, quod aquæ accessit dum guttula $plon$ effluxit, fit $\equiv \frac{N}{M}dv - \frac{n^3}{mmM}vdx + \frac{n}{M}vdx$, ubi spatia N & M sunt constantis magnitudinis ob aquæ continuam affusionem. Non consideramus in hoc casu primo *ascensum potentialem* guttulæ cdf , quæ affunditur dum altera æqualis $plon$ effluit, quia iste ascensus non generatur vi interna, neque enim aqua inferior post se trahere ponitur particulam cdf , quin potius hanc vi quadam extrinseca continue affundi consideramus, idque nec majori nec minore velocitate quam quæ est superficie ef . Ergo omne incrementum hic considerandum, est ut diximus

$$\frac{N}{M}dv - \frac{n^3}{mmM}vdx + \frac{n}{M}vdx.$$

Debet

Debet vero istud incrementum æquari *descensui actuali* centri gravitatis ; Atqui iste descensus, posita $DL = a$, est per paragraphum septimum *sect. 3.* $= \frac{n a d x}{M}$; habetur igitur talis æquatio

$$\frac{N}{M} d v - \frac{n^3}{m m M} v d x + \frac{n}{M} v d x = \frac{n a d x}{M}, \text{ seu}$$

$$d x = N d v : \left(n a - n v + \frac{n^3}{m m} v \right) ;$$

Hæc vero si ita integretur, ut v & x simul evanescant, dat

$$x = \frac{m m N}{n^3 - n m m} \log. \frac{m m a - m m v + n n v}{m m a}$$

quæ æquatio, posito c pro numero cujus logarithmus est unitas, æquivalet huic alteri

$$v = \frac{m m a}{m m - n n} \times \left(1 - c^{\frac{n^3 - n m m}{m m N} x} \right)$$

Hæc vero solutio quadrat pro casu primo, ubi aqua superne motu affunditur communi cum descensu superficiei proximæ.

Casus II.

Quod si jam particula *cdfe* lateraliter continue affundi ponatur, tunc propter inertiam suam motui aquæ inferioris resistit atque proinde *ascensus potentialis* ipsius aliter in computum venit. Tunc autem prius considerandus est *ascensus potentialis* massæ aquæ *cdm l p i c* auctæ guttula mox affundenda ; deinde indagandus *ascensus potent.* ejusdem aquæ in situ *cdm l o n p i c*, postquam nempe guttula jam effluxit, eorumque differentia est æquanda cum *descensu actuali*, $\frac{n a d x}{M}$. Verum *ascensus potentialis* omnis prædictæ aquæ ante affusionem particulæ ejusdemque post affusionem ita invenitur : nempe *ascensus potentialis* aquæ *cdm l p i c* est $= \frac{N v}{M}$, & *ascensus potent.* particulæ affundi paratæ nullus est, quia lateraliter affusa motum communem nondum habet cum massa inferiore ; Igitur *ascensus potentialis* utriusque aquæ (qui scilicet habetur multiplicando massam respective per suum *ascensum potentialem*, dividendoque productorum aggregatum per aggregatum massarum) est $=$

M 3

(M.

$(M \times \frac{Nv}{M} + ndx \times v) : (M + ndx) = \frac{Nv}{M + ndx}$. Postquam vero particula ndx superne jam affusa est, communem acquisivit motum cum aqua proxime inferiori, sicque fit *ascensus potentialis* ejusdem aquæ in situ *cdmlonpic* æqualis tertiæ proportionali ad spatium CDLONPIC $(M + ndx)$, spatium Dtnxy OLD $(N + ndx)$ & altitudinem $v + dv$, id est, $= \frac{(N + ndx) \times (v + dv)}{M + ndx}$, cujus excessus supra priorem *ascensum potentialem* est $= \frac{Ndv + nvdx + ndxdv}{M + ndx} =$, rejectis differentialibus secundi ordinis, $\frac{Ndv + nvdx}{M}$. Habetur igitur talis æquatio $\frac{Ndv + nvdx}{M} = \frac{ndx}{M}$, quæ ut prior per tractata & ad finem deducta dat

$$x = \frac{N}{n} \log. \frac{a}{a-v}, \text{ vel}$$

$$v = a \times \left(1 - e^{-\frac{nx}{N}} \right)$$

quæ solutio valet pro affusione laterali.

Scholion I.

§. 4. Sunt hæ æquationes inter se admodum diversæ; diversitas autem eo major quo minoris est amplitudinis vas; & si quidem amplitudo vasis suprema in *cd* quasi infinita sit præ amplitudine foraminis, evanescit *n* præ *m* fitque in priori casu sicut in posteriori.

$$v = a \times \left(1 - e^{-\frac{nx}{N}} \right)$$

Est igitur hæc in hypothese motus utrobique idem quod haud difficulter quisque prævidere potuerit. Celerior autem semper est cæteris paribus motus in priori affusione, quam in altera.

Conveniet hic rem etiam physice explicare, ut eam distinctius in omnibus phænomenis percipere possimus.

Sit loco vasis cujuscunque & quancunque directionem habentis, brevioris delineationis gratia cylindrus verticalis cum foramine in fundo, nempe Fig. 29, GHND (Fig. 29.) sitque dein vas EFPQ perforatum in RS; fingantur orificia RS & GD perfecte æqualia, & ad minimam distantiam sibi perfecte respon-

spondentia, ita ut aquæ ex superiori vase effluentes omnes in cylindrum subiectum influant.

Incipiant aquæ ex utroque vase effluere, ex superiori autem constanter ea effluere velocitate ponantur, quam habet superficies aquæ in cylindro supposito.

Ita patet satisfieri primæ affusionis conditioni. Jam vero hujus motus phænomena investigabimus, visuri num cum præcedentibus conveniant.

Consideremus igitur vas superius esse veluti infinitum, ut aquæ per RS effluentes singulis momentis habeant velocitatem quæ conveniat altitudini PB seu FA: sic fingendum erit esse hanc altitudinem PB ab initio infinite parvam, quia tunc aquæ velocitate infinite parva effluere debent, deinde vero sensim crescere, idque continue magis magisque, donec post tempus infinitum motus uniformis maneat, quæritur autem an altitudo aquæ PB tandem infinita futura sit an vero certum terminum non transgressura. Id sic cognoscetur.

Sit altitudo GH vel RH (neque enim illas inter se differre censendum est) $= a$, AF $= x$, amplitudo orificii LM $= n$, amplitudo orificii RS $= m$; quia vero, ut manifestum est, utrumque vas cohærere & unum efficere putari potest, erit post tempus infinitum (per §. 23. Sect. III.) velocitas aquæ in LM $= \sqrt{a+x}$, & in RS $= \sqrt{x}$, (quod posterius patet, si nunc iterum separata vasa censentur, nam utrumque sine errore fingi potest) debent autem velocitates esse in inversa ratione amplitudinum orificiorum: est itaque $\sqrt{a+x} : \sqrt{x} :: m : n$, unde $a+x : x :: m^2 : n^2$, vel $a : x :: m^2 - n^2 : n^2$, ergo $x = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2}$ & $a+x = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2}$, videmus igitur altitudinem, velocitati aquæ in LM debitam, esse hoc modo $= \frac{m^2 a}{m^2 - n^2}$, postquam scilicet infinita aquæ quantitas jam effluxit: superius autem habuimus eandem altitudinem, seu $v = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2} \times \left(1 - e^{-\frac{n^2 - m^2}{m^2 N} x} \right)$, ubi si ponitur $x = \infty$ (infinito enim tempore infinita quantitas transfluit) evanescit terminus exponentialis, si modo m major sit quam n & sic fit pariter $v = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2}$. Mirabilis est iste consensus, quia valde diversæ sunt viæ, quas secuti sumus. Cæterum si m non sit major quam n motus nunquam fit permanens nequidem post tempus infinitum, crescit enim tunc velocitas in infinitum cum secus altitudo velocitatis nunquam trans-

transgrediatur altitudinem $\frac{m m a}{m m - n n}$. De his igitur casibus nihil est quod dicamus.

Scholion 2.

§. 5. Quæstio hic nunc alia occurrit notatu digna; nempe quis esse possit modus affusionis mechanicus, ut vas superius ad debitam durante toto fluxu altitudinem plenum servetur. Difficile foret istud Problema ob inconstantiam altitudinis quæsitæ, nisi peculiare hic artificium occurreret, quod nunc tradam.

Nititur autem super eo, quod aqua in spatio minimo R S D G nullam patiatur compressionem neque affirmativam neque negativam, quia ex hypothese communi velocitate movetur cum aqua proxime substrata, atque sic nulla particula nullam nec propellere nec retinere tentet.

Fiat igitur vas quod dixi utrumque, sitque tubus cum vase superiore firmatus (neque enim aliter quam demonstrationis gratia illa posuimus antea
Fig. 30. separata) habeat autem tubus in summitate *a* (Fig. 30.) foraminulum, cui respondeat tubulus *a m*, in hunc tubulum immittatur tubus vitreus recurvus *a b c d g*, obtectis cera oris *m n*: ducatur horizontalis *a e* noteturque punctum *e*. His sic præparatis, sic erit faciendum, ut durante toto experimento summitas aquæ constanter permaneat in puncto *e*; & ad hoc requiri videbis, ut ab initio superficies aquæ sit fundo F P proxima, deinde, ut continue elevetur, & denique ut post tempus etsi infinitum nunquam tamen transcendat altitudinem $\frac{n n a}{m m - n n}$, facile autem erit aquarum affusionem ita moderari, ut superficies à puncto *e* non admodum divagetur, si modo circumstantiæ non sint ita comparatæ, ut aquæ ab initio nimis celeriter sint affundendæ.

Quod si autem superficiem in tubulo supra *e* elevatam animadvertis, inhibe paullo affusionem, quod faciendum esse alibi demonstrabo, si fecus fuerit, largius aquas affunde.

Nihil habet difficultatis istud experimenti genus cujusmodi sæpe feci, sed ne error in experimentum irrepit, examinandus est tubi vitrei effectus capillaris; hunc effectum invenies, si obturato orificio L M, priusque madefacto tubo, cylindrus aqua impleatur usque ad summitatem, atque sic invenies superficiem aquæ in tubo pertingere usque in *f*, locum nempe altiore quam *e*,
hoc

hoc autem punctum filli, de quo modo diximus, abstrahendo animum à natura tubulorum capillarium, substitues.

Hoc igitur modo recte efficietur affusio ad normam hypotheseos nostræ & sic deinceps de hoc motu experimenta sumi poterunt. Post quam vero sic prolixè fatis rem explicuimus, non opus puto monere vas superius non aliter pertinere ad vas cylindricum inferius, quod solum consideramus, quam ut cylindrus eo, quo fieri debet, modo plenus fervetur atque sic per *m* non intelligendam esse amplitudinem vasis superioris sed amplitudinem orificii *R S*, quæ proprie nobis est superficies aquæ, cum aquæ supra *R S* tantum debita affusioni in cylindrum inferiorem inserviant.

Scholion 3.

§. 6. Non debeo hic præterire, quod sic casus habeatur qui pertinet ad *hydraulico-staticam*, de qua scientia quædam monui in Sect. I. §. 8. cognoscimus nempe nunc quanta velocitate aqua in *a* præterfluere debeat ut pressio ejus in latera tubi præcise nulla sit. Hæc vero dum scriberem, jam detexeram leges *hydraulico-staticæ* generales, & non sine voluptate vidi, quod iste casus ceu corollarium ex theoria plane alia deductus similem acquirat solutionem ex theoria generali. Sic omnia ubique mutuo cohærent nexu, legitimamque principiorum applicationem demonstrant.

Scholion 4.

§. 7. Sequuntur nunc quædam de alio aquæ affundendo modo. Ponatur cylindrus *R H N G* pro vase quocunque, sitque is constanter plenus conservandus affusione laterali: poterit id fieri injiciendo sufficientem aquæ quantitatem per tubulum *m a*; quamvis autem id non fiat sine motu, attamen, quia hic horizontalis est, mox omnis tollitur, & per se neque promovet fluxum per cylindrum neque eundem retardat; sed est alius insuper modus, quem subducto recte calculo eodem recidere intelligimus: nempe si vas *E F P Q* infinite amplum censemus, & ejus fundum aqua continue obiectum intelligimus, sed ita, ut aquæ altitudo in vase superiori sit pro infinite parva habenda; subministrabit vas superius aquam tubo sibi annexo, neque alius inde motus orietur, quam ab affusione laterali, si modo orificium *R S* semper obiectum maneat; facile autem fit ut ibi cataracta quædam formetur, si orificium *L M* amplum, tubusque *R S N H* longus sit. Quod hic alter modus eundem cum priori effe-

N

ctum

clum in motum aquarum exerere debeat, quisque videt ex eo, quod in utroque modo omnis aquæ tubum ingredientis inertia sit ab aqua inferiore superanda. Sed idem etiam à priori demonstrari poterit inquirendo in motum, qui inde oriri debeat, secundum æquationem paragraphi octavi Sect. III. quæ hæc est:

$$N dv - \frac{m m v y dx}{n n} + \frac{m m v dx}{y} = -y x dx;$$

accommodabitur autem ad præsentem casum, si pro m , x & $-dx$ substituas respective n , a , & $\frac{n dx}{y}$, (cujus rei ratio patebit, si hæc cum illis contuleris) simulque y infinitum ponas; tunc enim evanescit tertius æquationis terminus, fitque omnino, ut pro præsentī negotio supra invenimus,

$$N dv + n v dx = n a dx.$$

Postquam in his scholiis motus utriusque indolem, quantum simplex rei consideratio physica permittit, eorumque differentiam ostendimus, simulque modum illos producendi ad legem hypotheseos mechanicum tradidimus, superest, ut reliqua phænomena notabiliora etiam indicentur, quod nunc faciam.

Corollarium I.

§. 8. Si in vase R S N H omnè fundum absit, erit orificium L M = orificio R S; potest etiam hoc ab illo superari, si nempe vasis divergant latera. In his autem casibus nullum habet terminum altitudo v in æquatione

$$v = \frac{m m a}{m m - n n} \times \left(1 - \frac{n^3 - n m m}{m m N} x \right)$$

& fit infinita, si quantitas aquæ ejectæ indicata per $n x$ est infinita.

Id quidem per se patet ex æquatione, cum n est major quam m ; at cum amplitudines orificiorum sunt æquales, recurrendum est ad æquationem differentialem paragraphi tertii, ex qua ista æquatio proxima deducta fuit, nempe

$$\frac{N}{M} dv - \frac{n^3}{m m M} v dx + \frac{n}{M} v dx = \frac{n}{M} a dx,$$

quæ posito $n = m$ dat $N dv = n a dx$, id est, $v = \frac{n a x}{N}$, ubi v fit manifeste infinita si x est infinita.

§. 9. Sin autem vasi proposito fundum sit, atque in eo foramen, cujus ampli-

amplitudo indicata per n minor fit amplitudine orificii RS expressa per m , habet v valorem quem nunquam attingit quidem, sed tamen proxime assequitur, & ad quem tam cito convergit, nisi data opera vasa huic rei contraria excogitata adhibeantur, ut post minimum fluxus tempusculum, quod sensibus percipi possit, notabiliter ab eo non deficiat. Est autem terminus ille talis, $v = \frac{mm a}{mm - nn}$: igitur in casu Scholii secundi §. 5. ultimus terminus PB est $v - a = \frac{nn a}{mm - nn}$. Exemplo citissimam velocitatis ad ultimum suum terminum accessionem illustrabo, postquam æquationem inter v & tempus altitudini v respondens apposuerō.

Corollarium 3.

§. 10. In casu affusionis, quam vocamus, lateralis, fit ultima altitudo $v = a$, quæcunque inter utrumque vasis orificium ratio intercesserit.

Corollarium 4.

§. 11. Si vas est cylindricum ejusque longitudo ponatur $= b$, fit (vid. §. 3.) $N = \frac{nn b}{m}$: notetur autem non confundendos esse valores litterarum a & b , primus enim exprimit altitudinem supremi orificii supra inferius, alter longitudinem canalıs; Sic itaque conveniunt inter se valores in hoc saltem casu, cum axis vasis linea est recta & verticalis; at si axis tortuosus est, vel saltem non verticalis, differunt à se invicem: Hæc ideo expresse monere volui, ne quis sibi a figuris vasorum, quorum axes ubique rectos & verticales feci, imponi patiat̃ur.

Quod si igitur pro vasis cylindricis ponatur $N = \frac{nn}{m} b$ fit pro affusione verticali

$$v = \frac{mm a}{mm - nn} \times \left(1 - c^{\frac{nn - mm}{mn b} x} \right)$$

$$\text{\& pro altera laterali fit } v = a \left(1 - c^{\frac{-mx}{nb}} \right).$$

Problema.

§. 12. Invenire velocitatem aquæ, ex vase constanter pleno effluentis, postquam fluxus per datum tempus duravit.

N 2

Solu-

Solutio.

Retentis hypothesibus & denominationibus omnibus, quas in §. 3. adhibuimus, positoque insuper tempore à fluxus initio præterito $\equiv t$, mutandas habebimus æquationes in dicto paragrapho datas in alias, quæ relationem expriment inter t & v , eliminatis quantitibus x & dx . Est vero elementum tempusculi dt proportionale minimo spatiolo dx , quod percurritur, diviso per velocitatem $\sqrt{v}$: ponemus igitur $dt \equiv \frac{\gamma dx}{\sqrt{v}}$, & sic mutabitur æquatio

$$dx \equiv N dv : \left(na - nv + \frac{n^3}{mm} v \right)$$

quæ data fuit pro affusione verticali debita velocitate instituenda in hanc

$$(I) dt \equiv N \gamma dv : \left(na \sqrt{v} - nv \sqrt{v} + \frac{n^3}{mm} v \sqrt{v} \right)$$

altera vero affusioni inserviens laterali, nempe $dx \equiv N dv : (na - nv)$ abit in hanc post eandem substitutionem

$$(II) dt \equiv N \gamma dv : (na \sqrt{v} - nv \sqrt{v})$$

Hæ vero æquationes debito modo integratæ dant pro prima

$$(a) t \equiv \frac{m N \gamma}{n \sqrt{(mma - nna)}} \times \log. \frac{m \sqrt{a} + \sqrt{(mmv - nnv)}}{m \sqrt{a} - \sqrt{(mmv - nnv)}}$$

& pro altera, quæ ex priori deducitur, posito $m \equiv \infty$

$$(c) t \equiv \frac{N \gamma}{n \sqrt{a}} \times \log. \frac{\sqrt{a} + \sqrt{v}}{\sqrt{a} - \sqrt{v}}. \quad Q. \quad E. \quad I.$$

Scholium.

§. 13. Si vas de quo fermo est sit cylindricum utcunque intortum & inclinatum, cujus longitudo ponatur $\equiv b$, manente altitudine superficiei aqueæ supra foramen $\equiv a$, erit rursus, ut §. 11. $N \equiv \frac{nn}{m} b$.

Quoniam autem, ut constat, $2\gamma\sqrt{A}$ exprimit tempus, quod corpus insumit cadendo libere & à quiete per altitudinem A , patet quantitatem $\frac{2mN\gamma}{nn\sqrt{a}} \left(\equiv 2\gamma\sqrt{\frac{bb}{a}} \right)$ exprimere tempus quo corpus moveri incipiens à quiete libere descendit per altitudinem $\frac{bb}{a}$: accipiemus istud tempus pro

com-

communi mensura idemque ponemus $\equiv \theta$, & mutabitur pro vasis seu canalibus cylindricis æquatio (2) in hanc

$$t \equiv \frac{n\theta}{2\sqrt{mm-nn}} \times \log. \frac{m\sqrt{a} + \sqrt{(mmv-nnv)}}{m\sqrt{a} - \sqrt{(mmv-nnv)}}$$

altera vera signata (6) talis fit

$$t \equiv \frac{n\theta}{2m} \times \log. \frac{\sqrt{a} + \sqrt{v}}{\sqrt{a} - \sqrt{v}},$$

ex quarum utraque apparet, non posse non brevissimo tempore aquas omnem fere velocitatem acquirere, idque eo citius quo amplior est tubus, quo brevior, & quo magis verticalis: Neque accelerationes ullo modo esse perceptibiles, nisi prælongi statuantur aquæ ductus & tunc quoque brevi tempore omnes fere accelerationum gradus percurri, quod utrumque nunc exemplo illustrabo.

(I) Quæritur tempus quo fluidum ex cylindro constanter pleno verticali, sedecim pedes anglicos longo & cujus diameter quintupla fit diametri foraminis, velocitatem acquirit quæ debeatur altitudini $\frac{99}{100}a$, idque in hypothesi, ad quam æquatio secunda pertinet; sic est $\frac{n}{m} \equiv \frac{1}{25}$, $v \equiv \frac{99}{100}a$, $b \equiv a$, unde tempus quod corpus infumit cadendo libere per spatium $\frac{bb}{a}$, seu $\theta \equiv$ uni minuto secundo; hinc fit $t \equiv \frac{1}{50} \log. 399$. id est, proxime novæ parti unius minuti secundi, quod tempusculum utique imperceptibile est; Cum vero tempus notabile assumitur, fiunt mutationes altitudinum v , insensibiles. Si tempus simile (quo nempe velocitas pariter nonaginta novem centesimis partibus altitudinis, quanta post tempus infinitum fit, debita generetur) in prima hypothesi quærat, nempe tempus quo obtinetur $v \equiv \frac{99}{100} \times \left(\frac{mma}{mm-nn} \right)$ reperitur illud præcedente paullulum majus, sed excessu insensibili: unde patet in hujusmodi vasis non posse fere aquas fat celeriter affundi in vas superius, ut hypothesi satisfiat, nec adeoque ratione ejusdem hypotheseos experimenta alia sumi posse, quam ut exploretur, num revera tanta sit altitudo BP in figura trigesima, quanta vi paragraphi quinti esse debet, ut punctum e aut f , durante fluxu situm servet, quem ante fluxum obturato orificio LM, nullaque existente aqua in vase superiore habuit.

(II) Quæritur nunc idem tempus pro secunda rursus hypothefi, si tubus ejusdem fuerit amplitudinis eodemque foramine instructus, sed oblique fitus longitudinemque b habuerit 184 *perticarum* seu 1104 *pedum Paris.* dum altitudo superficiei aqueæ supra orificium effluxus sit 16. *ped. Paris.* Ita fiet $b = 1104$, & $\frac{bb}{a} = 76176$. atque præterpropter $\theta = 72$ *sec. min.* unde tempus quæsitum medium est inter octo novemque minuta secunda, quod certe satis notabile est. Si vero tempus desideretur, quo altitudo v exæquet tantum quartam partem altitudinis a , reperietur illud æquale $\frac{72}{50} \log. 3 =$ proxime uni minuto secundo cum dimidio.

Nescio an hæc conveniant cum iis, quæ Mariottus à se observata refert in *tract. de mot. aquar. part. 5. disc. 1.* ubi mentionem facit alicujus fontis fallientis, qui est à Chantilly, ad quem aquæ devehuntur per canalem 184. *perticas* longum, si modo recte ex antecedentibus conjeci, eratque summa superficiei aqueæ altitudo supra orificium effluxus indicata per a sedecim *pedum*: diameter aquæductus erat 5. *poll.* orificium autem habebat diametrum unius pollicis. Videtur mihi Mariottus ita loqui ac si accelerationes multo fuissent tardiores, quam ab formula nostra indicantur, quod nescio an tribuendum sit huic quod fortasse alium, præter orificium de quo hic sermo est, exitum habuerint aquæ, an, quod aquæ ductus dum fluxus inciperet non fuerit aqua plenus, quod posterius multa faciunt, ut credam; si neutrum fuerit, confido phænomena qualia à Mariotto observata fuerunt & quotidie de novo observari poterunt plane convenisse cum calculo nostro. Cæterum verba Mariotti hæc sunt: *Illud insuper, ait, singulari eidem jactui accidit, quod obturato manu orificio per decem aut duodecim scrupulorum secundorum temporis spatium eodemq; postea reserato, aqua non protinus erumpat, sed paullatim assurgens jactus ascendat ad 3. poll. postea ad pedis altitudinem & denig, ad duos pedes successive notabilibus intervallis,..... Sed tandem tamen toto impetu suo aqua exiliebant.*

Problema.

§. 14. Invenire quantitatem aquæ per datum vas, constanter plenum conservandum, dato tempore transluentem.

Solutio.

Solutio.

Adhibitis rursus positionibus & denominationibus paragraphi tertii & duodecimi, invenienda nunc erit æquatio inter x & t : quia vero, ut vidimus §. 12. est $dt = \frac{\gamma dx}{\sqrt{v}}$, erit $\sqrt{v} = \frac{\gamma dx}{dt}$, hicque valor substituendus erit in æquationibus, quas dedimus §. 3. integratis; prior harum æquationum

$$\text{hæc fuit: } v = \frac{mm a}{mm - nn} \times \left(1 - c \frac{n^3 - nmm}{mm N} x \right)$$

quæ pro præsecuti instituto mutatur in hanc

$$(I) \frac{\gamma \gamma dx^2}{dt^2} = \frac{mm a}{mm - nn} \times \left(1 - c \frac{n^3 - nmm}{mm N} x \right)$$

altera ex §. 3. allegatarum æquationum talis fuit

$$v = a \times \left(1 - c \frac{n^3}{N} x \right)$$

quæ adeoque subministrat in præfenti casu fequentem

$$(II) \frac{\gamma \gamma dx^2}{dt^2} = a \times \left(1 - c \frac{n^3}{N} x \right)$$

Erunt nunc æquationes (I) & (II) integrandæ, quod quidem facile est & quia prior alteram continet (utraque enim eadem est si $m = \infty$) hanc folam pertractabimus, eamque nunc sub hæc forma considerabimus.

$$dt = \frac{\gamma \sqrt{(mm - nn)}}{m \sqrt{a}} dx : \sqrt{\left(1 - c \frac{n^3 - nmm}{mm N} x \right)}$$

Ponatur autem ut integrationis modus eo magis patefcat

$$c \frac{n^3 - nmm}{mm N} x = z, \text{ atque proin } dx = \frac{mm N dz}{(n^3 - nmm) z},$$

dein brevitatis ergo indicetur quantitas constans

$$\frac{\gamma \sqrt{(mm - nn)}}{m \sqrt{a}} \times \frac{mm N}{n^3 - nmm}, \text{ seu } \frac{\gamma m N}{n \sqrt{(mm - nn) a}} \text{ per } \alpha,$$

$$\& \text{ habebitur } dt = \frac{\alpha dz}{z \sqrt{(1 - z)}},$$

in

in quâ si præterea fiat $1 - z = qq$, seu $z = 1 - qq$, $dz = -2q dq$, oritur

$$dt = \frac{-2\alpha dq}{1-qq} = \frac{-\alpha dq}{1+q} - \frac{\alpha dq}{1-q}$$

cujus integralis est

$$t = -\alpha \log. (1+q) + \alpha \log. (1-q) = \alpha \log. \frac{1-q}{1+q}.$$

Nec opus est constante, quandoquidem ex natura rei t & x , simul evanescere debent, posito autem $x = 0$, fit $z = 1$, & $q = 0$, igitur pariter t & q simul à nihilo incipere debent, cui conditioni satisfacit æquatio inventa $t = \alpha \log. \frac{1-q}{1+q}$: Supereft ut retrogrado ordine valores pristinos reassumamus, ita vero fit

$$t = \alpha \log. \frac{1 - \sqrt{(1-z)}}{1 + \sqrt{(1-z)}} \text{ vel}$$

$$t = \frac{\gamma m N}{n \sqrt{(mm - nn)} a} \times \log. \frac{1 + \sqrt{(1-z)}}{1 - \sqrt{(1-z)}} \text{ vel denique}$$

$$(I) \quad t = \frac{\gamma m N}{n \sqrt{(mm - nn)} a} \times \left[\log. \left[1 + \sqrt{\left(1 - c \frac{n^3 - nmm}{mmN} x \right)} \right] - \log. \left[1 - \sqrt{\left(1 - c \frac{n^3 - nmm}{mmN} x \right)} \right] \right]$$

Istaque æquatio posito $m = \infty$ dat alteram æquationem quæsitam

$$(II) \quad t = \frac{\gamma N}{n \sqrt{a}} \times \left[\log. \left[1 + \sqrt{\left(1 - c \frac{n}{N} x \right)} \right] - \log. \left[1 - \sqrt{\left(1 - c \frac{n}{N} x \right)} \right] \right] \quad Q. E. I.$$

Corollarium I.

§. 15. Si ponatur $x = \infty$, ut appareat natura rei, cum infinita jam transfluxit aquæ quantitas assumaturque m major quam n , prouti plerumque esse solet, evanescere censenda est, in utroque logarithmo affirmative sumto, quantitas exponentialis & habebitur utrobique $\log. 2$. At vero in logarithmo negative sumto statuenda est

$$\sqrt{\left(1 - c \frac{n^3 - nmm}{mmN} x \right)} = 1 - \frac{1}{2} c \frac{n^3 - nmm}{mmN} x \text{ \& proinde,}$$

$\log.$

$$\log. \left[1 - \sqrt{1 - c \frac{n^3 - n m m}{m m N} x} \right] = \log. \frac{1}{2} c \frac{n^3 - n m m}{m m N} x = \frac{n^3 - n m m}{m m N} x - \log. 2.$$

Hæ substitutiones si recte fiant, erit pro primo quem finximus affusio-
nis modo

$$(I) \quad t = \frac{\gamma m N}{n \sqrt{(m m - n n) a}} \times \left(2 \log. 2 + \frac{m m n - n^3}{m m N} x \right)$$

quæ posito rursus $m = \infty$ dat pro altero casu

$$(II) \quad t = \frac{\gamma N}{n \sqrt{a}} \times \left(2 \log. 2 + \frac{n}{N} x \right).$$

Sequitur ex istis formulis, minori quidem quantitate transfluere aquas,
ac si statim ab initio omni velocitate, quam in utroque casu post tempus
infinite acquirunt, effluerent: differentiam tamen nunquam certum trans-
gredi terminum & post tempus infinite finitis comprehendi terminis.

Corollarium 2.

§. 16. Quum convertimus æquationes inventas, obtinemus

$$(I) \quad x = \frac{2 m m N}{m m n - n^3} \left[\log. \left(1 + c \frac{-t}{a} \right) - \log. 2 + \frac{t}{2 a} \right], \&$$

$$(II) \quad x = \frac{2 N}{n} \times \left[\log. \left(1 + c \frac{-t}{c} \right) - \log. 2 + \frac{t}{2 c} \right]$$

$$\text{ubi } a, \text{ ut supra, } = \frac{\gamma m N}{n \sqrt{(m m - n n) a}} \& c = \frac{\gamma N}{n \sqrt{a}}.$$

Si præterea, ut in proximo Corollario, ponatur $t = \infty$, evanescit
unitas præ quantitatibus, exponentialibus, quæ supra omnem ordinem infinite
sunt, & fit $\log. \left(1 + c \frac{-t}{a} \right) = -\frac{t}{a}$ atque $\log. \left(1 + c \frac{-t}{c} \right) = -\frac{t}{c}$:
unde tunc erit resumtis valoribus litterarum a & c .

$$(I) \quad x = \frac{m t \sqrt{a}}{\gamma \sqrt{(m m - n n)}} - \frac{2 m m N}{m m n - n^3} \log. 2, \&$$

$$(II) \quad x = \frac{t \sqrt{a}}{\gamma} - \frac{2 N}{n} \log. 2.$$

Igitur si statim à fluxus initio utrobique aquæ omni, quam acquirere
possunt,

O

possunt, velocitate constanter effluerent, non excederet earum quantitas post tempus infinitum quantitatem pro eodem tempore theoriæ respondentem, nisi parvula quantitate, quæ in primo casu exprimitur per $\frac{2mmN}{mm-nn} \log. 2.$ & in secundo per $\frac{a N}{n} \log. 2.$ Atque si loco temporis infiniti sumas tempus tantum aliquot scrupulorum secundorum, idem *theoremæ* proxime locum habebit; ita ut si v. gr. post decem prima minuta secunda effluxerit quantitas Q , effluxura fere sit totidem minutis secundis proxime sequentibus $Q + \frac{2mmN}{mm-nn} \log. 2.$ vel in altero casu $Q + \frac{2N}{n} \log. 2.$

Scholium.

§. 17. Ad theoriam hætenus expositam pertinet etiam motus aquarum per siphones. Indicat autem theoria, posse siphonis axem utcumque inflecti, neque inde motum aquarum deturbatum iri, modo altitudo superficiei aqueæ supra orificium effluxus eadem maneat; cum præterea aquæductus, siphones aut diabetæ hujuscemodique vasa alia soleant esse cylindrica erit ut monui §.

13. quoties id contingit, ponendum $N = \frac{nn}{m} b$, intelligendo per b longitudinem canalís aut siphonis: in formulis quoque paragraphorum 14, 15, & 16, erunt quantitates sic interpretandæ, ubi de temporibus quæstio est, ut $2\gamma\sqrt{A}$ repræsentet tempus quod corpus impendit in descensum per altitudinem verticalem A à quiete coeptum.

Cæterum, ut dixi passim, nihil indicat singulare theoria hujus sectionis, quod sub sensu cadat, nisi in aquæ ductibus admodum longis, ad horizontalem valde obliquis & orificium non admodum strictum habentibus; hæc tria enim concurrunt ad retardandas sicque notabiles efficiendas accelerationes, quarum mensuræ potissimum theoriam commendant.

Est tamen & in his circumstantiis medium aliquod observandum, ne impedimenta ab adhæsiōe aquæ oriunda nimia sint

Quod attinet ad affusionem aquarum, mihi visus sum animadvertere, si
ver-

verticaliter fiat & cum impetu, tantum abesse, ut inde motus acceleretur, quin potius retardetur, nisi aquarum affusio fiat in totam superficiem æquabiliter eo, quem §. 4. exposui, modo, si enim aliter affundantur, motus aquarum in vase perturbatur, isque motus confusus effluxum retardat.

§. 18. Denique huc quodammodo pertinent experimenta ab Clar. Joanne Poleno instituta, ut refert in libro primo de *motu aquæ mixto*, p. 21. & seqq. quæ ideo hic alleganda esse censui, quod egregie demonstrant, ubique celeritatem ultimam in vasis constanter plenis eam esse, quæ integræ aquæ altitudini conveniat, si vasa non sint submersa, aut differentiæ altitudinum aquæ internæ & externæ in vasis submersis, quamvis de cætero nihil in illis sit, quod nunc novum adhuc sit, quia nullæ illic considerantur accelerationes.

Finge cylindrum, cujus axis habeat situm verticalem, amplitudinis veluti infinitæ; fundum integrum sit: in pariete autem fissura sit axi parallela, foramen habens parallelogrammi rectanguli, quæ à fundo ad cylindri usque summitatem extendatur. Puta porro aquam in cylindrum affundi æquabiliter, ita, ut æqualibus temporibus quantitates injiciantur æquales, effluent aquæ ex cylindro per fissuram: nec tamen ab initio eadem effluent quantitate, qua superne affunduntur, sed minori: igitur assurgit superficies aquæ in cylindro ad certam usque altitudinem asymptoton; si vero is jam intelligatur adesse terminus, immutata manebit altitudo aquæ & eadem quantitate effluent constanter aquæ, qua affunduntur: Apparet quoque, altitudinem aquæ in cylindro eo majorem fore, quo largius affundantur: Quæritur itaque auctis quantitibus aquarum dato tempore affundendis, in quam ratione crescere debeant altitudines, ad quas aquæ in cylindro assurgent.

Solutio hæc est. Sit altitudo aquæ, cum est in statu permanente $= a$: & abscindatur à superficie pars quæ sit $= x$, una cum differentiali dx : sit latitudo rimæ $= n$, habebimus veluti foramen amplitudinis $= n dx$, per quod aquæ effluunt velocitate $\sqrt{x}$: igitur quantitas aquæ dato tempore ibi effluentis est ut $n dx \sqrt{x}$, cujus integralis est $\frac{2}{3} n x \sqrt{x}$; quæ exprimit quantitatem aquæ dato tempore per rimæ longitudinem abscissam x effluentem: & sic quantitas aquæ eodem tempore per rimam integram effluens exprimetur per $\frac{2}{3} n a \sqrt{a}$: tantum autem effluit, quantum affunditur; hinc si quantitas aquæ dato illo tempore affusæ dicatur q , erit $\frac{2}{3} n a \sqrt{a} = q$. Id indicat quantitates aquarum

rum dato tempore affundendarum sequi rationem sesquiplicatam altitudinum, ad quas aquæ à fundo cylindri ascendunt : aut vicissim altitudines sequi rationem subtriplicatam quadratorum quantitatum, quibus aquæ dato tempore affunduntur.

§. 19. Solutio hoc problemate venio ad alterum Cl. Poleno consideratum.

Sit idem cylindrus, sed aquis in fossa veluti vase infinito stagnantibus, submersus; dicaturque altitudo submersionis $\equiv a$, quæritur nunc iisdem positis, ut antea, rursus æquatio inter altitudinem a superficiæ aqueæ internæ supra externam, & quantitatem q dato tempore affundendam.

Quod ad illam rimæ partem a , quæ aquas ejicit & supra aquam externam eminet, illam jam vidimus dato tempore erogare quantitatem $\frac{2}{3} n a \sqrt{a}$: residua autem rimæ pars submersa aquas ubique communi velocitate transmittit, ut ex infra dicendis patebit, & quidem velocitate $\sqrt{a}$, ita, ut multiplicata hac velocitate per magnitudinem rimæ submersæ $n a$, habeatur quantitas, quam dato tempore ejicit $\equiv n a \sqrt{a}$. Si utraque quantitas in summam conjiciatur, habebitur $(\frac{2}{3} a + a) n \sqrt{a} \equiv q$.

Ope hujus æquationis cognoscitur q ex datis altitudinibus a & a : aut vicissim altitudo a ex cognitis quantitatem a & q .

Convenire autem hanc æquationem admodum accurate cum experimentis, ipse ostendit celeberrimus eorum auctor, cujus solutio ab hac nostra non differt. Sequitur ex ista æquatione, elevationes a eo majores esse pro iisdem aquarum affusionibus, quo minor est altitudo submersionis a .

Experimenta quæ ad Sectionem V. pertinent.

Ad §. 5.

Vase usus sum §. 5. descripto cum tubulo vitreo (Fig. 30.) Primo autem obturavi orificium L M, tubumque R N aqua implevi, donec superficies ejus raderet foraminulum in a : aquam tunc tubo ingressam observavi extremitate attigisse punctum f : postea referato orificio L M, & aquis effluentibus novas affundebam in vas superius E F P Q adhibita diligentia, ut extremitas aquæ in f interea nec ascenderet nec descenderet. Hæc dum fierent

rent elevabatur superficies AB, nunquam autem certum terminum transgrediebatur; fuit nempe quantum videre potui, maxima altitudo PB seu FA $\frac{nn}{mm-nn} a$, denotante $\frac{nn}{m}$ rationem inter orificium inferius LM & superius RS, & a altitudinem verticalem orificii posterioris supra alterum.

Id vero solum est, quod ipsemet institui experimentum, quamvis multæ sint propositiones in hac sectione contentæ, quæ mereantur attentionem eæque satis inexpectatæ, non potui tamen de illis experimenta sumere; sunt enim ita comparatæ in vasis brevioribus, ut quod singulare habent, id sensus effugiat, rem autem experiri in longis aquæductibus commode non potui: cum aliis hæc dabitur occasio, theoriam hanc examinaturis, animum advertent ad sequentia:

I°. In fontibus salientibus observetur altitudo jactus integra; postmodum obturato prius orificio eodemque mox referato videatur aquæ quantitas, quæ effluat, dum aqua ad dimidiam altitudinem jactus integri, aut aliam partem quamcunque perveniat, quod quidem brevissimo eveniet tempore, illius quantitatis mensura sit longitudo cylindri super foramine, per quod aquæ exiliunt, exstructi, quam longitudinem vocavimus x , altitudinem vero jactus integram nominavimus a , altitudinemque jactus qui nondum totam attigerit altitudinem, observatam designavimus per v . Tum denique instituto calculo exploreter, num hæ quantitates recte respondeant æquationibus pro utroque affundendi modo exhibitis in paragrapho tertio.

II°. Fiant omnia, ut ante, hoc saltém discrimine, quod loco quantitatis effluentis tempus effluxus notetur, ut sic examinari possint formulæ paragraphi decimi tertii, & denique comparetur quantitas cum tempore fluxus, ut appareat num recte respondeat formulæ §. 14.

III°. Tum præcipue fiat id experimenti genus, quod indicavi paragrapho decimo sexto, observando scilicet, quantitates aquarum dimidiis temporibus respondentes; dixi autem, quantumvis magnum sumatur tempus, differentiam harum quantitatum nunquam exæquare $\frac{2mmN}{mmn-n} \log. 2$.

in priori, quem finximus, affundendi modo; aut $\frac{2N}{n} \log. 2$, in posteriori.

Istas autem differentias, utut nunquam perfecte orituras, minimo tamen tempore proxime adfuturas esse.

Quæ reliqua sunt in hac sectione Corollaria & Scholia quisque facile videbit, quo modo ad experimenta vocari possint: Velim autem, priusquam iudicium ferat, attentus sit ad omnes circumstantias ratione impedimentorum, contractionis venæ, aliorumque, quas nolo ubique repetere. Ad §. §. 17. & 18. Experimenta pro confirmatione problematis §. 17. ad vasa non submersa pertinentis, vide p. 26. *lib. cit.* Jll. Poleni.

Cum vero in vase submerso esset altitudo $a = 55$. *lin. Paris.* (quæ altitudo ei dicitur mortua) quinque instituit experimenta, in quibus altitudo, quam dicit, viva seu z erat successive linearum $8\frac{3}{4}$; 25; 42; 58 & $73\frac{1}{2}$: his substitutis valoribus in æquatione §. 18. exhibita sequitur, quantitates aquarum dato tempore affusarum fuisse ut 100; 199; 299; 396 & 495: actu affusæ fuerunt in ratione ut 100, 200, 300, 400, & 500: differentia tantilla est, ut dubitari possit, an non perfectus consensus futurus fuisset, si omnes mensuræ rectissime haberi potuissent.

Reliqua etiam experimenta à viro Cl. instituta cum theoria perfecte consentiunt: calculum eorum videre est apud ipsum Auctorem. E re autem duxi eadem hic apponere, quia ad argumentum hujusce sectionis pertinent, quamvis cæterum libenter fatear, me magis desiderare illa experimenta, quæ à calculo mutationem *momentanearum*, nemini quod sciam adhuc consideratarum, pendent, quam quæ statum *permanentem* supponunt.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ

SECTIO SEXTA.

De fluidis non effluentibus seu intra latera vasorum motis.

§. I.



Actenus consideravimus aquas effluentes ; nunc vero contem-
plabimur motus aquarum, quæ vasorum limites non præterfluunt.
Omnes hos motus ad duo reducam genera , ambo seorsim per-
tractanda :

1º. Cum fluidum in tubo infinite longo continue movetur versus
eandem plagam.

2º. Cum motibus reciprocis seu oscillatoriis agitur.

De motu aquarum per canales indefinite longos.

Casus I.

§. 2. Sit primo canalís horizontaliter positus , sed amplitudinibus data
quacunque varians lege : ponatur fluidum in illo ita positum , quod fieri
solet in tubis strictioribus , ut ambæ superficies extremæ situm obtineant
ad axem canalís perpendicularem & sic datâ quadam velocitate moveri in-
cipere. Hæc si ita sint , nullaque plane motus impedimenta adesse fingan-
tur , perspicuum est , motui aquarum nullum finem fore , quemadmodum
globus super tabula horizontali liberrime progrediens motum sine fine con-
tinuat. Attamen insignis inter utrumque motum intercedit differentia :
globi nempe partes omnes uniformi continue progrediuntur velocitate , in
aqua perpetuo motum mutant : Neque difficile erit motum istum definire ,
cum considerabimus , motum talem esse debere , ut *ascensus potentialis* totius
aquæ idem conservetur , qui ab initio motus fuit : Determinavimus autem
ascensum potent. aquæ certâ velocitate in canali quocunque motæ in sectionis ter-
tiæ

tia paragrapho secundo: Igitur nihil ad solutionem quæstionis amplius residuum est: Neque tamen abs re erit unum alterumve ejus rei exemplum attulisse.

Exemplum 1.

Si v. gr. canalis $BgfC$ (Fig. 31.) qui figuram habeat coni-truncati; intelligatur pars ejus $BGFC$ fluido plena moto versus gf ; habeantque particulae fluidi in GF velocitatem debitam altitudini v ; ac denique pervenerit fluidum in situm $bgfc$: His positis quæritur velocitas fluidi in gf . Vocabo autem altitudinem velocitati aquæ in gf debitam $= V$; Sit vertex coni in H ; diameter in $BC = n$; diameter in $GF = m$; longitudo $BG = a$; $Gg = b$, erit diameter $gf = \frac{ma - mb + nb}{a}$. Deinde quia solidum $BGFC$ est æquale solido $bgfc$ erit $BC^2 \times BH - GF^2 \times GH = bc^2 \times bH - gf^2 \times gH$: unde $bc^2 \times bH = BC^2 \times BH - GF^2 \times GH + gf^2 \times gH$: est vero $bH = \frac{BH}{BC} \times bc$: igitur $bc^3 = BC^3 -$

$$\frac{GF^2 \times GH \times BC}{BH} + \frac{gf^2 \times gH \times BC}{BH} = BC^3 - GF^3 + gf^3, \text{ seu}$$

$$bc = \sqrt[3]{Cub. n^3 - m^3 + \left(\frac{ma - mb + nb}{a}\right)^3},$$

Est vero per §. 3. sect. 3. *ascensus potent.* aquæ in situ $BGFC$

$$= \frac{3m^3v}{n(mm + mn + nn)}; \text{ pariterque } \textit{ascensus potent.} \text{ ejusdem aquæ in situ } bgfc$$

reperitur $= \frac{3a^3v}{c(\alpha\alpha + \alpha\epsilon + \epsilon\epsilon)}$, posito brevitatis ergo α & ϵ pro inventis valoribus diametrorum gf & bc . Erit igitur

$$V = \frac{m^3 \times (\alpha\alpha + \alpha\epsilon + \epsilon\epsilon) \times \epsilon \times v}{a^3 \times (mm + mn + nn)n}.$$

Ex hac formula facile colligitur, majori continue velocitate moveri particulas anteriores, minori posteriores, & sic, ut si foraminulum gf censetur infinite parvum, fiat velocitas aquæ in gf infinita & in bc infinite parva.

Exemplum 2.

Fuerit canalis compositus ex duobus tubis cylindricis BN & OP (Fig. 32.)

(Fig. 32.) inæqualis amplitudinis ; in ramo ampliore moveri ponatur fluidum B G F C versus P velocitate quæ respondeat altitudini v . Ita perspicuum est nullam motus mutationem adfore , priusquam superficies G F pervenerit in M N ; ab hoc autem temporis puncto motum continue variari donec fluidum omne subingressum fuerit tubum strictiorem. Quæritur itaque cum fluidum situm tenet $b g f c$, quænam futura sit velocitas superficiei $f g$; altitudinem autem hujus velocitatis designabimus per V .

Sint diametri G F & $g f$ ut n & m : longitudo B G vocetur $= a$; $b M = b$, erit $O g = \frac{n n}{m m} \times (a - b)$; *ascensus potent.* aquæ B G F C $= v$;

ascensus potent. aquæ $b g f c = \frac{n^4 a - n^4 b + m^4 b}{n^4 a} \times V$; ergo

$$V = \frac{n^4 a}{n^4 a - n^4 b + m^4 b} v.$$

Ex his intelligitur velocitatem primæ guttulæ in tubum strictiorem irumpentis respondere altitudini $\frac{n^4}{m^4} v$, hanc vero velocitatem citissime decre-

scere, ita ut postquam parvula fluidi pars transfluxit, jam possit censer $V = \frac{a}{a-b} v$, & cum omne fluidum transfluxerit, pristinam assumat velocitatem. Fuerit v. gr. diameter tubi amplioris decupla alterius , & effluet prima guttula ex tubo ampliore in strictiorem velocitate debita altitudini 10000 v : si vero decimam fluidi partem jam transfluxisse ponas , invenies altitudinem , quæ conveniat velocitati fluidi in tubo strictiori progredientis, proxime æqualem $\frac{10}{9} v$.

Si tempus quæras, quo fiat transfluxus fluidi O f , invenies illud æquale $\frac{2(n^4 a - n^4 b + m^4 b)^{\frac{3}{2}} - 2m^6 a \sqrt{a}}{3 m m (n^4 - m^4) \sqrt{a v}}$. Igitur omne fluidum transfluit tempore

$$\frac{2n^6 a \sqrt{a} - 2m^6 a \sqrt{a}}{3 m m (n^4 - m^4) \sqrt{a v}} = \frac{2(n^4 + m m n n + m^4) a}{3 m m (n n + m m) \sqrt{v}} , \text{ ubi per } \frac{a}{\sqrt{v}} \text{ intelligitur tem-}$$

pus, quo fluidum in tubo ampliori libere motum absolvit spatium a . Hæc vero, ut dixi, se ita habebunt si nulla sint motus impedimenta , simulque in toto tractu canalisi compositi velocitates amplitudinibus reciproce proportionales ponantur. Interim jam alibi monui non posse aquas lateri M N pro-

ximas hanc legem fervare. Cum itaque talis casus occurrit, eo magis conveniet motus realis cum theoria, quo longior fuerit pars bm & quo pauciora adfuerint obstacula.

§. 3. Quod si nunc canalis fuerit non horizontaliter sed oblique ad horizontem positus, apparet omnia similiter se habere, nisi quod *ascensus potent.* aquæ in omni situ æquandus sit *ascensui potent.* initiali aucto *descensu actuali*, id est, descensui verticali centri gravitatis. Atque si nullo impulsu aqua sua sponte se movere incipiat, erit simpliciter *descensus actualis* æqualis *ascensui potent.*

Igitur aqua continue progredi perget, quamdiu centrum gravitatis loco humiliori positum est, ac fuit ab initio motus. At vero cum tubus ita fuerit formatus & inflexus eaque fluidi quantitate repletus, ut centrum gravitatis pristinam altitudinem reassumere possit, tunc fluidum motum obtinebit retrogradum & sine fine oscillabitur. De isto motu præcipuam hujus sectionis partem faciente mox dicemus. Interea observare licet, fieri posse, ut aqua omnis ex loco humiliori per altiore sua sponte sine prævia fuctione præterfluat, si modo omnia debito modo se habeant.

De oscillationibus fluidorum in tubis recurvis.

Casus II.

§. 4. Dedit Pater meus in *Comm. Acad. Scient. Petrop.* tom. 2. theoremata quædam, quæ insignem manifestant usum quem theoria virium vivarum habet in rebus mechanicis. Illud vero quod tertio loco positum est ita se habet.

Fig. 33.

Sit tubus cylindricus $ABCH$ (*Fig. 33.*) *utrobique apertus atque inflexus in duo crura* BA & CH *ad partem horizontalem* BC ; *sit sinus anguli* $ABC = p$, & *sinus anguli* $HCB = q$; *existente nimirum sinu toto* $= 1$; *sit porro ille tubus aqua plenus usque ad horizontalem* MN ; *voceturque* L *longitudo partis tubi* $MBCN$ *aqua plena*: *Erunt agitati liquoris in hoc tubo oscillationes tam majores, quam minores omnes tautochrone atque ejusdem durationis cum oscillationibus minimis penduli alicujus simplicis, cujus longitudo*

$$= \frac{L}{p+q}.$$

Huic theoremati eodem auctore subnectitur tale corollarium.

Si

Si anguli ABC & HCB sunt recti, qui unicus casus est à Newtono solutus, erit longitudo penduli simplicis, quod oscillanti aqua isochronum est, $= \frac{1}{2} L$, ut invenit Newtonus.

§. 5. Hæc sunt quæ adhuc cum publico communicata fuerunt circa oscillationes fluidorum, & quidem primo à Newtono, ut undarum naturam, à Patre meo, ut fertilitatem principii *virium vivarum* ostenderet. Quia vero nostrum institutum est pleniorē dare de motibus aquarum theoriam, è re erit istud argumenti genus in tota sua extensione prosequi: Igitur disquiram, quibus modis oscillationes fluidi inæquales fiant isochronæ, & quibus non item? Dein pro prioribus dabo longitudinem penduli simplicis tautochroni, pro alteris tempus durationis indicabo: tubos autem utcunque inflexos & inæqualiter amplos considerabo.

Lemma.

§. 6. Sit cAd (Fig. 34.) uter seu canalis aqua plenus formæ cujuscunque datæ definens utrobique in duos canales cylindricos ac & fd , utcunque ad horizontem inclinatos & cujuscunque amplitudinis, quorum alterum plenum aqua ponam usque in a , alterum usque in f ; oporteat determinare altitudinem centri gravitatis omnis aquæ, ex data altitudine centri gravitatis aquæ in utre cAd contentæ, cæterisque quantum sufficit præcognitis.

Solutio.

Fuerit centrum gravitatis aquæ in vase cAd contentæ in C , ductaque intelligatur per istud punctum C verticalis AB , deinde ducantur horizontales am , cg , fn , & dh una cum verticalibus cb & de . Ponatur $ac = a$: $fd = \alpha$: $bc = b$: $ed = \epsilon$: amplitudo tubi $ac = g$: amplitudo tubi $fd = \gamma$: sit porro massa aquea seu capacitas canalis $cAd = M$, linea $Ag = f$: $Ab = \phi$: $AC = m$: Dividantur lineæ mg & nb bifariam punctis D & E & sic erunt centra gravitatis aquarum in tubis cylindricis contentarum in altitudinibus punctorum D & E .

His positis sit $AD = f + \frac{1}{2}b$: $AE = \phi + \frac{1}{2}\epsilon$: massa aquæ in $ac = ga$: in $fd = \gamma\alpha$: Igitur si centrum gravitatis quæsitum pro omni aqua $acAdf$ intelligatur in altitudine F positum, habebitur, ut constat in mechanicis, AF multiplicando massam aquæ in ac per DA , massam aquæ fd per EA & massam aquæ

aquæ in $c A d$ per CA , aggregatumque horum productorum dividendo per summam harum massarum. Unde invenitur.

$$AF = \frac{ga \times (f + \frac{1}{2}b) + \gamma a \times (\phi + \frac{1}{2}\zeta) + Mm}{ga + \gamma a + M}$$

Problema.

§. 7. Determinare ubique velocitates aquæ oscillantis, posito oscillationes ultra terminos tuborum cylindricorum non divagari.

Solutio.

Sit aqua oscillationem inchoans in situ $a c A d$ perveneritque postmodum in situm $o c A d p$, retentisque denominationibus in præcedente paragrafo factis, ponatur $ao = x$; erit $fp = \frac{gx}{\gamma}$; unde (si nempe centrum gravitatis omnis aquæ descendisse putetur ex F in O) erit vi præcedentis paragraphi

$$AO = \frac{g \times (a-x) \times (f + \frac{1}{2}b - \frac{bx}{2a}) + \gamma \times (a + \frac{gx}{\gamma}) \times (\phi + \frac{1}{2}\zeta + \frac{\zeta gx}{2a\gamma}) + Mm}{ga + \gamma a + M}$$

Inde deducitur descensus centri gravitatis seu *descensus actualis*

$$FO = \frac{(b - \zeta + f - \phi)gx - \left(\frac{bg}{2a} + \frac{bg\zeta}{2a\gamma}\right)xx}{ga + \gamma a + M}$$

Sit nunc velocitas aquæ in tubo $a c$ (cum nempe superficies est in o) talis quæ respondeat altitudini v , & erit tunc *ascensus potent.* aquæ in altero tubo $= \frac{gg}{\gamma\gamma} v$: pariterque *ascensus potent.* aquæ $c A d$, erit proportionalis altitudini v , eamque proinde ponemus $= Nv$ (ubi N pendet à figura utris $c A d$ & determinari potest per §. 2. Sect. 3.) Jam vero si multiplicatis ubique *ascensibus potentialibus* per suas massas producta dividantur per summam massarum, habebitur *ascensus potent.* omnis aquæ $o c A d p =$

$$\frac{(ga - gx + \frac{agg}{\gamma} + \frac{g^3x}{\gamma\gamma} + MN)v}{ga + \gamma a + M}$$

Et quia hic *ascensus potentialis* est æqualis *descensui actuali* FO paullo ante invento, erit

$$v =$$

$$v = \frac{(b - c + f - \phi)gx - \left(\frac{bg}{2a} + \frac{bgg}{2a\gamma}\right)xx}{ga - gx + \frac{agg}{\gamma} + \frac{g^3x}{\gamma\gamma} + MN} \quad \text{Q. E. I.}$$

Corollarium 1.

§. 8. Quia linea $mn = mg - nb + gb = b - c + f - m$, ponemus $mn = c$, simulque multiplicabimus denominatorem & numeratorem per $2\gamma\gamma\alpha\alpha$: Ita vero habebimus

$$v = \frac{2g\gamma\gamma\alpha\alpha cx - (g\gamma\gamma\alpha b + gg\gamma\alpha c)xx}{2g\gamma\gamma\alpha\alpha\alpha - 2g\gamma\gamma\alpha xx + 2gg\gamma\alpha\alpha\alpha + 2g^3\alpha\alpha x + 2\gamma\gamma\alpha\alpha MN}$$

Corollarium 2.

§. 9. Si fiat $v = 0$, patet tunc valorem x denotare totam fluidi superficiei excursionem in tubo ac , quæ sic invenitur æqualis $\frac{2\gamma\alpha\alpha c}{\gamma\alpha b + g\alpha c}$, in altero vero tubo fit $= \frac{2g\alpha\alpha c}{\gamma\alpha b + g\alpha c}$.

Igitur poterit aqua in tubo strictiori ad quamcunque elevari altitudinem, si modo ratio amplitudinum g & γ fiat magna sumatur.

Corollarium 3.

§. 10. Pars illa vasis cAd , quam neutra superficieum unquam attingi ponimus, nihil pertinet ad istas fluidi excursionses five augendas five diminuendas: facere tamen potest, ut inferius ostendetur, ad accelerandas retardandasque oscillationes.

Corollarium 4.

§. 11. Ponatur uterque tubus communis amplitudinis, erit, posito nempe $g = \gamma$,

$$v = \frac{2g\alpha\alpha cx - (g\alpha b + g\alpha c)xx}{2g\alpha\alpha\alpha + 2g\alpha\alpha\alpha + 2\alpha\alpha MN}$$

In hoc casu maxima superficiei utriusque velocitas est, cum in medio totius excursionis positæ sunt, secus ac fit, cum tubi sunt inæqualis amplitudinis.

Notandum quoque est, similes esse inter se retardationes & accelerationes in distantis similibus superficierum à punctis mediarum excursionum, id est, à locis maximarum velocitatum.

Theorema.

§. 12. Cum amplitudines tuborum cylindricorum prædicto modo sunt æquales, erunt oscillationes tam majores quam minores inter se Isochronæ, modo superficies nunquam descendant infra orificia eorundem tuborum.

Demonstratio.

Ex mechanicis constat, quod si mobile oscillans spatium perfecerit $\equiv x$, habeatque in singulis locis elementum temporis $dt = \frac{m dx}{\sqrt{nx - xx}}$, intelligendo per m & n quantitates constantes, id faciat oscillationes suas tam majores quam minores eodem tempore.

Quia vero in nostro casu est

$$v = \frac{2gaacx - (gab + ga^2)xx}{2gaaa + 2gaax + 2aaMN},$$

& quia velocitas ipsa est æqualis $\sqrt{v}$, erit

$$dt = dx \sqrt{\left(\frac{2gaaa + 2gaax + 2aaMN}{gab + ga^2} \right)} : \sqrt{\left(\frac{2aacx}{gab + ga^2} - xx \right)},$$

ubi pariter omnes litteræ constantem habent valorem præter x , quæ spatium percursum denotat; patet has quoque fluidi oscillationes isochronas fore, Q. E. D.

Problema.

§. 13. Invenire longitudinem penduli simplicis, quod sit tautochronum cum oscillationibus fluidi præfatis.

Solutio.

In mechanicis demonstratur, quod, cum $dt = \frac{m dx}{\sqrt{nx - xx}}$, sit longitudo penduli simplicis tautochroni $\equiv \frac{1}{2} m m$: Erit igitur in nostro casu de quo sermo est longitudo penduli quæsitæ $\equiv \frac{gaaa + gaax + aaMN}{gab + ga^2}$. Q. E. I.

Corol-

Corollarium. 1.

§. 14. Si ponatur canalis cAd ejusdem amplitudinis cum tubis conjunctis, ejusque longitudo vocetur l , erit massa aquæ in eo contentæ, quam vocavimus $M = gl$; & *ascensus potent.* aquæ in illo contentæ, quem posuimus Nv , erit $=v$, ita ut habeatur $N = 1$. Substitutis autem, istis valoribus pro litteris M & N , prodit longitudo penduli tautochroni pro isto casu particulari $=$

$$\frac{aaa + a\alpha\alpha + \alpha\alpha l}{ab + a^2} = \frac{a\alpha}{ab + a^2} \times (a + \alpha + l) = \frac{a + \alpha + l}{\frac{b}{a} + \frac{\alpha}{a}}$$

Quia vero $a + \alpha + l$ est longitudo totius tractus aqua pleni & $\frac{b}{a}$ significat rationem sinus anguli bac ad finum totum pariter atque $\frac{\alpha}{a}$ denotat rationem sinus anguli efd ad finum totum, videmus non differre nostram solutionem ab illa, quam Pater meus pro isto casu dedit, quamque supra recensui §. 4.

Corollarium 2.

§. 15. Si ponatur canalis cAd infinitæ ubique amplitudinis, erit $MN = 0$ (per §. 2. *sect.* 3.) & longitudo penduli tantochroni $= \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\alpha}$, qua-

fi nempe totus canalis intermedius cAd abesset, tubique cylindrici inter se immediate essent conjuncti.

Est tamen hic speciale aliquid considerandum, quod infra monebo.

Scholion.

§. 16. Complectitur hoc theorema omnes casus, qui oscillationes tantochronas faciunt, ubi tubi ac & pd sunt recti: cum vero hi tubi, in quibus fluidi superficies excurrunt, incurvati sunt, dantur alii insuper tantochronismi casus, quos facile foret determinare, si hisce diutius immorari vellemus. Cæterum cum tubi hi inæqualis amplitudinis sunt, fiunt quoque tempora oscillationibus diversarum magnitudinum respondentia inæqualia, & quomodo tempus tale definiri debeat unicuique apparet ex §. 8. ubi velocitatem fluidi in quolibet puncto dedimus.

Hæc

Hæc autem de oscillationibus finitis. Si nunc oscillationes minimas esse censeamus, videbimus illas fieri omnes inter se tantochronas, manente eadem fluidi quantitate, eodemque canali, quæcunque interea sint canalis figura & amplitudines. Id exponam in sequenti paragrapho.

Theorema.

§. 17. Oscillationes minimæ fluidi in quocunque canali oscillantis, quamvis inæquales inter se, sunt omnes Isochronæ.

Demonstratio.

Cum oscillationes sunt minimæ, possunt illæ canalis particulæ, in quibus superficies fluidi agitantur, pro cylindricis haberi, igitur manentibus denominationibus iisdem, manebit valor, quem assignavimus litteræ v in §. 8. & ex eadem ratione sequitur, litteras a , b , α , ϵ & x ceu infinite parvi valoris negligi posse præ $\frac{M}{g}$, sic ut in præfenti casu censeretur debeat

$$v = \frac{2g\gamma a \alpha c x - (g\gamma a b + g g a b) x x}{2\gamma a \alpha M N}$$

Sunt igitur vi paragraphi duodecimi oscillationes omnes, quoad minimæ sunt, inter se Isochronæ. Q. E. D.

Problema.

§. 18. Determinare longitudinem penduli simplicis tautochroni cum oscillationibus minimis fluidi in canali quocunque agitati.

Solutio.

Quia in omni motu est elementum temporis $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$, erit nunc

$$dt = dx \sqrt{\left(\frac{2\gamma a \alpha M N}{g\gamma a b + g g a b}\right) : \left(\frac{2\gamma a \alpha c x}{\gamma a b + g a \epsilon} - x x\right)}$$

Igitur vi Paragraphi decimi tertii erit longitudo quæfita penduli cum prædictis oscillationibus tautochroni $= \frac{\gamma a \alpha M N}{g\gamma a b + g g a \epsilon}$. Q. E. I.

Scholium.

§. 19. Quamvis jam passim monuerim, quid intelligendum sit per quan-

quantitates M & N , tamen hic apponam totam constructionem, ut natura rei eo magis unicuique pateat.

Fuerit canalis qualiscunque $AB CDE$, (Fig. 35. *a* & *b*) aqua plenus usque in B & D ; ponatur sinus totus $\equiv 1$, sinus anguli $DBC \equiv \frac{b}{a} \equiv m$, sinus anguli $BDC \equiv \frac{c}{a} \equiv n$, erit longitudo penduli tautochroni $\equiv \frac{\gamma MN}{mg\gamma + ngg}$, ubi g denotat amplitudinem canalis in B & γ amplitudinem ejus in D .

Concipiatur nunc longitudo canalis BCD fluido plena in rectam extenta bcd , super qua ceu axe fiat curva FGH , quæ sit scala amplitudinum in locis homologis, ita, ut posita $bc \equiv BC$ fit cG ad bF , ut amplitudo in C ad amplitudinem in B . Igitur si bF repræsentet amplitudinem in B , tunc spatium $b d H F$ repræsentabit magnitudinem M . Deinde super eodem axe bd construatur alia curva LMN , cujus applicata cM fit ubique $\frac{bF^2}{cG}$ & erit (per §. 2. sect. 3.) $N \equiv$ spatio $b d N L$ diviso per spatium $b d H F$, ita ut fit $M \times N \equiv$ spatio $b d N L$, quod multiplicatum per $\frac{\gamma}{mg\gamma + ngg}$ dabit longitudinem penduli tautochroni.

Corollarium 1.

§. 20. Si tubus BCD sit ubique ejusdem amplitudinis, ejusque longitudo dicatur l , erit FH linea recta ipsi bd parallela, pariter atque LN : hinc spatium $b d N L \equiv gl$ & longitudo penduli tautochroni $\equiv \frac{l}{m+n}$.

Corollarium 2.

§. 21. Sit BCD canalis conicus longitudinis l ; erit cG (posita $bc \equiv x$) $\equiv \left(\frac{x}{l} [\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g} \right)^2$; unde $cM \equiv gg: \left(\frac{x}{l} [\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g} \right)^2$; ergo spatium $bc ML \equiv \frac{gg l}{\sqrt{g\gamma} - g} - \frac{gg l}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}}: \left(\frac{x}{l} [\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g} \right)$ & proinde totum spatium $b d N L \equiv \frac{gg l}{\sqrt{g\gamma} - g} + \frac{gg l}{\sqrt{g\gamma} - \gamma} \equiv \frac{gg l}{\sqrt{g\gamma}}$: Est igitur longitudo penduli tautochroni cum oscillante aqua $\equiv \frac{l\sqrt{g\gamma}}{m\gamma + ng}$.

Hinc intelligitur cæteris paribus oscillari aquam tardissime cum amplitudi-

tudines in B & D sunt in ratione reciproca sinuum angulorum respondentium DBC & BDC: dein quo longior sit pars aqua plena & quo minores anguli modo dicti, eò pariter tardiores fieri oscillationes.

Porro comparatis inter se tubis cylindricis & conicis, positisque angulis BDC & DBC æqualibus, perspicuum est, citius oscillari aquam cæteris paribus in conicis quam cylindricis, quia nempe $\frac{l\sqrt{g\gamma}}{\gamma+g}$ semper minor est quam $\frac{1}{2}l$, quæcunque ratio inæqualis intercedat inter g & γ . Si porro prædicti anguli inæquales ponantur, fieri potest tam ut tardius quam ut citius oscilletur aqua in uno tuborum genere respectu alterius, quod ut exemplo confirmem, ponam angulum DBC rectum, id est, $m=1$, & sinum alterius anguli BDC seu $n=\frac{1}{4}$, ita erit longitudo penduli pro tubis cylindricis $=\frac{4}{3}l$: Si vero sub iisdem reliquis circumstantiis tubo cylindrico substituas conicum, qui amplitudinem in B habeat quadruplo majorem, quam est amplitudo in D, habebis, posito $\gamma=\frac{1}{4}g$, longitudinem penduli $=l$: longius est itaque cæteris paribus pendulum tautochronum pro tubo conico quam pro cylindrico, & tardius fiunt oscillationes in illo, quam in hoc: sed si nunc, manentibus rursus reliquis, tubum conicum strictiorem ponamus in B quam in D, contrarium erit: fuerit v. gr. $\gamma=4g$, erit longitudo penduli $=\frac{8}{7}l$, & proinde minor, quam si tubus cylindricus foret; rursusque minor erit, si amplitudinem in B admodum majorem ponas, quam est in D: ita si fuerit $\gamma=\frac{1}{64}g$, erit longitudo penduli $=\frac{8}{17}l$, ut ante. Notabile est, ut in præcedente etiam vidimus exemplo, quod, manentibus amplitudine in B, situ canalis BCD ejusdemque longitudine, duæ semper diversæ definiri possint amplitudines in D pro eadem penduli tautochroni longitudine, nisi cum anguli DBC & BDC sunt æquales. Hujus rei exemplum est particulare, quod, five amplitudo in D æqualis sit amplitudini in B, five rationem ad eandem habeat quadratam sinus ang. BDC & sin. ang. DBC, eodem tempore oscillationes fluidi absolvantur in tubo utroque.

Scholion Generale.

§. 22. Experimenta de oscillantibus fluidis ita sumpsi, ut crebra tentatione longitudinem penduli simplicis Isochroni invenirem, hancque longitudinem in diversis casibus talem præter propter esse observare potui, quam
theo

theoria in hac sectione indicat ; aliquando tamen longitudinem illam debitâ paullo majorem inveni ; cujus rei rationem haud difficulter hanc esse vidi, quod frictiones fluidi excursions non solum diminuant , sed & retardent , ut & , quod tubi eo in loco , quo inflectuntur , strictiores esse soleant : Id posterius , si omni cura evitetur , sique ipsæ inflexiones non uno angulo sed lente fiant , & si denique pro liquore oscillante mercurius purissimus adhibeatur , dubium mihi nullum superest , fore ut experimenta præmissam theoriam ad amissim confirmet , ita , ut operæ pretium non duxerim anxie de illis inquirere.

Id tamen ratione experimentorum à me institutorum superaddam , quod amplitudines tuborum ante experimentum in diversis eorum locis accurate exploraverim ope columellæ mercurii , quæ dum gradatim totam longitudinem tubi percurreret , longitudinibus suis diversis , quarum mensuras assidue accipiebam , amplitudinum variationes ubique manifestabat : Et hæc quidem amplitudines ita in tubo erunt explorandæ , postquam jam fuerit incurvatus , nam ab incurvatione amplitudines admodum decrescunt. Hæc ratio fuit , quod in primo hanc in rem à me sumto experimento , successus expectationem meam fefellerit : Tubum nempe vitreum , cujusmodi pro barometris conficiendis adhibere solent , satis amplum eundemque fere perfecte cylindricum , incurvare feci , ut ostendit propemodum Figura vigesima septima , eoque deinde mercurio maximam partem repleto , oscillationes ejus longe tardius fieri vidi , quam expectaveram , quia non attendi , tubum ab incurvatione in D insigniter fuisse constrictum , præsertim ubi anguli formantur. Hujus igitur rei , ut rationem haberem , tubis deinceps lente incurvatis usus fui , quales ostendit Fig. 35. a. in iisque amplitudines post incurvationem diligenter exploravi.

HYDRODYNAMICÆ

SECTIO SEPTIMA.

De motu aquarum per vasa submersa, ubi exemplis ostenditur, quam insigniter utile sit principium conservationis virium vivarum, vel iis in casibus, quibus continue aliquid de illis perdi censendum est.

P A R S P R I M A.

De descensu aquarum.

S. I.



Inge cylindrum aquâ plenum, cujus fundum perforatum sit, illudque ad certam altitudinem aquæ stagnanti veluti infinitæ submersum, & facile intelliges superficiem aquæ in cylindro contentæ descensuram, & quidem infra superficiem aquæ exterioris, dein rursus ascensuram & sic porro. Hæ vero oscillationes admodum differunt ab oscillationibus in præcedente sectione consideratis, in quibus nempe motus reciproci semper sunt inverso ordine iidem cum motibus, qui præcellerunt. Quis autem hic præsumat refluxum aquarum seu ascensum eundem fore, qui fuerat descensus. Talia si quis statueret, is certe vehementer falleretur, etiam si vel nihil motus diminueretur ab adhæsiōne aquarum ad latera vasis hujuscemodique aliis impedimentis, non secus atque regulæ motuum à percussione pro corporibus elasticis valde diversæ sunt ab iis, quæ pro corporibus mollibus valent, utut in utroque casu corpora liberrime moveri censeantur. Utor hoc simili, quod argumentum nostrum egregie illustrat: Prouti enim regulæ motuum in corporibus mollibus recte determinatur, si post collisionem ea *vis vivæ* pars deperdita censeatur, quæ in compressionem corporum impena fuit (neque enim hæc ut in corporibus elasticis restituitur motui progressivo) ita ascensus fluidi non minus recte definietur, si accurate examinetur, quantum *vis vivæ* singulis momentis motui particularum aquearum intestino communicetur, nunquam rediturum ad motum progressivum, de quo sermo est.

S. 2. Cum itaque res eo deducta sit, ut exploretur, quantum *vis vivæ* in motibus istis reciprocis continue perdat, disquisitionem ab hoc incipimus.

Primò

Primò autem patet omnem vim vivam quæ particulis effluentibus ineſt tranſire ad aquam externam nec ullo modo promovere ſubſequentem aſcenſum ſeu influxum aquæ externæ in tubum: Nimis hæc eſt clara hypotheſis, quam ut majori explicatione opus habeat: reſpicit autem aquarum effluxum & in hoc unica eſt conſideranda. Venit jam altera, quæ pertinet ad aquarum influxum.

Secundò igitur non minus perſpicuum mihi quidem eſt, quod irruente aqua per foramen majori velocitate, quam quæ aquæ internæ aſcendenti ineſt, exceſſus ille rurfus motum quendam inteſtinum in eadem aqua interna cieat, parum aut nihil ad aſcenſum conferentem. Hoc ſi ita ſit, ponaturque amplitudo foraminis $\equiv 1$, amplitudo cylindri $\equiv n$, aſcenſus potent. guttulæ irruentis $\equiv nnv$, ejusque velocitas $\equiv n\sqrt{v}$, retinebit hæc particula motu ſuo, quem cum reliqua aqua interna communem habet, velocitatem $\sqrt{v}$, conſervabitque proinde aſcenſum potent. v ; reliquum autem aſcenſus potent. nempe $nnv - v$ ad motum particularum inteſtinum tranſiſſe cenſendum eſt. Hypotheſis iſta, quamvis Phyſica ſit & proxime tantum vera, tamen magnam habet utilitatem ad motus fluidorum ſine notabili errore determinandos, quoties in vaſe uniformis continuitas, quæ hætenus aſſumta fuit, præſumitur, veluti cum aqua per plura foramina tranſire cogitur; Imo crediderim unicam eſſe, cujus ope hujusmodi motus mira phænomena recte explicari poſſint. Quapropter velim, ut recte animo perpendatur, antequam ad alia divertatur lector.

§. 3. Jam igitur quæſtionem ipſam examinabimus, incipiendo ab aquarum deſcenſu. Concipiatur cylindrus AIMB, (Fig. 36.) aqua plenus Fig. 36. uſque in XY & aquæ infinitæ RTVS ſubmerſus, ita ut longitudo ejus ſit in ſitu verticali habeat ejus fundum lumen PL, per quod aqua ex vaſe in aquam circumfluam effluere poſſit. Quæritur velocitas aquæ internæ, poſtquam ſuperficies ejus per datum ſpatium XC vel YD deſcendit, poſita MY vel IX $\equiv a$, MV $\equiv b$, MD $\equiv x$, amplitudine foraminis $\equiv 1$, & denique amplitudine cylindri $\equiv n$.

Solutio eadem erit, quam pro ſimili quæſtione, ſed ea admodum generali, dedimus in ſeſtione tertia: obſervetur tantum, quod ſumta particula aquæ infinitè parva CDFE æquali guttulæ PLON eo ipſo tempore ejeſtæ, deſcenſus actualis ſit nunc æſtimandus ex altitudine DV vel CT, cum in altero caſu deſiniendus erat ex tota altitudine DM.

Sit nempe velocitas ſuperficie aquæ CD ea, quæ debetur alti-

altitudini v , & in situ infinite propinquo E F respondebit eadem velocitas altitudini $v - dv$; Et cum *ascensus potentialis* aquæ C D M L P I C fit v , obtinebitur *ascensus potent.* ejusdem aquæ in situ proximo E F M L O N P I E, si multiplicetur massa E F M L P I E $(nx - ndx)$ per suum *ascensum potent.* $(v - dv)$ ut etiam guttula L O N P (ndx) per suum itidem *ascensum potentialem* nnv , aggregatumque productorum dividatur per summam massarum (nx) : habetur itaque *iste ascensus potentialis*
$$= \frac{(nx - ndx) \times (v - dv) + ndx \times nnv}{nx}$$

$$\text{feu } \frac{xv - vdx - xdv + nnvdx}{x}.$$

$$\text{Est proinde incrementum } \textit{ascensus potent.} = \frac{-vdx - xdv + nnvdx}{x}.$$

(*conf. §. 6. sect. 3.*) Istud vero incrementum æquale censendum est cum *descensu actuali* infinitè parvo, qui (per §. 7. *sect. 3.* & per annotationem modo datam) est $= \frac{(x - b)dx}{x}$. Habetur itaque talis æquatio

$$-vdx - xdv + nnvdx = (x - b)dx,$$

quæ debito modo integrata mutatur in hanc

$$v = \frac{1}{nn-2} \times \left(x - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-2}} \right) - \frac{b}{nn-1} \times \left(1 - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-1}} \right).$$

Ex ista vero æquatione talia sequuntur corollaria.

§. 4. Fuerit amplitudo cylindri veluti infinita ratione foraminis, & erit censendum $v = \frac{x-b}{nn}$; ipsaque altitudo pro velocitate aquæ, dum effluit, est $= x - b$. Unde consequens est, aquam effluere velocitate, quam grave acquirit cadendo ex altitudine superficiei internæ supra externam, & eo usque effluet, donec ambæ superficies sint ad libellam positæ, tuncque omnis motus cessabit: adeoque eadem lege aquæ effluunt, quasi fundum situm I M mutaret cum T V.

Cum vero foramen non potest ceu infinite parvum considerari, descendit superficies aquæ internæ infra externam; atque ut innotescat ad quamnam profunditatem xy sit descensura superficies C D, facienda est $v = 0$, seu

$$(nn-1) \left(\frac{x^{nn-1}}{a^{nn-2}} - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-1}} \right) = (nn-2) \times \left(\frac{b^{nn-1}}{a^{nn-1}} - \frac{b^{nn-1}}{a^{nn-2}} \right),$$

nunquam autem superficies interna tantum descendet infra superficiem externam

nam, quantum super eandem elevata fuerat, provenit iste defectus *ab ascensu* pot. aquæ durante descensu ejectæ, cui debet esse proportionalis.

§. 5. Notabile est, quod cum eo profundius descendat aqua in cylindro, quo magis ab initio descensus fuerit elevata & quo majori lumine perforatum est fundum, nunquam tamen omnis aqua ex cylindro effluere possit quantumvis fuerit ante descensum elevata & pars cylindri submersa utlibet parva, ipsumque simul foramen vel totum fundum exhaurire ponatur.

§. 6. Velocitas superficiei aquæ internæ maxima est, cum sumitur

$$x = \left(\frac{a^{nn-1}}{nn a - nn b - a + 2b} \right)^{1:(nn-2)}$$

Si proinde $n = 1$, existente scilicet orificio cylindri toto aperto, fit $x = b$, & maxima est velocitas, cum ambæ superficies sunt in eadem altitudine positæ.

Quia vero multa sunt, quæ ex hisce æquationibus dignosci nequeunt in duobus casibus, nempe $nn = 1$ & $nn = 2$, hique multa habent particularia, eisdem seorsim jam attingam.

§. 7. Sit primo $nn = 1$, & erit $-x dv = (x - b) dx$ (per §. 3.) vel $-dv = dx - \frac{b dx}{x}$, quæ sic integrata, ut fit simul $v = 0$ & $x = a$, dat $-v = x - a + b \log. \frac{a}{x}$ seu $v = a - x - b \log. \frac{a}{x}$: Exinde talia deduci possunt.

I°. Ut obtineatur maximus descensus, faciendum est $a - x - b \log. \frac{a}{x} = 0$; patet autem ex ista æquatione, nunquam negativum valorem obtinere litteram x , imo nequidem totam evanescere sine contradictione, nisi ponatur $\frac{a}{b} = \infty$, quod indicat fieri non posse, ut omnis effluat aqua durante descensu in isto casu & multo minus in reliquis, quod confirmat paragraphum quintum.

II°. Velocitas maxime talis est, quæ debetur altitudini $a - b - b \log. \frac{a}{b}$, atque si differentia inter a & b , quam ponam $= c$, fit valde parva, existentibus nimirum excursionibus fluidi perexiguâ ratione longitudinis, ad quam
cylind-

cylindrus est submersus, poterit $\log. \frac{a}{b}$ cenferi $= \frac{c}{b} - \frac{cc}{2bb}$ ipsaque proinde altitudo maximæ debita velocitati seu $a-b-b\log. \frac{a}{b} = \frac{cc}{2b}$, quod motum admodum lentum fore arguit,

Demonstrabo autem in sequentibus, totum motum cæteris paribus eundem manere, cum cylindri censentur infinite submersi, quocunque foramine fundum fuerit perforatum, ita ut motus aquæ internæ à diminuto foramine non retardetur; quod quamvis prima fronte admodum paradoxum videatur, non poterit tamen vera ejus ratio physica effugere animum jād hæc attentioem. In eo scilicet versatur, quod *vis viva*, quæ in tubo generatur, veluti infinita sit præ vi viva aquæ per foramen transeuntis nec adeoque hujus foraminis consideratio computum diversum faciat.

Demonstrabimus etiam similes esse motus reciprocos & oscillationes tam majores quam minores inter se esse Isochronas, atque pro hisce longitudinem penduli simplicis tautochroni determinabimus.

§. 8. Fuerit nunc $nn = 2$; Ita vero habetur vi §. 3. $v dx - x dv = (x-b) dx$, vel $\frac{x dv - v dx}{xx} = \frac{(b-x) dx}{xx}$, quæ recte integrata abit in hanc $v = \frac{bx}{a} - b + x \log. \frac{a}{x}$. Si fiat $\frac{bx}{a} - b + x \log. \frac{a}{x} = 0$, dabit x locum maximide-
scensus; locus autem maximæ velocitatis habebitur, faciendo $x = c \frac{b-a}{a}$, ubi per c intelligitur numerus, cujus logarithmus est unitas.

Postquam sic varios perstrinximus casus pro diversis foraminum magnitudinibus, superest ut etiam consideremus, quid in diversis altitudinum a & b casibus succedere possit.

§. 9. Et primo quidem si b nulla statuatur præ a , quod fit cum cylindri fundum tantum radit superficiem aquæ exterioris, tunc prodit

$$v = \frac{1}{nn-2} \left(x - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-2}} \right)$$

quæ quidem æquatio non nisi forma differt ab illa, quæ §. 14. Sect. 3. data fuit pro eo casu, quo aquæ ex cylindro in aërem ejici ponuntur. Et sæpe etiam
exper-

expertus sum cylindrum eodem tempore evacuari, five aquæ in aërem eji-
 ciantur, five fundum aquæ stagnanti tantillum submergatur. Docet hæc ex-
 perientia parum aut nihil ob stare aërem externum effluxui, cum resistentia
 plus quam obtingentis major notabiliorum effectum non exerat. Quia adeo-
 que iste casus nihil particulare habet, quod non loco citato monitum fuerit,
 huic non ulterius immorabimur: Inquiremus potius, quid fieri debeat, cum
 elevatio aquæ internæ super externam, quanta ab initio descensus est, sumi-
 tur valde parva & negligenda præ immersione cylindri; cui hypothese satisfacit,
 cum excessus altitudinis a super altitudinem b (quem excessum rursus vocabi-
 mus (ut §. 7.) c) est admodum parvus.

§. 10. Cum itaque ponitur $a - b = c$, ponendum etiam erit $a - x = z$,
 tumque utraque quantitas, nempe c & z , erunt negligendæ præ quantitatis
 a & b , sed si $a - x = z$, erit $x = a - z$ & $x^{nn-1} = (a - z)^{nn-1} =$

$$a^{nn-1} - (nn-1)a^{nn-2}z + \left(\frac{nn-1 \cdot nn-2}{2}\right)a^{nn-3}z^2 \\
 - \left(\frac{nn-1 \cdot nn-2 \cdot nn-3}{2 \cdot 3}\right)a^{nn-4}z^3 + \&c.$$

Hæc series quantum ad institutum nostrum sufficit est continuanda;
 sufficiet autem ad tres usque terminos. Igitur in æquatione integrata quam
 dedimus §. 3. ponemus, $x = a - z$ &

$$x^{nn-1} = a^{nn-1} - (nn-1)a^{nn-2}z + \left(\frac{nn-1 \cdot nn-2}{2}\right)a^{nn-3}z^2 \&c.$$

fic erit

$$v = \frac{1}{nn-2} \left[a - z - a + (nn-1)z - \left(\frac{nn-1 \cdot nn-2}{2}\right) \frac{z^2}{a} \right] \\
 - \frac{b}{nn-1} \left[1 - 1 + (nn-1) \frac{z}{a} - \left(\frac{nn-1 \cdot nn-2}{2}\right) \frac{z^2}{aa} \right]$$

In qua æquatione si termini se destruentes deleantur, atque ponatur $a = c$
 pro b , rejiciaturque terminus qui affectatur quantitate $\frac{c^2 z}{aa}$, prodit simpliciter

$$v = \frac{2cz - z^2}{2a}.$$

ex quâ formula, cum littera n evanuerit, indicium habemus, nihil magni-
 tudini

tudinem orificii pertinere ad motum aquæ internæ, cujus rei originem jam supra (§. 7.) indicavi.

In sequentibus autem demonstrabimus, non differre hunc motum à subsequente motu refluxo, hincque oscillationes fieri tautochronas. Priusquam vero ad alia pergam monendum duxi, in isto calculo quantitates $\frac{c}{a}$ & $\frac{z}{a}$ non solum præ unitate, sed & præ $\frac{1}{nn}$ ceu infinite parvas positas fuisse, ad quod animus probe est advertendus in instituendis experimentis; licet utique theoriam infinite parvorum ad experimenta, sine notabili errore revocare diminuendo admodum quantitates, quæ in theoria ceu infinite parvæ consideratæ fuerunt, sed faciendum est, ut in experimento omnia huic legi sint subjecta. Ita v. gr. si in cylindro omne fundum absit, posito $n = 1$, idque submersum ponatur ad altitudinem triginta quinque pollicum, satis accurate sumetur experimentum, cum aqua ante oscillationes elevata tantum fuerit ad altitudinem unius pollicis supra superficiem aquæ circumfluxæ; nec dum error notabilis erit, si vel orificium inferius ad dimidium obstruatur existente tunc $\frac{c}{a}$ ad $\frac{1}{nn}$ ut 1. 9, quæ ratio in nostro experimento tuto adhuc negligi potest: at si jam diametrum tubi duplam ponas diametri orificii, oclusis tribus quartis aperturæ integræ partibus, jam fiet $n = 4$ & $\frac{c}{a}$ ad $\frac{1}{nn}$ ut 4 ad 9, quæ ratio non satis parva amplius erit, ut experimentum conditionibus theoriæ cum sufficienti præcisione satisfacere affirmari possit.

Hic itaque jam porro inquirere conveniet, quid de his casibus statuendum sit, quibus $\frac{c}{a}$ & $\frac{1}{nn}$ notabilem quidem inter se habent rationem, utraque vero quantitas sit admodum exigua, quod nimirum fit, cum cylindrus profundissime submergitur, simul autem fundum parvulo est pertusum foramine.

§. 11. Sed iste, quem modo finximus, casus melius ex æquatione differentiali paragraphi tertii, quam ex integrali, ut antea factum, deducitur: potest autem pro his circumstantiis rejici terminus $-v dx$ præ $nnv dx$, atque sic assumi $-x dv + nnv dx = (x - b) dx$, in quâ si rursus ponitur $a - b = c$ & $a - x = z$, prodit

$$a dv + z dv + nnv dz = (c - z) dz$$

cujus

cujus secundus terminus z & v rursus præ primo negligi potest, ita vero habetur

$$adv + nnvdz = (c - z) dz.$$

Ponatur hic (sumto α pro numero, cujus logarithmus hyperbolicus est unitas) $v = \frac{1}{nn} \alpha^{\frac{-nnz}{a}} q$; hoc modo mutabitur postrema æquatio in hanc

$$\alpha^{\frac{-nnz}{a}} adq = nn(c - z) dz, \text{ vel}$$

$$adq = nn \alpha^{\frac{nnz}{a}} \times (c - z) dz.$$

Hæc vero ita est integranda, ut z & v vel etiam z & q simul evanescant; habebitur igitur

$$q = \left(c + \frac{a}{nn} - z \right) \alpha^{\frac{nnz}{a}} - c - \frac{a}{nn}, \text{ vel denique}$$

$$v = \frac{1}{nn} \left(c + \frac{a}{nn} - z \right) - \frac{1}{nn} \left(c + \frac{a}{nn} \right) \alpha^{\frac{-nnz}{a}};$$

Ex ista vero æquatione deducitur:

I. Oriri rursus, ut paragrapho decimo alia methodo inventum fuit, $v = \frac{2cz - 2z}{2a}$, si nempe rursus ponatur $\frac{nnz}{a}$ numerus valde parvus. Id vero ut pateat, resolvenda est quantitas exponentialis $\alpha^{\frac{-nnz}{a}}$ in seriem, quæ est ipsi æqualis, $1 - \frac{nnz}{a} + \frac{n^4 z^2}{2aa} - \frac{n^6 z^3}{2 \cdot 3 a^3} + \&c.$ ex quâ pro nostro scopo tres priores termini sufficiunt; eo autem substituto valore rejectoque termino rejiciendo, reperitur ut dixi

$$v = \frac{2cz - 2z}{2a}$$

II. At si vicissim $\frac{nn}{1}$ infinites major ponatur quam $\frac{a}{z}$ aut $\frac{a}{c}$, quia tunc $\alpha^{\frac{-nnz}{a}} = 0$, ut & $\frac{a}{nn} = 0$, fieri intelligitur $v = c - z$, five $v = x - b$, ut §. 4.

III. Neutram vero præmissarum formularum sine notabili errore locum habere patet, cum $\frac{nn}{a}$, numerus est mediocris, nempe nec infinitus, nec infinite parvus, & tamen utraque quantitas $\frac{nn}{1}$ & $\frac{a}{c}$ infinita.

Fuerit v. gr. elevatio indicata per c unius pollicis, immersio cylindri b 80. poll. ipsaque a 81. poll. dein ponatur diameter tubi tripla diametri foraminis, id est, $nn = 81$, erit $v = \frac{2-2-2a^{-2}}{nn}$, atque si porro ponatur $z = c = 1$, ut habeatur altitudo velocitatis, cum utraque superficies est ad libellam posita, erit $v = \frac{a-2}{nn}$, id est, proxime $v = \frac{1}{307}$ poll. cum secundum paragraphum decimum debuisset oriri $v = \frac{1}{162}$ poll. & secundum paragraphum quartum $v = 0$. In eodem exemplo fit spatium integrum, quod superficies percurrit non omnino octo quintarum partium unius pollicis, locusque maximæ velocitatis est præterpropter sexaginta novem centesimarum partium ejusdem mensuræ infra altitudinem initialem.

§. 12. Non difficilior esset ad omnes vasorum figuras extendere, quæ hæcenus dicta sunt, imo etiam ad spatia finita, quibus aqua externa determinetur: fiunt autem formulæ plerumque adeo prolixæ, ut consultius duxerim easdem silentio præterire, & specimine saltem aliquo particularem ostendere modum, quo theoria ad quoslibet casus alios eruendos applicanda sit.

Attentionem particulariorem merentur, quæ de motu aquarum in tubis inferius largiter apertis, & profundissime submersis indicavi, quia in his motus oscillatorius, ut in pendulis, constantis durationis est, & undarum in mari fluxus illustratur ab illis. Existimavi autem prius de refluxu aquarum in cylindris submersis generaliter tractandum esse, atque ostendendum in ista hypothese refluxum non differre à præcedente fluxu, quam motus totus oscillatorius examinetur. Jam igitur de isto refluxu commentabimur, deinceps utrumque motum in diversis casibus combinaturi, ne aliquid in argumento desiderari possit.

P A R S S E C U N D A.

De ascensu aquarum.

§. 13. Postquam aquæ descenderunt in vase submerso, quantum id ipsis natura rei permittit, duo potissimum considerata se offerunt; primo excessus altitudinis superficiei externæ supra internam & secundo *vis viva* seu productum ex *ascensu potentiâ* in massam illius aquæ, quæ ex cylindro in aquam

cir-

circumstagnantem durante descensu ejecta fuit: hæc enim *vis viva*, quæ redire non potest ad aquam in cylindro, facit potissimum ut aquæ multum absint, quo minus pristinam, ex quâ ceciderant, in refluxu attingant altitudinem: nec tamen unica est hæc ratio, etiamsi vel nihil obstant impedimenta tenacitatis, adhæfionis, hujusmodique alia: Altera ratio indicata fuit §. 2. Istius vero rationis mensura ex ipso ascensu est deducenda, cum prior ad descensum pertineat & sola, abstrahendo animum ab impedimentis extrinsecis, in causa est, cur non aqua in ascensu tantum supra superficiem externam elevetur, quantum infra eandem depressa fuerat. Notandum enim est, futurum fuisse, aquis vel per minimum foramen influentibus, ut eadem velocitate ascenderent, tanquam si omne fundum deesset, plenoque orificio irrumperent, si modo post influxum impetum, quem in aquas internas faciunt, totum exerent ad earum ascensum promovendum: Verum quicumque hanc rem recte perpendit facile videt, plerumque impetum istum totum fere impendi in motum aliquem intestinum, qui nihil ascensum promoveat; dico autem notanter plerumque (quod bene notetur velim) quia cum foramen magnum admodum est, non difficulter prævidetur, impetum aquarum influentium ita apte fieri, ut motus internus haud parum inde promoveatur; at cum foramen minus est, liquet, rem secus se habere. Recte igitur adhibetur hypothesis nostra, cum vel fundum omne abest, aut fere totum est perforatum (sic enim excessus velocitatis aquæ influentis supra velocitatem aquæ internæ nullus, aut valde exiguus est, & nullum illa in hanc impetum facit) vel etiam cum foramen minimum est, quia sic omnis impetus infringitur. Sed si foramen rationem habuerit ad amplitudinem tubi, veluti ut $\sqrt{2}$. ad 1, vel ut 2. ad 1, aut circiter, major paululum erit motus quam qui ex ista hypothesis sequitur, quia tunc notabilem impetum faciunt aquæ irruentes, nec is omnis per rei naturam perditur.

Facile igitur est sine instituto calculo prævidere sequentes in aquarum, postquam ex certa altitudine delapsæ fuerunt, refluxu affectiones.

I. Nullum nempe fore refluxum sensibilem, si foramen sit valde parvum.

II. Cum pars cylindri submersa non mutata maneat, nunquam aquas in refluxu certum terminum prætergressuras, si vel in infinitum elevatæ fuerint aquæ in prævio descensu: nunquam enim, ex quâcunque altitudine incipiat descensus, omnes aquæ ex cylindro effluunt, ut vidimus, §. §. 5. & 7.

III. Cum descensus incipere intelligatur ab altitudine XY , subsequensque ascensus fieri usque in CD , fore productum *descensus actualis* massæ aquæ $XYDC$ usque ad TV in massam, mensuram rationis utriusque combinatæ, quæ, ut §. 2. dictum, ascensum à præcedente descensu differre faciunt, & cum ratio secundo loco recensita evanescat, si omne auferatur fundum IM , fore tunc istud productum æquale *vi vivæ* omnis aquæ, durante descensu ejectæ, ita ut sine alio calculo, præter hætenus jam positos, ascensus aquarum in cylindro toto aperto definiri possit.

IV. Ascensum fore æqualem descensui, cum cylindrus infinite submersus intelligitur evanescentibus tunc præfatis diminutionis causis.

V. Hinc igitur oscillationes sine fine fore, quia postremæ oscillationes semper sint veluti infinite parvæ ratione submersionis altitudinum: faciunt autem impedimenta aliena, quorum nullam hucusque rationem habuimus, ut omnis motus cito admodum cesset.

§. 14. His generatim præmonitis, problema accuratiori calculo subiciemus: duplicem autem dabo solutionem, alteram ad principia modo exposita accommodatam, alteram specie quodammodo diversam.

Igitur retentis tum figura, tum denominationibus §. 3. considerabimus aquam ex altitudine XY descendisse usque in xy , & ab hoc termino ascensum suum inchoare; dicatur My vel $Ix = a$ & postquam jam ascendit usque ad cd vel ef , ponatur $Md = \xi$, $df = d\xi$: His ita ad calculum præparatis, designataque rursus per v altitudine debita velocitati aquæ in cd & per $v + dv$ simili altitudine in situ proximo ef , inquiremus in *incrementum ascensus potentialis* aquæ accedens, dum cylindrum subit guttula $LONP$, superficiesque ex cd ascendit in ef ; Perspicuum autem est, cum ubique *ascensus potent.* aquæ internæ multiplicatus per suam massam exprimatur per $n\xi v$ (nec enim ulla attentio adhibenda est ad motum intestinum) fore ejusdem producti incrementum $n\xi dv + nv d\xi$: Si vero præterea consideretur *ascensus potent.* $nnv - v$, (vid. §. 2.) quem guttula influens $nd\xi$ perdit, quique pariter debetur *descensui actuali* particulæ aqueæ $nd\xi$ per altitudinem $b - x$, patet esse ponendum

$$n\xi dv + nv d\xi + (nnv - v)nd\xi = (b - \xi)nd\xi, \text{ vel} \\ \xi dv + nnvd\xi = (b - \xi)d\xi.$$

Idem

Idem vero aliter sic invenitur.

Consideretur scilicet guttulæ L O N P quasi nullam velocitatem fuisse, priusquam influere inciperet, eandem vero statim atque influere incipiat, acquirere *ascensum potentialem*, qui sit $\frac{n n v}{n \xi + n d \xi}$, quamvis mox post sui influxum (per annot. sec. §. 2.) censenda sit motum continuare velocitate communi $\sqrt{v}$. Quo facto sic erit ratiocinandum. Ante influxum guttulæ, est *ascensus potent.* aquæ c d M L P I c (cujus massa $\frac{n \xi}{n \xi + n d \xi} = v$. & *ascens. potent.* guttulæ L O N P (cujus massa $\frac{n d \xi}{n \xi + n d \xi} = 0$; ergo *ascensus potentialis* omnis aquæ c d M L O N P I c $= \frac{n \xi v}{n \xi + n d \xi} = \frac{\xi v}{\xi + d \xi}$.

At vero postquam guttula L O N P influxit situmque assumit L o n P, est ejus *ascens. potent.* $\frac{n n v}{n \xi + n d \xi}$, reliquæ autem aquæ e f M L o n P I e (cujus quidem massa rursus $\frac{n \xi}{n \xi + n d \xi}$) *ascensus potent.* est $\frac{n d \xi v}{n \xi + n d \xi}$; igitur *ascensus potent.* omnis aquæ hic consideratæ post influxum guttulæ est

$$\frac{n d \xi \times n n v + n \xi \times (v + d v)}{n \xi + n d \xi} = \frac{\xi v + \xi d v + n n v d \xi}{\xi + d \xi}, \text{ cum ante eundem influ-}$$

$$\text{xum fuerit } \frac{\xi v}{\xi + d \xi} : \text{ cepit igitur incrementum } \frac{\xi d v + n n v d \xi}{\xi + d \xi}, \text{ vel simplicius}$$

$\frac{\xi d v + n n v d \xi}{\xi}$. Istud vero incrementum æquandum est cum *descensu actuali* quem aqua facit mutando situm c d M L O N P I c situ e f M L O N P I e, qui descensus æqualis est quartæ proportionali ad massam aquæ internæ $n \xi$, ad guttulam $n d \xi$ & altitudinem V f vel $b - \xi$, sic ut præfatus descensus sit $\frac{(b - \xi) d \xi}{\xi}$: unde iterum habetur talis æquatio

$$\xi d v + n n v d \xi = (b - \xi) d \xi;$$

Hujus vero integralis post debitæ constantis additionem talis fit

$$v = \frac{b}{n n} \left(1 - \left(\frac{a}{\xi} \right)^{n n} \right) - \frac{1}{n n + 1} \left(\xi - \left(\frac{a}{\xi} \right)^{n n} a \right),$$

quam nunc pro diversis ejus circumstantiis perpendemus.

§. 15. Et quidem cum fuerit amplitudo tubi infinites major, quam amplitudo foraminis, patet fieri $v = \frac{b - \xi}{n n}$, & irruere proinde aquam velocitate quæ debeat altitudini superficiæ externæ super internam, neque tunc ultra superficiem aquæ externæ fiet ascensus. Cum

Cum vero amplitudo foraminis rationem habet finitam ad amplitudinem tubi, ascensus fit ultra superficiem RS veluti usque in st ; minor autem semper erit Vt quam Vy , nisi cum omne fundum abest, tunc enim erit $Vt = Vy$. Prouti monuimus §. 5. in descensu differentiam inter Vy & Vt , proportionalem esse & originem debere *ascensui potenti* aquæ durante descensu ejectæ, ita nunc observari potest in ascensu differentiam inter Vy & Vt originem habere ab illisione guttularum L on P in massam aquæ superjacentis, quæ quidem illisio non promovet ascensum, sed in inutilem motum intestinum impenditur, prouti indicatum fuit §. 2. Ergo cum omne fundum IM abest, aqua tubum eadem velocitate ingreditur, qua jam gaudebat aqua tubum antea ingressa & nulla fit collisio, quæ causa est cur in isto casu tantum ascendat aqua ultra superficiem RS , quantum fuerat infra illam depressa, quod æquatio, uti mox videbimus, indicat.

§. 16. Determinabitur maximus ascensus st , faciendo $v = 0$. Igitur ut motus omnis recte definiatur, alternatim adhibendæ erunt formulæ §. 3. & 14. erutæ, quod nunc hoc unico illustrabo exemplo, quo $nn = 1$.

Si proinde $nn = 1$, fit $v = b \left(1 - \frac{\alpha}{\xi} \right) - \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{\alpha\alpha}{\xi} \right)$: eritque $v = 0$, cum sumitur $\xi = 2b - \alpha$, id est, cum sumitur $Vt = Vy$. Igitur si verbi gratia tubus ABM aqua plenus, omnique fundo destitutus fuerit ad medietatem usque immersus aquæ exteriori, atque tota ipsius longitudo dicatur a , aqua sic agitabitur ut primo infra TV descendat, spatio $0,297a$, deinde simili spatio super eandem TV elevetur, rursusque infra eam deprimatur spatio $0,240a$, eodemque lineam illam iterum transcendat, & sic porro.

§. 17. Patet etiam cum α est $= 0$, tubo scilicet ab omni aqua vacuo, fore generaliter $v = \frac{b}{nn} - \frac{\xi}{nn+1}$: ascensumque integrum consequenter fore $\frac{nn+1}{nn}b$ vel ascensum supra superficiem exteriorem aquæ $= \frac{b}{nn}$.

§. 18. Venio nunc ad tubos infinite submersos, in quibus descensum cum suis affectionibus determinavimus §. 10. Utemur autem eadem plane methodo ad hunc casum definiendum quæ ibi usi sumus: erit nobis igitur depressio initialis $Vy (= b - \alpha) = c$, ascensus inde factus $yd (= \xi - \alpha) = z$. Sic

Sic est $\xi = a + z$ & $b = a + c$, ubi quantitates z & c sunt ceu infinite parvæ considerandæ ratione quantitatis a . Habetur hinc

$\left(\frac{a}{\xi}\right)^{nn} = \left(\frac{a}{a+z}\right)^{nn} = \left(1 + \frac{z}{a}\right)^{-nn} =$ adhibendo seriem notam & ex illa fumendo tres primos terminos $1 - \frac{nnz}{a} + \frac{nn \cdot nn + 1}{2aa} z^2$. Substitu-

tis istis valoribus pro b , ξ & $\left(\frac{a}{\xi}\right)^{nn}$ mutatur æquatio ultima paragraphi de-

cimi quarti in hanc, $v = \frac{a+c}{nn} \times \left(\frac{nnz}{a} - \frac{nn \cdot nn + 1}{2aa} z^2 \right) -$

$$\frac{1}{nn+1} \times \left(a+z - a + nnz - \frac{nn \cdot nn + 1}{2aa} z^2 \right) =$$

$$(a+c) \times \left(\frac{z}{a} - \frac{nn+1}{2aa} z^2 \right) - \left(z - \frac{nnz}{2a} \right) =$$

$\frac{cz}{a} - \frac{z^2}{2a} - \frac{nn+1}{2aa} cz^2$; Potest autem negligi iste ultimus terminus & sic fit simpliciter

$$v = \frac{2cz - z^2}{2a},$$

quam æquationem n non amplius ingreditur: Neque illa differt ab æquatione pro descensu §. 10. data, nempe $v = \frac{2cz - z^2}{2a}$, quandoquidem quantitas a & a non differunt nisi quantitate minima $2c$.

Cæterum hic omnia etiam sunt subintelligenda, quæ eodem §. 10. de tubo non nimis obstruendo dicta sunt.

§. 19. Sunt igitur descensus & ascensus sibi æquales; nam ex æquationibus nostris patet, liquorem æqualiter librari ultra superficiem aquæ externæ. Deinde vero potissimum sequitur ex istis formulis, esse vel oscillationes inæquales inter se isochronas, modo omnes possint infinite parvæ censerî ratione submersionis: Pendulum autem simplex tautochronum esse ejusdem longitudinis cum parte tubi submersa.

Differt istud theorema ab illo, quod §. 4. *sec.* 6. de oscillationibus in tubo cylindrico ex duobus cruribus verticalibus composito citatum fuit, in eo, quod ibi oscillationes omnes non exclusis oscillationibus finitæ magnitudinis sint tautochronæ, cum in præsentî casu oscillationes finitæ sint inæqualis dura-

tionis; deinde quod ibi longitudo penduli sit æqualis dimidiæ longitudini tubi, cum hîc sit æqualis integræ, quamvis si recte res perpendatur, hic potius sit consensus quam dissensus dicendus ob tubi, quæ in priori casu est, duplicationem.

§. 20. Utroque oscillationum genere illustratur natura undarum ventis agitatarum: neque enim aliter moventur, quam quod aquæ in illis continue ascendant rursusque descendant. Ita patet quod dicit Newtonus, tempora undulationum esse in ratione dimidiata latitudinum undarum, quia ponit undarum formam sibi constanter esse similem & proinde earum latitudinem proportionalem profunditati, ad quam aquæ agitantur. Verisimile autem est profunditatem eam esse, quæ pendulo simplici cum undis tautochrone, nempe *v.gr.* 60 $\frac{1}{2}$ *ped.* *Parif.* si singulis binis secundis fiat undarum ascensus descensuve.

§. 21. Quamvis noluerim ad prolixitatem calculi evitandam, hoc argumentum in omni sua extensione prosequi, propterque ea de cylindricis vasis tantum egerim, attamen quia in casu submersionis infinitæ, enunciationes & theoremata parum de sua concinnitate perdunt, superaddam theorema generale pro oscillationibus aquæ in tubo utcunque inæquali, omissa tamen demonstratione, quæ ex alibi dictis unicuique obvia erit, præsertim vero ex iis quæ in *Seçt.* 6. §. 6. 7. & *seqq.* usque ad 20. exposita fuerunt. Faciendum autem est, ut cylindricæ sit structuræ pars illa vasis superior, in quâ excursionses fiunt.

§. 22. Fuerit igitur *bd* longitudo vasis submersi (Fig. 35. *b*) Repræsentet *bF* ejus amplitudinem in loco superficiei, ponaturque vas ita formatum, ut sit curva *FGH* scala amplitudinum: sumatur linea *bc* fiatque curva *LMN*, cujus applicata *cM* sit ubique $= \frac{bF^2}{cG}$, & erit longitudo penduli isochroni cum oscillationibus aqueæ superficiei $=$ spatio *bd* *NL* diviso per *bL*.

Corollarium.

§. 23. Ex præcedente paragrapho sequitur, si tubus submersus conicus fuerit, habeatque amplitudinem in regione aquæ superficiei, quæ sit ad orificium submersum ut *m* ad *n*, fore longitudinem penduli Isochroni cum vibrante aqua ad longitudinem submersi tubi, ut $\sqrt{m}$ ad $\sqrt{n}$, id est, ut radices prædictarum amplitudinum, atque si tubus idem situ, modo recto modo

do inverſo , ſubmergatur tantum non totus , fore longitudines pendulorum iſochronorum in ratione contraria orificiorum ſubmerſorum.

Scholium Generale.

§. 24. Quæ in hac ſeſtione continentur, quia novis hypotheſibus inni-
tuntur pleraque , eo magis operæ pretium erit experimentis tentare. Ego
quidem diverſa inſtitui , non vacavit autem ſingula quæ mente conceperam
exequi : quæ feci inferius recenſebo ; Interim ut tutius judicium ferri poſſit
de conſenſu experimentorum cum theoria , diſpiciendum prius erit pro re-
rum circumſtantiis , an & quantum fere contractio venæ effluentis (cujus
naturam expoſui in ſeſt. 4.) calculum turbare poſſit : quod incommodum
maxima parte tolli poterit , ſi fiat ut orificii inferioris latera parvulum ali-
quem cylindrum efforment , vix dimidiæ lineæ altitudinis , qua de re animo
revolvatur experimentum quartum ad ſeſtionem quartam pertinens. Deinde
etiam animus advertendus ad reſiſtentias ab adhæſione aquæ oriundas , quæ
quidem parum retardant motus , ſi tempora oſcillationum reſpicias , multum
autem excuſſionibus detrahunt , præſertim ſi tubi ſtrictiores & longiores ſu-
mantur. Igitur magis fidendum erit experimentis, quæ circa oſcillationum
tempora facta fuerint , quia hæc tempora à diminutione excuſſionum non
multum admodum alterantur. Ratione primi experimentorum generis , quo
excuſſiones fluidorum in tubis , tam deſcenſus quam aſcenſus inquirendi ob-
ſervandique veniunt , hæc uſus fui circumſpectione , ut ſilum tubo circumvol-
verem eo in loco , ad quem aquas deſcenſuras vel aſcenſuras eſſe expectabam ,
idemque ſilum poſt ſæpe repetitum experimentum ita tandem locavi , ut ſu-
perſicies fluidi oſcillantis nec ultra nec citra excurreret. Reliqua etiam loca ,
quæ in tubo obſervanda erant , pariter filo circumvoluto notavi. Quod deinde
ad tempora oſcillationum pertinet , quia hæc citiſſime decreſcunt fiuntque im-
perceptibiles & plane nullæ , non potui illa aliter inquirere , quam exploran-
do poſt ſæpiſſime iteratum experimentum longitudinem penduli ſimplicis iſo-
chroni , quod dum oſcillabat digitum orificio tubi ſuperimpoſui eumque eo
præciſe temporis puncto removi , ut & pendulum & fluidum oſcillationem ſi-
mul inciperent.

EXPERIMENTA

Ad sect. sept. referenda.

Experimentum 1.

Tubum adhibui vitreum cylindricum diametri fere quatuor linearum, inferius totum apertum. Eum aquæ, in vase pellucido amplissimo stagnanti, submersi ad altitudinem 44. *lin.* digitumque orificio admovi superno, ne extrahendo tubi partem descenderet in illo aqua: extraxi deinceps tubum ad alt. 22. *lin.* ita ut tam pars tubi submersa, quam altitudo aquæ internæ supra externam esset 22. *lin.* moxque remoto digito observavi descensum superficiei in tubo infra superficiem aquæ stagnantis eumque vidi fuisse $9\frac{1}{2}$ *lin.*

Debuisset autem vi §. 7. & 17. descendere tredecim lineis; Defectus trium linearum cum dimidia unice fere adhæfioni aquæ ad latera tubi tribendus videtur.

Observato descensu totum experimentum repetii, ut ascensum quoque proximum experirer: Visus autem mihi fuit 8. *lin.* qui vi paragraphi decimi sexti, habito respectu ad prævium descensum, esse debuerat $9\frac{1}{2}$ *lin.* nempe tantus, quantus fuit præcedens descensus. Hic vero experimentum unica tantum linea cum dimidia defecit, cum in prima experimenti parte ad tres usque lineas cum dimidia defectus adfuit, quia nimirum major ibi facta fuit excursio eaque velocitate majori, ita ut impedimenta, quæ una cum velocitatibus crescunt, admodum majora offenderit.

Experimentum 2.

Eodem tubo usus sum, sed eo lamina munito, quæ foramine erat perforata amplitudine $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ratione amplitudinis tubi, cum superficies tubi esset octodecim lineis elevata supra aquam stagnantem, totidemque lineis fundum submersum, vidi superficiem tubi in descensu quinque fere lineis infra aquam stagnantem descendisse.

Paragraphus octavus autem descensum arguit $7\frac{1}{2}$ *lin.* defectum, qui plusquam $2\frac{1}{2}$ *lin.* fuit, rursus adhæfioni aquæ ad latera tubi adscribo.

Deinde

Deinde tubum hunc eadem lamina instructum admoto superius digito aquæ immisi ad profunditatem 18. *lin.* totum ab aquâ vacuum : remoto digito emerfit superficies tubi supra aquam stagnantem integris octo lineis , cum §. 17. earum novem indicat pro isto casu.

Quod hic defectus minor admodum fuerit , quam in descensu , rationi adscripti , quam prolixè paragrapho decimo tertio indicavi , cum dicerem motum paullo majorem oriturum , cum foramen amplitudinem respectu tubi notabilem veluti in ratione $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad 1 , aut circiter habuerit , quam qui ex hypothesi sequitur : atque ut ea de re certus plane fierem , tubum adhibui breviorē & ampliorem , ut omnis fere impedimentis alienis effectus præriperetur , & experimentum cepi , quod sequitur.

Experimentum 3.

Tubum adhibui cujus diameter erat plus quam septem linearum , quem ex ferro confieri curavi , quia vitreus bene cylindricus non fuit ad manus : longitudo ejus fuit quatuor pollicum cum sex lineis & semisse : amplitudo ejus ratione foraminis indicata per n fuit $= 1, 860$ & $nn = 3, 458$.

De isto tubo experimentum ita sumfi :

Obturato scilicet orificio superiori identidem tentavi , ad quam profunditatem submergendus esset aquæ in arca amplissima stagnanti , ut remoto protinus digito , qui orificium obtegebat , aqua ad limbum ejusdem orificii præcise ascenderet , nihilque præterflueret. Istam vero profunditatem expertus sum 3. *poll.* cum tribus *lineis* ; fuit igitur ascensus supra aquam externam unius pollicis & trium linearum cum dimidia , cum vel omnibus remotis impedimentis parum ultra undecim lineas ascensus fieri debuerit vi paragraphi 17. Recte igitur præmonitum fuit §. 13. non posse non ascensus fieri paullo majores in istiusmodi casibus , quam hypothesis postulat. Mox eidem tubo aliud applicui fundum ; erat jam $n = 3, 68$, & $nn = 13, 54$: difficile fuit experimenti successum recte dignoscere , quia superficies in tubo ascendens semper fuit bullata : visum tamen fuit , tubum nunc immergendum fuisse ad altitudinem 4. *poll.* cum duabus tribusue lineis , manentibus sic extra aquam præterpropter quatuor lineis , prorsus ut theoria indicat.

Experimentum 4.

Tubum cylindricum vitreum, qui tres præterpropter lineas habebat in diametro immerfi ad altitudinem 20. *poll.* fecique, ut aqua in illo libraretur, elevata prius aquâ ad altitudinem unius fere pollicis. Ultra quatuor vel quinque itus reditusque bene notabiles non fecit, nec adeoque omni rigore longitudinem penduli simplicis isochroni examinare potui; mihi tamen illa visa fuit 22. aut 23. pollicum; ex quo intuli adhæſionem aquæ ad latera tubi non solum diminuere excuſiones, ſed & morari pauliſper tempora oſcillationum: debuiffet enim ſecundum §. 19. eſſe præfata longitudo viginti tantummodo pollicum. Idem expertus ſum in oſcillationibus, quas in ſuperiori ſeſſione pertractavimus.

Cæterum obturato vel ad dimidium fere orificio inferiori, obſervare non potui, excuſiones inde fuiſſe diminutas aut oſcillationes retardatas, quod conforme eſt cum iis, quæ §. §. 7. & 18. habentur.

Experimentum 5.

Tubum conicum longitudine 21. *poll.* immerfi aquæ orificio ampliore, ita ut unicus pollex extra aquam emineret: fuit autem alterum orificium alterius paululum plusquam duplum. Longitudinem penduli isochroni cum vibrationibus aquæ in tubo libratae inveni quindecim *poll.* debuiffet autem ſecundum §. 23. eſſe eadem longitudo paullo minor quatuordecim pollicibus. Denique ſimiliter eodem tubo uſus, ſed ſitu inverſo, deprehendi longitudinem penduli isochroni tantillo plusquam duplam ejus, quæ antea fuerat, prouti citato paragrapho indicatur.

HYDRODYNAMICÆ

SECTIO OCTAVA.

De motu fluidorum cum homogeneorum tum heterogeneorum per vasa irregularis & præruptæ structuræ, ubi ex theoria virium vivarum, quarum pars continue absorbeatur, explicantur præcipue Phæno-

mena singularia fluidorum, per plurima foramina trajecto-

rum, præmissis regulis generalibus pro motibus fluido-

rum ubique definiendis.

S. I.



Liis adhuc principiis præter quam in sectione proxime præcedente usi non sumus, quam hisce duobus quod *velocitates fluidorum sint ubique reciproce proportionales amplitudinibus vasorum*, cujus ope invenitur *ascensus potentialis* totius aquæ ex dato *ascensu potentiali* cujusvis particulæ; tum quod *ascensus pot.* totius aquæ perpetuo æqualis maneat *descensui actuali*. Quoties ambo hæc principia locum habent, minime dubitandum est, quin methodo à nobis adhibita motus fluidorum recte definiatur. Non diffitebor tamen, hujusmodi fieri posse structuræ vasa, in quibus fluida moventur, ut neutrum istorum principiorum recte procedat. Prius equidem raro aut nunquam notabiliter à vero abducit, quia ubicunque locum non habet, ibi nullum fere aquæ habere solent motum, possuntque sine sensibili errore ceu stagnantes considerari: Longe vero aliter comparatum est alterum principium, quod apparebit ex inferioribus exemplis, & cujus rei luculentum esse possunt testimonium ea, quæ in superiori sectione protulimus circa refluxum aquarum; tantum enim abest, ut aquæ in vase submerso ex data altitudine delapsæ, ad hanc altitudinem regredi possint, prouti vi istius principii deberent, sublati impedimentis extrinsecis, quin potius plerunque vix sensibilis sit earum ascensus præ descensu, quem antea fecerunt: imo nequidem ascendere superficies aquæ potest tan-

tantum supra aquam, cui tubus immergitur, quantum infra eandem depressa fuerat, nisi cum tubus totus est apertus: ista vero superficies multo minus deprimitur quam antea fuerat elevata. Horum rationem dedimus in superiori sectione: Hæc quia ita sunt, regulas nunc dabo duas pro motu aquarum ubique definiendo, easque porro exemplis illustrabo talibus, quæ nulla adhuc theoria explicari potuerunt, cum nostra autem egregie admodum conveniunt.

Regula 1.

§. 2. Dispicendum est, assumpta alicubi in vase proposito velocitate fluidi ceu cognita, quænam reliquis fluidi partibus futura sit velocitas. Ita enim cognoscetur *ascensus potentialis* totius fluidi ejusque incrementum. Hactenus consideravimus fluida in infinita strata parallela vel potius ad latera vasis ubique perpendicularia divisa, statuimusque velocitates hisce stratis reciproce proportionales: Facile quidem est vasa effingere, ubi aliter moventur fluida; crediderim autem his in locis motum notabilem nunquam habere fluida ita, ut error ex ista hypothese sensibilis nasci fere non possit: poterit tamen majoris accurationis ergo præfata regula adhiberi. Præsertim vero huc pertinet contractio venarum, cum fluida per foramina in tenuibus admodum laminis facta transire coguntur, qua in re magna est adhibenda circumspectio: Effectus hujusmodi contractionum haud male, puto, prævidebuntur, cum recte perpenſa fuerint, quæ in sectione quarta de illis monui.

Regula 2.

§. 3. Singulis momentis dispicendum est, quantum *vis viva*, seu quodnam productum ex *ascensu potentiali* in massam oriatur ad fluxum præcipuum, cujus natura quæritur, nihil conferens. Id vero rursus uniuscujusque circumspectæ æstimationi relinquendum est. Quod sic oritur, addendum est factum ex *ascensu potentiali*, quem motus præcipuus involvit, in massam, aggregatumque productorum demum æquale censendum est factum ex massa omnis aquæ in ejusdem *descensum actualem*.

Magni profecto est momenti hæc regula, & ut puto, fere unica ad motuum mensuras obtinendas, qui in vasis irregularibus, pluribusque cavitatibus inter se communicantibus divisi fiunt, quod nunc pluribus illustrabo exemplis.

Pro-

Problema.

§. 4. Propositum fuerit vas ACRB (Fig 37.) infinitæ quasi ratione
foraminum mox dicendorum ubique amplitudinis & diaphragmate aliquo EF
in duas distinctum cavitates inter se communicantes, mediante foramine G:
habeat præterea vas istud in infima sui parte aliud foramen D: deinde ponatur
vas aquâ plenum usque in PQ, sic ut cavitas inferior CEF R tota sit humido
repleta, atque insuper diaphragmati superjaceat pars altera PQFE. His
positis, fluidoque jam moveri incipiente, quæritur velocitas aquæ per foramen
D in aërem effluentis vel altitudo genitrix hujus velocitatis.

Fig. 37.

Solutio.

Fuerit altitudo superficiæ PQ supra foramen D $\equiv x$, amplitudo foraminis D $\equiv n$, alteriusque G $\equiv m$. Perspicuum autem est *ascensum potentialem* cujusvis guttæ per G transluentis nihil promovere effluxum per D, totumque impendi in motum aliquem excitandum intestinum, qui mox absorbetur sine alio effectu: necesse igitur est ut singulis momentis motus generetur novus in particulis foramen G transeuntibus, non minus atque in particulis per D effluentibus. Sed si *ascensus potentialis* guttulæ per D effluentis dicatur v , id est, si aqua exilire ponatur per D velocitate, cujus altitudo genitrix sit v , erit similis altitudo ratione guttulæ mole sua priori æqualis, per G eodem tempore transluentis $\frac{nnv}{mm}$. Multiplicatis istis *ascensibus potentialibus* per massam, quam æqualem habent, quamque vocabo M, erit aggregatum productorum $\equiv Mv + \frac{Mnnv}{mm}$. Et cum ob infinitam amplitudinem vasis alius motus non generetur, erit præfatum aggregatum (per reg. 2.) censendum æquale facto ex massa omnis aquæ in ejusdem *descensum actualem*. At vero si massa omnis aquæ dicatur μ , erit (per § 7. Sect. 3.) *descensus actualis*, qui fit dum guttula M effluit $\equiv \frac{Mx}{\mu}$, ita ut productum commune sit $\equiv Mx$. Igitur habetur

$$Mv + \frac{Mnnv}{mm} = Mx, \text{ five } v = \frac{mnnx}{nn + mm}. \quad \text{Q. E. F.}$$

Scholium I.

§. 5. Apparet ex isto exemplo, motum sine calculo differentiali determinari.

T

ter.

terminari posse, cum figura vasis ubique amplissimi motum hunc mutare non potest. Interim difficile futurum non fuisset, consideratione quoque habita ad amplitudines vasis, fluxum definire, & solo brevitatis studio id vitavimus pariterque omittemus in sequentibus, nisi fortasse motus notabiliter à figura vasis varia mutetur, quod fieri potest in tubis satis amplis, sed iis longissimis, in quibus fluidum movetur, præsertim si motus determinandi sint oscillatorii. Imo vidimus in præcedente Sectione, si oscillationes sint valde parvæ in tubis profundissime submersis, tunc tantum abesse, ut ad solum foramen fundi sit attendendum, neglectis amplitudinibus etiam si satis magnis, quin potius ad has solas fere sit respiciendum.

Scholium 2.

§. 6. Quia in calculo, quem posuimus, *vis viva* cujuscvis guttulæ per G transfluentis ab aqua cavitatis inferioris absorberi debet, perspicuum est, propositionem non esse extendendam ad illos casus, qui hypothese repugnent, veluti cum diaphragma E F fundo C R proximum est simulque foramina sibi directe respondent: ita enim non arduum est providere, motum longe diversum fore ab eo, quem præsens theoria indicat. At vero, si distantia D G magna sit, sique simul foraminum situs sit obliquus & latera foraminum venis aqueis negent contractionem; dubium nullum est, quin theoria accurate omnibus phænomenis respondeat.

Corollarium.

§. 7. Si foramen G est admodum amplum præ altero, fit fere $v = x$, sed hæc altitudo v , cui nimirum respondet velocitas aquæ per D effluentis, non parum decrescit, crescente foramine D, ita ut si fuerit v , gr. duplum foraminis G, fit $v = \frac{1}{2} x$ & tantum non tota evanescat, cum foramen G est valde exiguum respectu foraminis D.

His ita inventis, jam quivis veram perspiciet rationem motuum illorum, quos Mariottus primus observavit, & quibus ceu valde *admirabilibus* testatur se supra modum fuisse delectatum, simulque intelliget, quam longe Auctor iste in reliquis perspicacissimus à viâ aberraverit in hisce disquisitionibus. Non abs re fore puto observata Mariotti hic apponere.

Fig. 38.

§. 8. Vas adhibuit, quale repræsentat Figura trigesima octava, quæ
non

non differt à priori nisi in eo, quod in ima parte cylindro A B C tubus horizontalis M D insertus sit perforatus lumine D, per quod aquæ verticaliter exiliunt: Diaphragma vero E F in medio perforatum est lumine G ut antea: infra illud parvulum erat foramen K, ut facilius cavitas inferior aquis impleri posset, quo facto idem obturabatur, reliquumque vasis replebatur.

His ita præparatis, effluentibusque aquis per D, observavit Mariottus, mox illas ascendisse usque in I, deinde sensim imminuta velocitate usque in N & tandem, imminente depletione tota cavitatis superioris, A B F E usque in O, tuncque assumtis confestim novis viribus assilivisse fere usque in F. Animadvertit etiam, si bene memini, altitudinem jactus initialis eo minorem esse, quo minus sit foramen G, ratione alterius D. Videatur ejus *tract. de motu aquarum part. IV. disc. 1.* Putat autem horum motuum mutationes explicari posse fingendo vasi A B F E amplissimo tubum strictiorem adhærere G L M D, per quem aquæ fluant. At vero demonstravimus & experientia quotidie docet, motum aquarum ex vase A B G L M D admodum diversum esse ab eo, qui modo indicatus fuit. Non minus falleretur si quis putaret aquam eadem velocitate exilire per foramen D, quasi illud in diaphragmate E F positum esset, nam fieri potest, ut altitudo jactus initialis sit major & minore altitudine F B. Nec denique ea effluent aquæ quantitate, uti facile quis suspicari posset, qua eodem tempore effluerent ex vase superiori simplici rescissa parte E F D C quamvis ita proxime se res habeat, cum foramen G admodum minus est foramine D.

§ 9. Nostra vero æquatio, nempe $v = \frac{mmx}{nn + mm}$, recte omnino respondet phænomenis: indicat enim aquam mox ab initio fluxus ad certam ascendere altitudinem, eamque tanto minorem, quanto minus est foramen diaphragmatis præ foramine altero; dein istum ascensum sensim diminui, donec aqua omnis ex cavitate superiori effluxerit, quo ipso momento protinus augmentum capit, totamque aquæ superincumbentis altitudinem tantum non attingit, quia tunc ex vase simplici eoque infinite amplo effluere censendæ sunt aquæ: paulisper tamen etiamnum retardantur aquæ à transitu aëris per foramen G, & sane notabiliter retardantur, cum foramen superius valde parvum est, de quo argumento mox quædam dicemus, cum de fluidis heterogeneis fermo erit. Si figura Mariotti debita proportionem respondeat argumento instituto, oportet, ut foramen G alterius fecerit paullo plusquam dimidium.

§. 10. Indicat porro formula nostra, quod multis fortasse nondum perspectâ hâc theoriâ satis paradoxum videri potuisset, situm diaphragmatis EF five altiore five humiliore nullo modo mutare impetum five velocitatem aquæ effluentis; ratio autem istius phænomeni omnibus nunc, puto, manifesta est.

§. 11. Jam vero examinabimus insuper motum aquarum, cum plura sunt diaphragmata foraminibus pertusa, per quæ aquæ transire cogantur, ut effluxus per foramen D fieri possit. Poterit id eodem absolvi modo, quo usi sumus in problemate §. 4. Ita autem instituto recte calculo retentisque denominationibus ibidem adhibitis apparebit esse

$$v = x: \left(1 + \frac{n n}{\alpha \alpha} + \frac{n n}{\epsilon \epsilon} + \frac{n n}{\gamma \gamma} + \&c. \right)$$

ubi per α , ϵ , γ &c. intelliguntur amplitudines foraminum, quæ sunt in diaphragmatibus, dum n exprimit ut antea amplitudinem foraminis D, per quod aquæ effluunt.

§. 12. Si proinde loco unius diaphragmatis sint in simili vase, quale Fig. 39. (Fig. 39.) repræsentat, plura diaphragmata veluti in B, C, R &c. per quæ aqua transluat, dum per infimum foramen D effluit, mutabitur & augebitur confestim velocitas aquæ effluentis, quoties aliqua cavitas depletur: talis autem esse potest proportio inter altitudines AB, BC, CR, RE &c. atque amplitudines foraminum D, G, F, H &c. ut semper, quoties nova depleri incipit concameratio, vena effluens ad eandem altitudinem O assurgat, seu eadem velocitate effluat. Id vero obtinetur (designatis amplitudinibus foraminum D, G, F, H &c. per n , α , ϵ , γ , &c.) faciendo

$$BC = \frac{n n}{\alpha \alpha} AB; CR = \frac{n n}{\epsilon \epsilon} AB; RE = \frac{n n}{\gamma \gamma} AB \&c.$$

ita ut positis foraminibus inter se æqualibus sint pariter lineæ AB, BC, CR, RE &c. inter se æquales faciendæ. Facile quoque erit in vase cylindrico eam conciliare foraminibus magnitudinem, ut superficies fluidi eodem tempore ab uno diaphragmate ad subsequens quodcunque descendat, & cum hæc diaphragmata æqualiter à se invicem & à fundo distant, uniformis clep-tydrarum structura excogitari potest.

§. 13. Si vero omnia diaphragmata altissime posita sint, jucundus erit
lusus

lulus hydraulicus, venam profilientem D O videre, quæ æqualibus incrementis æqualibusque temporum intervallis, quod utrumque fieri potest, subsultim crescat.

§. 14. Propositum nunc sit motum fluidi exilientis indagare, cum per singula foramina alia atque alia fluida transfluunt. Fluida autem leviora continue ponenda esse apparet, quo sunt altius posita, ne motus turbetur, quod fit cum eodem tempore fluidum inferius ascendit, superiore descendente, per commune foramen. Innotescet hoc modo quisnam sit motus in aquis ex vase effluentibus undique clauso præter foraminulum aliquod superne existens, quod aëri transitum concedit. Hypothesin vero infinitæ vasis cylindrici amplitudinis ratione foraminum retinebimus, atque porro gravitatem specificam fluidi per D exilientis designabimus per A, illiusque quod per G transfluit notabimus littera B, similiterque gravitates specificas fluidorum per foramina, F, H, &c. fluentium indicabimus respective litteris C, D, &c. Denique cum etiam considerandæ hic sint altitudines diversorum fluidorum, quorum quidem, ob figuram vasis cylindricam solum infimum effluens altitudinem mutat, vocabimus x altitudinem fluidi infimi supra foramen D, fluidorum reliquorum, eo quo sibi superincumbunt ordine, altitudines designabimus respective per b, c, d &c. reliquas denominationes paragraphi undecimi retinebimus; quibus ita præparatis computus instituetur ut §. 4. factum est, neque enim quicquam aliud insuper observandum est, quam ut massæ guttularum iisdem tempusculis per diversa foramina transeuntium non simpliciter ex mole, sed etiam ex gravitate specificia æstimentur: *descensus* autem *actualis* pro singulis fluidis erit seorsim sumendus: Hisce vestigiis insistendo reperitur talis primo æquatio

$$A v + \frac{v v}{\alpha \alpha} B v + \frac{v v}{\epsilon \epsilon} C v + \frac{v v}{\gamma \gamma} D v + \&c. = A x + B b + C c + D d, + \&c.$$

quæ reducta dat

$$v = (A x + B b + C c + D d + \&c.) : (A + \frac{v v}{\alpha \alpha} B + \frac{v v}{\epsilon \epsilon} C + \frac{v v}{\gamma \gamma} D + \&c.)$$

§. 15. Si duo sint liquores, erunt duo termini tam in numeratore quam in denominatore sumendi & tres termini cum tres fuerint liquores, atque sic porro: Si proinde liquor effluens sit, v. gr. mercurius, ipsique superincumbat aqua statuanturque gravitates specificæ horum liquorum ut 14. ad 1. fiet

$v =$

$$v = \frac{14x + b}{14 + \frac{1212}{\alpha\alpha}}$$

atque si ratio foraminum D & G fuerit ex gr. ut 3 ad 1, fiet

$$v = \frac{14x + b}{23}$$

§. 16. Patet quoque ratiocinium istud non excludere eos casus, quibus fluida superiora sunt inferioribus specificè graviora, modo fluida inferiora non ascendant per eadem foramina, per quæ superiora descendunt: neque vero id futurum esse præsumo (nec tamen affirmo) cum loco simplicis foraminis tubulus sit quamvis exiguæ altitudinis, per quem liquor superior descendat in inferiorem cavitatem, veluti in fig. 40. ubi quidem duo tantum liquores considerantur.

Hic autem altitudo CR variabilis est, & altitudo AC constans; interim tamen uniformitatis litterarum gratia vocabimus altitudinem AC = x, alteram CR = b; gravitatem specificam fluidi per D erumpentis faciemus rursus = A, alteriusque fluidi per G transeuntis = B, & erit altitudo DO seu

$$v = \frac{Ax + Bb}{A + \frac{111}{\alpha\alpha}B}$$

Igitur si per foramina D & G respective fluant aqua & mercurius erit nunc

$$v = \frac{x + 14b}{1 + \frac{1411}{\alpha\alpha}}$$

§. 17. Ut porro innotescat motus fluidi simplicis ex vase superne parvulo foramine aërem admittente, observandum est, nullam hic altitudinem esse b; quia aër utrique orificio incumbere ad eandem altitudinem censi potest, erit proinde

$$v = \frac{Ax}{A + \frac{111}{\alpha\alpha}B}$$

atque si fuerit $\frac{A}{B} = 850$, quæ præterpropter solet esse proportio inter gravitates specificas aquæ & aëris, erit

$$v = \frac{850x}{850 + \frac{111}{\alpha\alpha}};$$

§. 18. Omnia hæc principia, quæ hætenus adhibuimus, facile ut jam dixi extenduntur ad vasa, quæ finitam ratione foraminum habent amplitudinem; Poteft autem eorum veritas alio etiam modo admodum diverfo evinci, uti ostendam, cum ad *hydraulico-staticam* pervenero, quia altero illo demonstrandi modo pressiones fluidorum in singulis vasis partibus magis fiunt perspicuæ; differunt autem horum fluidorum regulæ staticæ vehementer à legibus, quæ fluidis stagnantibus debentur.

Cæterum habent hæc suam utilitatem ad machinas hydraulicas recte perspiciendas; neque enim satis ad hæc attenti fuisse videntur artifices: dabitur autem occasio de iis uberius differendi in sequenti sectione, ubi calculum ponemus, quantum vis in propellendis aquis adhibitæ perdat in transitu aquæ per plura foramina, ostensuri simul remedia adhibenda, ut illud virium detrimentum, quantum fieri potest, diminuatur. Prius vero alia quædam vasa composita in hac Sectione considerabimus, quam ad hæc descendamus.

§. 19. Fit aliquando, ut vasa juxta se posita aquas unum ex altero recipiant effluxuras demum ex ultimo. Hosce vero motus jam exemplo illustrabimus.

Propositum fuerit vas cujuscunque formæ A G M B (Fig. 41.) quod nova aquarum affusione constanter plenum conservatur usque in A B. Ex eodem interim vase fluidum transire intelligatur per foramen M in aliud vas contiguum B M N C & ex hoc rursus in aliud C N R D per foramen N & sic porro, donec tandem aquæ in aërem ejiciantur, quæranturque loca superficierum H L, P Q, &c. postquam fuerunt ad statum *permanentie* reducta. Quæstio autem sic solvetur.

Perspiciuum nempe est ex eo, quod superficies A B, H L, P Q, &c. in eodem loco permanent, aquas iis transire per foramina M, N, R velocitatibus, quæ debeantur altitudinibus B H, L P, Q R, si modo transitus aquarum per unum foramen non acceleret earundem fluxum per foramen proximum, quod certe non fiet, nisi expresse opera detur, ut id aliquantum fiat. Præterea vero considerandum est, velocitates aquarum per foramina transluentium reciproce esse foraminibus proportionales, quia in statu *permanentie* eodem tempore eadem aquarum quantitates per singula foramina trajiciuntur. Ex istis intelligitur, desig-

natis amplitudinibus foraminum M, N, R, per m , n , p , fore $L P = \frac{m m}{n n} \times B H$; $Q R = \frac{m m}{p p} \times B H$: Est vero $B H + L P + Q R$ æqualis altitudini superficiei A B supra foramen ultimum R seu D R; erit igitur

$$B H + \frac{m m}{n n} \times B H + \frac{m m}{p p} \times B H = D R,$$

& proinde $B H = D R : \left(1 + \frac{m m}{n n} + \frac{m m}{p p} \right)$; pariterque

$$L P = \frac{m m}{n n} \times D R : \left(1 + \frac{m m}{n n} + \frac{m m}{p p} \right) \text{ atque}$$

$$Q R = \frac{m m}{p p} \times D R : \left(1 + \frac{m m}{n n} + \frac{m m}{p p} \right), \text{ seu}$$

$$B H = D R : \left(1 + \frac{m m}{n n} + \frac{m m}{p p} \right)$$

$$L P = D R : \left(1 + \frac{n n}{m m} + \frac{n n}{p p} \right)$$

$$Q R = D R : \left(1 + \frac{p p}{n n} + \frac{p p}{m m} \right)$$

atque sic determinantur situs invariabiles superficierum H L, P Q, &c. At quanto tempore id fiat, si aliter superficies illæ sint positæ & quænam interea aquæ quantitas per singula foramina fluat, inferius examinabimus unà cum aliis quæstionibus eo pertinentibus: Jam vero ex allatis valoribus altitudinum B H, L P, Q R &c. præcipuas affectiones deducemus.

§. 20. I. Cum singula foramina sunt inter se æque ampla, erit $B H = L P = Q R$ &c. & quævis istarum altitudinum toties continebitur in altitudine D R, quoties vasa replicantur.

II. Si vero aliquod foramen sit infinite parvum ratione reliquorum, erunt omnes superficies, quæ sunt cis foramen positæ, in eadem altitudine cum prima superficie A B: reliquæ autem fundo G R erunt proximæ.

III. Si canalis fingatur continuus per singula foramina M, N, R &c. transiens, intelligitur, aquam per orificium canalis effluere debere velocitate, quæ debeat totæ altitudini D R. In nostro vero casu ea velocitas respondet tantum altitudini Q R, cujus rei ratio & origo est, quod *ascensus potentialis* singularum guttularum per foramina, excepto solo foramine effluxus, transfluentium

tium absorbeatur. Igitur vis viva quæ singulis momentis perditur est ad vim vivam quæ singulis momentis generatur, ut DQ ad DR . Altitudines vero BH , LP , &c. repræsentant *respective* vim vivam, quæ continue guttulis per foramina M , N transfluentibus separatim demitur. Puto tamen si foramina fuerint fere æqualia, eorumque centra in rectam lineam posita, ac denique parietes BM , CN , DR non admodum à se invicem remoti sint, fieri posse, ut aliquanto majori velocitate aquæ erumpant, quam theoria ista indicat: In reliquis casibus non dubito de ejusdem accuratatione, abstrahendo animum ab impedimentis sæpe indicatis.

IV. Denique perspicuum est, quoties superficies aquæ HL , PQ &c. situm suum mutant sive plures, sive una sola, mox omnes superficies loca mutaturas esse, donec eo quo dictum fuit modo fuerint ad æquilibrium repositæ. Mutationes autem istas generaliter definire nodosi æque ac prolixi est calculi, nisi vasa ponantur prismatica & infinitæ quasi amplitudinis ratione foraminum, ut nempe incrementa *ascensuum potentialium* aquarum ML , NQ &c. quæ locum mutant, negligi possint ratione *ascensuum potentialium*, qui in guttulis per M , N , R transfluentibus perpetuo generantur. Neque profecto restrictio hæc afficere nos debet, cum passim jam viderimus in vasis vel mediocriter admodum amplis posse sine sensibili errore incrementa motus massarum internarum rejici in calculo. Omittam igitur solutionem generalem, quæ mihi est, ob nimiam ejus prolixitatem, atque ut in hac sectione adhuc feci. vasa ceu infinite ampla & quidem ad majorem concinnitatem prismatica ponam. Incipiam autem à vase bifido.

§. 21. Repræsentatur hujusmodi vas bifidum (Fig. 42.) cujus pars AM Fig. 42. aquis plena, altera BN saltem usque ad HL repleta ponitur, cum jam fluxus per utrumque orificium M & N incipit: affundanturque aquæ in AB , ut vas constanter plenum servetur, sic autem fiet, ut aquæ in BN assurgant (aut etiam descendant pro rerum circumstantiis) quod cum ita sit, quaeremus velocitatem superficiei aqueæ, cum perveniet in situm bl .

Hunc in finem exprimemus amplitudinem orificii M per m , orificii N per n & amplitudinem bl (quæ quidem ubique eadem ponitur) per g . Deinde ponemus $BM = a$, $HM = b$, $Bb = x$, atque proinde $bM = a - x$. Sic vero patet ex positione infinitæ veluti vasorum AM & BN amplitudinis,

V

cum

cum superficies aquæ variabilis est in bl , fore altitudinem debitam velocitati aquæ per M transfluentis $\equiv Bb \equiv x$, velocitatemque ipsam $\equiv \sqrt{x}$, similemque altitudinem ratione orificii $N \equiv bM \equiv a - x$, atque velocitatem aquæ per N transfluentis $\equiv \sqrt{a - x}$; est igitur quantitas dato tempusculo per M in vas BN influentis ad quantitatem eodem tempusculo ex vase effluentis ut $m\sqrt{x}$ ad $n\sqrt{a - x}$, harumque quantitatum differentia divisa per amplitudinem g dat velocitatem superficiæ bl , quæ proinde velocitas, quam vocabimus v , exprimetur hæc æquatione,

$$v = \frac{m\sqrt{x} - n\sqrt{a - x}}{g}$$

§. 22. Ut jam innotescat tempus, quo superficies fluidi ex HL venit in bl , vocabimus illud tempus t : quia autem est $dt = \frac{dx}{v}$, erit, posito pro v valore modo invento,

$$dt = \frac{-g dx}{m\sqrt{x} - n\sqrt{a - x}}$$

Potest quidem hæc formula immediate rationalis fieri ponendo $x = \frac{4aq q}{(1+q q)^2}$,

atque deinde debito modo construi: Ista vero methodus paullo prolixior est hæc altera, qua quantitas reducenda dividitur in duo membra seorsim integranda, nempe præmissa æquatio non differt ab hæc:

$$dt = \frac{mg dx \sqrt{x}}{nna - (mm + nn)x} + \frac{ng dx \sqrt{a - x}}{nna - (mm + nn)x}:$$

Et autem $\int \frac{mg dx \sqrt{x}}{nna - (mm + nn)x} = -\frac{2mg}{mm + nn} \sqrt{x} + \frac{mng \sqrt{a}}{(mm + nn) \sqrt{(mm + nn)}} \times$
 $\log. \frac{n\sqrt{a} + \sqrt{mm + nn} \sqrt{x}}{n\sqrt{a} - \sqrt{mm + nn} \sqrt{x}}$; alteriusque membri integrale

$$\text{nempe } \int \frac{ng dx \sqrt{a - x}}{nna - (mm + nn)x} \text{ fit } = \frac{-2ng}{mm + nn} \sqrt{(a - x)} +$$

$$\frac{mng \sqrt{a}}{(mm + nn) \times \sqrt{(mm + nn)}} \log. \frac{m\sqrt{a} + \sqrt{mm + nn} \times \sqrt{a - x}}{m\sqrt{a} - \sqrt{mm + nn} \times \sqrt{a - x}};$$

Patet exinde addita debita constante fore

$$t = \frac{2mg \sqrt{a - b} - 2mg \sqrt{x} + 2ng \sqrt{b} - 2ng \sqrt{a - x}}{mm + nn} +$$

$$\frac{mng \sqrt{a}}{(mm + nn) \times \sqrt{(mm + nn)}} \times$$

log.

$$\log. \frac{mna + (mm + nn) \times \sqrt{(ax - xx)} + m\sqrt{(mm + nn)}\sqrt{ax} + n\sqrt{(mm + nn)}\sqrt{(aa - ax)}}{mna + (mm + nn) \times \sqrt{(ax - xx)} - m\sqrt{(mm + nn)}\sqrt{ax} - n\sqrt{(mm + nn)}\sqrt{(aa - ax)}} \\ - \frac{mng\sqrt{a}}{(mm + nn) \times \sqrt{(mm + nn)}} \times$$

$$\log. \frac{mna + (mm + nn) \times \sqrt{(ab - bb)} + m\sqrt{(mm + nn)}\sqrt{(aa - ab)} + n\sqrt{(mm + nn)}\sqrt{ab}}{mna + (mm + nn) \times \sqrt{(ab - bb)} - m\sqrt{(mm + nn)}\sqrt{(aa - ab)} - n\sqrt{(mm + nn)}\sqrt{ab}}$$

§. 23. Ex paragrapho 19. liquet superficiem bl in situ suo permanere cum est Bb ($\equiv x$) $\equiv \frac{mna}{mm + nn}$. At vero si in æquatione integrata præcedentis paragraphi ponitur $x \equiv \frac{mna}{mm + nn}$, fit denominator in quantitate logarithmicali $\equiv 0$, ipsaque proinde quantitas infinita: tempus igitur totius motus infinites majus est, quam cujuscunque partis.

Sed ut alium insuper casum determinemus, videbimus quanto tempore superficies aquæ ex infimo situ MN (posito nempe $b \equiv 0$) ascendat quantitate $\frac{1}{2}a$, posito $m:n \equiv 4:3$. fit autem

$$t \equiv \frac{8g\sqrt{a} - 14g\sqrt{\frac{1}{2}a}}{25} + \frac{12g\sqrt{a}}{125} \log. \left(\frac{49 + 35\sqrt{2}}{49 - 35\sqrt{2}} \right) - \frac{12g\sqrt{a}}{125} \log. - 4, \text{ seu}$$

$$t \equiv \frac{8g\sqrt{a} - 7g\sqrt{2a}}{25} + \frac{12g\sqrt{a}}{125} \log. \left(\frac{49 + 35\sqrt{2}}{140\sqrt{2} - 196} \right),$$

id est, proxime $t \equiv \frac{15g}{100} \times 2\sqrt{a}$, quod indicat, esse tempus istud ad tempus quo grave libere cadit lper altitudinem BM proxime ut $15g$ ad 100 : Pariter tempus descensus invenitur, si ab initio superficies bl fuerit ultra situm æquilibrii posita. Fuerit v. gr. utrumque vas aquis totum repletum, orificia autem M & N rationem nunc habeant quæ est inter 3 & 4 , sitque tempus determinandum, quo superficies ex B descendat per dimidiam BM : hypothes hæ faciunt $m \equiv 3$; $n \equiv 4$; $b \equiv a$, atque $x \equiv \frac{1}{2}a$, ita vero fit

$$t \equiv \frac{8g\sqrt{a} - 7g\sqrt{2a}}{25} + \frac{12g\sqrt{a}}{125} \log. \left(\frac{49 + 35\sqrt{2}}{49 - 35\sqrt{2}} \right) - \frac{12g\sqrt{a}}{125} \log. - 4. \text{ Ex quo apparet in utroque exemplo idem esse tempus.}$$

§. 24. Priusquam descendamus ad vasa multifida indagasse conveniet, quænam aquæ quantitas per utrumque orificium M & N fluat, dum superficies aquæ ex situ HL venit in bl . Et primo quidem, quod ad orificium M

pertinet, perspicuum est quantitatem aquæ dato tempusculo (dt) per illud transfluentem proportionalem esse velocitati ($\sqrt{x}$) ductæ in magnitudinem orificii (m) ipsumque tempusculum dt , ita ut hæc quantitas sit

$$\left(\text{ob } dt = \frac{-g dx}{m\sqrt{x-n}\sqrt{a-x}} \text{ per §. 22.} \right) = \frac{-mg dx \sqrt{x}}{m\sqrt{x-n}\sqrt{a-x}},$$

atque proinde omnis quantitas quæ ab initio effluerit

$$= - \int \frac{mg dx \sqrt{x}}{m\sqrt{x-n}\sqrt{a-x}}. \text{ Est autem } - \int \frac{mg dx \sqrt{x}}{m\sqrt{x-n}\sqrt{a-x}} = \\ \frac{mng a}{(m+n)^2} \log. \left(\frac{ma - mb - nb}{mx + nx - na} \right) + \frac{mg}{m+n} \times (a - b - x).$$

Eodem modo eruitur quantitas aquæ interea per orificium N effluentis (quæ scilicet est $= - \int \frac{ng dx \sqrt{a-x}}{m\sqrt{x-n}\sqrt{a-x}} =$

$$\frac{mng a}{(m+n)^2} \log. \left(\frac{ma - mb - nb}{mx + nx - na} \right) - \frac{ng}{m+n} \times (a - b - x).$$

Atque inde etiam innotescit quantitas aquæ, quæ in AB affunditur, neque enim differt ab illa, quæ per M transfluit: aqua denique in vase BN collecta exprimitur per $g(a - b - x)$, & cum differentia sumitur aquarum per M & N transfluentium, oritur eadem ista quantitas $g(a - b - x)$.

§. 25. Prouti §. 21. velocitatem superficiei locum continue mutantis determinavimus pro vase bifido, ita nunc in vasis multifidis velocitates singularum superficierum definiemus. Fuerit nempe altitudo superficiei supremæ supra proximam $= x$, altitudo hujus supra sequentem $= y$, deinde $= z$, rursusque altitudo proxima $= s$, & sic porro. Amplitudines vero orificiorum designentur per m, n, p, q , &c. amplitudines vasis secundi, tertii, quarti &c. sint M, N, P, &c. Sic patet fore velocitatem superficiei secundæ $= \frac{m\sqrt{x-n}\sqrt{y}}{M}$; veloc. superf. tert. $= \frac{n\sqrt{y-p}\sqrt{z}}{N}$; velocit. superfic. quartæ $= \frac{p\sqrt{z-q}\sqrt{s}}{P}$ &c.

Porro cum spatiola iisdem tempusculis à superficieribus percurfa sint ut velocitates, apparet sic singulis momentis determinari situs istarum superficierum, quamvis æquationes sint intractabiles fere. Id ex se patet, si vel unica

ca superficies extra situm æquilibrii, supra §. 19. definiti posita fuerit, fore ut omnes reliquæ motibus reciprocis agitentur, donec post tempus infinitum in pristinum situm redierint simul.

§. 26. Sit porro vas ita formatum, ut ostendit Fig. 43. divisum scilicet Fig. 43. in duas partes ABEG & LQNE inter se, mediante foramine M communicantes; sintque præterea foramina H & N per quæ aquæ exiliant, dum in AB totidem affunduntur. Sint autem amplitudines in utroque vase veluti infinite amplæ ratione foraminum M, H & N; Hisque positis propositum sit velocitates invenire, quibus aquæ tam per H, quam per N ejiciantur seu altitudines istis velocitatibus debitas. Erunt autem velocitates invariabiles, quia vas aquis plenum conservatur, simulque vasis amplitudines respectu foraminum infinitæ censentur.

Solutio istius problematis ex præcedentibus facile colligetur, si modo concipiatur foramen M in duas divisum partes o & p , quarum altera o aquas foramini H, altera p foramini N mittat: partes autem o & p (quia per utramque eadem fluunt velocitate aquæ) eam habebunt rationem, quam inter se habent quantitates aquarum eodem tempore per H & N effluentium, id est, rationem compositam ex ratione amplitudinis H ad amplitudinem N & velocitatis in H ad velocitatem in N. Quibus præmonitis perspicuum est, si amplitudines foraminum M, H & N indicentur per α , ζ , γ , altitudines autem velocitatibus in H & N debitæ designentur per x & y , ipsæque proinde velocitates per $\sqrt{x}$ & $\sqrt{y}$ fore amplitudinem $o = \frac{\zeta\sqrt{x}}{\zeta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y}} \alpha$ & amplitudinem

$$p = \frac{\gamma\sqrt{y}}{\zeta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y}} \alpha.$$

Ponatur nunc altitudo superficiei AB supra orificium H $= a$, & habebitur x , ut demonstratum fuit §. 4. si quadratum foraminis o dividatur per summam quadratorum foraminum o & H & quod oritur multiplicetur per a ; sic

igitur fit $x = \frac{\alpha\alpha\alpha x}{\alpha\alpha x + (\zeta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y})^2}$, ex quo oritur hæc æquatio

$$(A) \alpha\alpha x + (\zeta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y})^2 = \alpha\alpha a.$$

Eodem modo ratione foraminum p & N, posita altitudine AB supra N $= a + b$, obtinetur hæc altera æquatio:

V 3

(B)

$$(B) \alpha \alpha \gamma + (\zeta \sqrt{x} + \gamma \sqrt{y})^2 = \alpha \alpha \times (\alpha + b).$$

Subtractâ æquatione (B) ab æquatione (A) prodit $y = x + b$, ex quo sequitur, si venæ ambæ verticaliter sursum dirigantur, utramque ad eundem locum affilire. Deinde si in æquatione (A) substituatur pro y valor ejus $x + b$, erit

$$(C) \alpha \alpha x + (\zeta \sqrt{x} + \gamma \sqrt{x+b})^2 = \alpha \alpha \alpha,$$

unde deducitur valor ipsius x æquatione quadrata.

§. 27. Ex præcedentis paragraphi æquationibus sequentes fluunt affectiones.

I. Quia velocitas aquæ per M transfluentis est $= \frac{\zeta \sqrt{x} + \gamma \sqrt{y}}{\alpha}$, erit altitudo generans hanc velocitatem $= \left(\frac{\zeta \sqrt{x} + \gamma \sqrt{y}}{\alpha} \right)^2$; sed si addantur æquationes (A) & (B) fit:

$$\left(\frac{\zeta \sqrt{x} + \gamma \sqrt{y}}{\alpha} \right)^2 = \frac{2\alpha + b - x - y}{2} = \text{ob } (y = x + b) \alpha - x.$$

II. Si foramen H sit valde exiguum ratione foraminum M & N, id est, si ζ possit cenferi nulla ratione α & γ , abit æquatio (C) in hanc

$$\alpha \alpha x + \gamma \gamma x + \gamma \gamma b = \alpha \alpha \alpha, \text{ feu}$$

$$x = \frac{\alpha \alpha \alpha - \gamma \gamma b}{\alpha \alpha + \gamma \gamma};$$

Id vero egregie convenit cum paragrapho decimo nono, cum manifestum sit aquam per foramen valde exiguum ad eandem altitudinem affilire, quam haberet aqua, si hæc laminam LQ tantum deorsum premat, quantum ab aqua interna sursum premitur; Ista vero præfata altitudo vi paragraphi 19. est $\frac{\alpha \alpha \alpha - \gamma \gamma b}{\alpha \alpha + \gamma \gamma}$; Est porro in ista hypothesi altitudo velocitatis aquarum in N

$$\text{feu} \quad x + b = \frac{\alpha \alpha \alpha + \alpha \alpha' b}{\alpha \alpha + \gamma \gamma}$$

& denique altitudo velocitatis aquarum in M, feu

$$\alpha - x = \frac{\gamma \gamma \alpha + \gamma \gamma b}{\alpha \alpha + \gamma \gamma};$$

quæ posteriores æquationes in isto casu particulari pariter ex §. 19. immediate colligi aut prævideri potuissent.

III.

III. Si vero nunc alterum foramen N admodum exiguum præ ambobus reliquis ponatur, erit factò $\gamma = 0$

$$x = \frac{a a a}{a a + c c}; \text{ deinde}$$

$$x + b = \frac{a a a + a a b + c c b}{a a + c c}, \text{ \&}$$

$$a - x = \frac{c c a}{a a + c c}.$$

IV. Si $\gamma \gamma b = a a a$, fit $x = 0$. Nullam igitur in hoc casu pressionem sustinent partes laminæ L Q: imo inferiora versus premitur, si γ fit majus quam $\frac{a a a}{b}$, & lamina nullibi fit perforata.

Ista vero omnia similiter ex §. 19. facile colliguntur.

V. Ita quoque ope ejusdem paragraphi sine calculo novo prævideri potuisset, quid fieri debeat, cum positis foraminibus H & N in eadem altitudine summa foraminum eorum, ceu unicum amplitudinis $c + \gamma$ considerari potest: Indicant nempe tam §. 19. quam §. 26. esse

$$x = \frac{a a a}{a a + (c + \gamma)^2},$$

VI. Notari etiam potest, cum valor ipsius x fit imaginarius, id provenire ex eo, quod aquæ non solum non effluant, in aliquibus casibus per H, sed quod superficies L Q etiam descendat; unde fieri potest, ut infra orificium M descendat, quo ipso cessat aquarum contiguitas contra hypothesin propositionis. Si autem valor x est realis, tum dupliciter exprimitur, sed alter valor inutilis est reputandus; sic igitur cavendum ne præpostera radix ceu utilis assumatur.

VII. Denique ut casum specialissimum attingamus, ponemus omnia foramina inter se æqualia, & prodibit $\gamma x x + (2b - c a) x = -a a + 2a b - b b$, seu $x = \frac{3a - b - 2\sqrt{(a a + a b - b b)}}{5}$; atque si fuerit præterea $a = 3b$, erit $x = (\text{proxime}) \frac{3}{15} b$, deinde altitudo velocitatis in foramine N seu $x + b = \frac{10}{15} b$ atque altitudo velocitati in M debita seu $a - x = \frac{12}{15} b$. Sunt itaque velocitates seu etiam, quia foramina æqualia sunt, quantitates aqua-

aquarum iisdem temporibus per foramina M, H & N transfluentium proxime ut $\sqrt{41.2.}$ & $\sqrt{19.}$

§. 28. Ex his omnibus patet methodus determinandi motum in fluidis tum etiam, cum quantitas *virium vivarum* non conservatur; & simili modo semper absolvetur computus, quoties ex natura subjectæ quæstionis præiudicari potest (uti in quæstionibus hujus sectionis accurate potuit) quantum *vis viva* singulis momentis inutilis ad motum determinandum evanescat. Neque enim soli sunt casus, quos adhuc examinavimus: lubet itaque alium addere, qui oscillationes fluidorum spectat, ut innotescat quantum inde decrementum excursions fluidi capiant.

Fig. 44.

Sint duo tubi amplitudine æquales & cylindrici AL & BH (Fig. 44.) verticaliter inserti vasi amplissimo horizontali A B O P. Sit vas istud totum aqua repletum: tubi autem aquam habeant usque in C & F; deinde sublato æquilibrio hæreat altera superficies in G altera in E; moxque aqua sibi relicta moveri incipiat. His positis tantum deberet superficies G descendere infra locum C, alteraque superficies E ascendere supra F, quanta est altitudo G C seu E F si omnis *vis viva* conservaretur (ab impedimentis frictionum aliisque similibus nunc animum abstrahimus): Verum patet, *vim vivam* omnis aquæ per A in vas horizontale fluentis absumi sine alio effectu ab aqua ibidem stagnante, indeque sequitur descensum superficiei G alteriusque ascensum minorem fore, quam modo dictum fuit: id igitur decrementum nunc explorabimus.

Ponatur ad hunc finem superficiem ex G pervenisse in M, ponaturque $GM = x$, $GC = b$, $CA = a$: erit $BE = a - b$, $EN = x$; $MC = FN = b - x$; Deinde fiat altitudo debita velocitati superficiei in M $= v$, in situ proximo $m = v + dv$; eritque incrementum *vis viva* aquæ (dum superficies percurrunt elementa M m, N n, seu dx) $= 2ad v$, cui addenda est *vis viva* guttulæ, quæ ab aqua vasis horizontalis absumitur, nempe $v dx$, & erit summa $2ad v + v dx$ æqualis *descensui actuali* aquæ multiplicato per massam aquæ, quod productum est æquale *descensui actuali* guttulæ dx , multiplicato per $2b - 2x$. Est igitur

$$2ad v + v dx = 2b dx - 2x dx.$$

Hæc vero æquatio recte integrata abit in hanc

$$v =$$

$$v = 4a + 2b - 2x - c^{\frac{-x}{2a}} \times (2b + 4a)$$

unde si ponatur $4a + 2b - 2x - c^{\frac{-x}{2a}} \times (2b + 4a) = 0$,
dabit valor ipsius x totam excursionem, à qua si auferatur b , residuum indicabit descensum infra punctum æquilibrii C.

§. 29. Ut vero exemplo quodam appareat, quantum hâc ratione oscillationes diminuantur, ponemus $a = b$, facta scilicet $CA = GC$ & $BE = 0$.

Ita oritur

$$3a - x = c^{\frac{-x}{2a}} \times (3a) \text{ five}$$

$$c^{\frac{x}{2a}} = \frac{3a}{3a - x} \text{ vel } x = 2a \log. \frac{3a}{3a - x},$$

cui æquationi prope admodum satisfacit valor $x = \frac{2}{3}a$. Est igitur decrementum excursionis seu $a - b =$ quartæ parti elevationis fluidi supra punctum medium: si majus observetur experimento, reliquum adhæfioni aquæ ad latera tuborum tribuendum erit.

§. 30. Neque ista diminutarum excursionum ratio plane, ut suspicor, auferetur, si vel æqualis fiat amplitudinis tubus horizontalis cum verticalibus, ob mutatam fluidi directionem in punctis A & B.

Cæterum infiniti alii fingi possent casus iisdem principiis solvendi, veluti si natura oscillationum indaganda sit in vase Fig. 44. cum id in parte horizontali diaphragmate in duas dispescitur partes solo lumine, quod diaphragma habeat, inter se communicantes & hujusmodi alii. Puto autem hæc jam sufficere, ut quisque sibi facile regulas generales pro istiusmodi quæstionibus solvendis forinare possit.

EXPERIMENTA

Ad sectionem octavam pertinentia.

Experimentum I.

Paragraphum quartum, quo dicitur altitudinem velocitati aquæ per orificium D effluentis (Fig. 37.) esse $\frac{mmx}{nn + mm}$ eo confirmavi modo, ut

X

utrum-

utrumque orificium G & D limbum haberet instar Zonulæ paullulum elevatum, ne contractioni venarum locus esset, tutumque fieri posset iudicium à quantitate aquæ dato tempore effluentis ad velocitates. Deinde sumtis accuratè mensuris, observatoque tempore quo superficies per datum spatium A P descenderet, vidi tempus istud recte respondere velocitatibus dicto paragrapho definitis: observavi etiam nihilo mutari motum ab elevatione aut depressione diaphragmatis. Reliqua ad experimentum pertinentia memoria exciderunt, neque ea in chartam conieci: superfluum autem duxi experimentum repetere, quod unicuique facile erit imitari: fundamentum autem id est reliquis, quæ adeoque ulteriori disquisitione experimentalis vix opus habent: volui tamen sequentia præterea tentare.

Experimentum 2.

Vase usus sum, quale fere adhibuit Mariottus (*vid.* fig. 38.) rursusque confirmavi æquationem nostram hunc in modum: feci ut aquæ per orificium D horizontaliter effluerent, tuncque mensuras cepi altitudinis orificii D supra pavementum & distantiam loci, ubi vena in pavementum incidebat à puncto in eodem pavimento, cui orificium D verticaliter imminebat; Inde cognovi altitudinem velocationi aquæ in D effluentis debitam: eandem autem hanc altitudinem experimento proxime inveneram, quam theoria hujus sectionis indicat §. IV. Similia experimenta apponam in fine experimentorum ad sectionem duodecimam pertinentium, quæ simul theoriam nostram *hydraulico-staticam* confirmabunt.

Denique cum multa sint in §. §. 26. & 27. quæ singulari calculo eruta fuerunt, operæ pretium erit de illis quoque experimenta sumere, præsertim cum alia simul eadem opera sumi poterunt experimenta, quæ in *sect.* XII. recensentur, si vas, quale Fig. 43. sistit, ad hunc finem fieri curetur.

Cæterum hæc theoria etiam confirmatur experimentis in *Sectione Septima* recensitis, quæ de oscillationibus fluidorum in tubos per foramina influentium sumfi.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ

SECTIO NONA.

De motu fluidorum, quæ non proprio pondere, sed potentia aliena ejiciuntur, ubi præsertim de Machinis Hydraulicis earundemque ultimo qui dari potest perfectionis gradu, & quomodo mechanica tam solidorum quam fluidorum ulterius perfici possit.

§. I.

IN hac sectione, qua Machinas examinare hydraulicas, usumque earum, quantum fieri potest, perficere potissimum constitui, animum abstrahemus à variationibus motus, quæ originem ducunt à potentia vel inertia fluidi interni, quia ut vidimus motus aquæ internæ tantum non æquabilis est à primo fere fluxus initio, si orificium exile sit, uti est in Machinis hydraulicis plerisque ratione amplitudinum internarum. Res enim foret ridicula in rebus practicis sollicitos esse de mutationibus, quæ primis fluxus momentis fiunt, quasque jam determinavimus in sectione quarta, quod ibi operæ pretium esse poterat ut omnis theoriæ vis inde elucesceret. Igitur durante toto motu, brevitatis gratiâ, ponemus aquam constanter velocitate expelli, quæ se habeat ut radix potentiæ internæ prementis, postquam hæc potentia ad pondus cylindri aquei foramini superincumbentis reducta fuerit: nam quæcunque fuerit ista potentia, considerandum erit pondus cylindri verticalis aquei superficiæ aqueæ internæ superincumbentis, atque altitudo istius cylindri dabit altitudinem velocitati aquæ exilientis debitam, si modo nulla adsint obstacula extrinseca, & aqua ex vase amplissimo ejiciatur. Hoc ita intelligendum est, ut si operculum A B pondere P oneratum (Fig. 45.) aquam per orificium F expellat, pondus autem P æquale sit ponderi cylindri aquei H A B I, tunc vena aquea F G altitudinem H I attingere debeat.

Fig. 45.

Definitiones.

§. 2. Per *potentiam moventem* deinceps intelligam principium illud agens, quod consistit in pondere, pressione animata aliisque hujusmodi viribus, uti dicuntur, mortuis.

Productum autem quod oritur à multiplicatione *potentiæ* istius *moventis* per ejusdem velocitatem æque ac tempus durante quo pressionem suam exercit, designabo per *potentiam absolutam*. Vel quia productum ex velocitate & tempore proportionale est simpliciter spatio percurso, licebit etiam *potentiam absolutam* colligere ex *potentia movente* multiplicata per spatium, quod eadem percurrit. Id vero productum ideo voco *potentiam absolutam*, quia ex illo demum æstimandi sunt labores hominum operariorum in elevandis aquis exantlati, quod mox demonstratum dabo in regulis, quæ mihi in hanc rem observatæ fuerunt. Interim visæ mihi fuerunt machinæ hydraulicæ commode se reduci pati ad duo genera, quorum alterum aquas cum impetu ejicit, alterum de loco in locum placide veluti transportat. Utrumque ordine suo pertractabo genus & denique sub finem quædam addam de diversis potentiis moventibus.

(A) *De machinis aquas cum impetu in altum projicientibus.*

Regula 1.

§. 3. Labores hominum operariorum, qui machinis hydraulicis pro aquis elevandis apponuntur, æstimandi sunt ex *potentia absoluta*, id est, ex *potentia movente* seu pressione quam exerunt, ex tempore & ex velocitate puncti, cui *potentia movens* applicatur.

Demonstratio.

(α) De *potentia movente* res est perspicua: labores enim cæteris omnibus paribus sunt utique proportionales numero operariorum seu *potentiæ moventi*. (ε) Ratione temporis res est non minus manifesta ex omnium circumstantiarum replicatione, quæ ex duplicatione temporis oritur. (γ) Denique quod ad velocitatem attinet res ex eo est deducenda, quod si *potentiam moventem* duplices, siue ejus velocitatem non diversus oriatur effectus, nem-

nempe duplus ab utraque parte. Finge pondus *P* descensu suo aquam per orificium *F* ejicere ad altitudinem *FG* : deinde manentibus reliquis duplicatum puta orificium *F*, & vides ad eandem altitudinem *FG* eodemque tempore duplam aquæ quantitatem ejectum iri ab eadem *potentia movente P*, sed ea duplo celerius descendente. Pariter quantitas aquæ manentibus reliquis duplicabitur, si & orificium *F* & amplitudinem *AB* & pondus seu *potent. movent. P* duplices, tunc vero velocitas hujus potentiæ duplicatæ invariata manet. Igitur utroque modo effectus geminatur. Q. E. D.

Scholium.

§. 4. Propositio præcedens non sensu physiologico sed morali est interpretanda : moraliter neque plus neque minus æstimo laborem hominis, qui eadem celeritate conatum duplum exercet, quam ejus qui eodem conatu celeritatem duplicat, quia nempe uterque eundem edit effectum, fieri tamen potest, ut alterius labor, quamvis altero non minus robusti, sensu physiologico sit admodum major. Si quis conatu 20. librarum singulis minutis primis spatium 200. *ped.* faciat, is facile conatum geminabit, difficillime vero velocitatem. Ex hoc consequens est in omni machinarum genere dispiciendum præsertim esse, quomodo debeant esse constitutæ, ut pro eodem tempore minima hominum defatigatione productum ex conatu eorum in velocitatem omnium maximum sit : atque exinde patebit, quænam in ergatis longitudo vectibus sit tribuenda, quantus in rotis seu tympanis calcatoriis radius sit faciendus, quanta remis longitudo sit concilianda, & sic de aliis machinis.

Ratione usus autem tympanorum calcatoriorum, quæ frequentissime adhibentur ut momentum nostræ animadversionis eo magis fiat perspicuum, hoc experimentum intelligatur :

Ponamus in Fig. 46. altitudinem verticalem multorum milliarum, ad quam homo dato tempore ascendere debeat: tempus autem sumemus decem horarum, quia talis laboribus diurnis terminus esse solet, dein fingamus plures vias, *AC*, *AD* &c. diverse ad horizontalem *BD* inclinatas: His positis intelligimus eò celerius viatori progrediendum esse, quo viam selegerit minus inclinatam, ut eodem tempore culmen montis *A* attingat, & patet viam aliquam fore veluti *AC*, super quâ minima defatigatione iter absolvet, quan-

Fig. 46.

doquidem nemo nec super plano verticali incedere nec dato tempore viam infinitam absolvere potest; Statuamus viam hanc minimæ defatigationis cum horizontali angulum facere $A C B 30. graduum$.

Quod si ita sit, erit tympanum calcatorium ita fabricandum, ut pondus desiderata velocitate superetur, cum calcator perpetuo triginta gradibus à puncto tympani infimo distat.

Ex eodem principio etiam inter machinas diversi generis selectus est faciendus: ita v. gr. si in ergatis vectarius potentiam exerat, seu pressionem horizontalem, quæ efficiat quartam sui proprii ponderis partem, hocque nisi singulis minutis primis spatium $200. ped.$ absolvat, is fere ut puto eodem defatigabitur modo, ac si eadem velocitate tympanum rotatorium ad angulum $30. grad.$ calcet; interim tamen pondus duplum eodem tempore ad eandem altitudinem hoc modo feret calcator, quia cæteris paribus pressionem duplam exerit.

Regula 2.

§. 5. Existente eadem *potentia absoluta* dico omnes machinas, quæ nullas patiuntur frictiones & quæ nullos motus ad propositum finem inutiles generant, eundem effectum præstare neque adeo unam alteri præferendam esse.

Demonstratio.

Ex mechanicis constat machinam utcunque compositam reduci posse ad vectem simplicem: igitur omnem machinationem hydraulicam repræsentare licebit simplici antlia vecte instructa Fig. 47. ubi nempe embolus ope vectis $M N$ mobilis circa punctum M detruditur, atque sic aqua per orificium F expellitur. At vero si potentia movens P vecti applicata intelligatur in N , videmus ex præcedente propositione nihil lucri accedere *potentiæ absolutæ* ab aucta vel diminuta longitudine vectis $M N$: & certe quæcunque sit ista longitudo fieri potest, ut *potentia movens* eadem atque invariata velocitate mota eandem aquæ quantitatem eodem impetu expellat, si modo amplitudo antliæ AB rationem habeat constantem ad longitudinem vectis $M N$. Ex quibus perspicuum est, omnes machinas eadem *potentia absoluta* eundem effectum præstare, si modo à frictionibus motibusque ad destinatum finem inutilibus animus abstrahatur,

Scholium.

Scholium.

§. 6. Non desunt qui putent machinam excogitari posse, cujus ope minimo labore maxima aquæ quantitas ad quamcunque altitudinem elevari possit, animumque excrucient, in anquirendis rotis, vectibus, ponderibus appendendis: sed operam perdunt, neque audiendi sunt hujusmodi promissores, cum magni quid sibi videntur invenisse: Optima machina est, si solum ejus effectum respiciamus, quæ minimas patitur frictiones, nullosque generat motus inutiles, de quo utroque evitando præcepta trademus infra,

Regula 3.

§. 7. In antliis, quales Figuris 45. & 47. repræsentantur, in quibus superficies aquæ interna AB in eadem propemodum altitudine est cum foramine F, sunt *potentiæ absolutæ* pro iisdem temporibus in triplicata ratione velocitatum aquarum exilientium.

Demonstratio.

Sunt enim *potentiæ moventes* in duplicata ratione velocitatum, quibus aquæ per foramen F erumpunt & velocitates *potentiarum moventium* sequuntur ipsam rationem velocitatum aquarum exilientium: Sed pro iisdem temporibus sunt *potentiæ absolutæ* ut *potentiæ moventes* multiplicatæ per suas velocitates, ergo patet propositio.

Scholium.

§. 8. Sequitur ex ista regula, si animus sit aquam per foramen F ad altitudinem FG elevaré, magnam *potentiæ absolutæ* partem sine fructu perdi, cum aquæ majori impetu erumpunt, quam quæ altitudini FG respondeat; fac enim aquas dupla velocitate expelli, requiretur *potentiæ absolutæ* octupla, neque tamen ratione finis propositi effectus plus quam duplus est censendus, quia nempe eodem tempore dupla aquarum quantitas elevatur: potuissetque iste effectus obtineri *potentiæ absolutæ* subquadrupla exprimendo aquas simplici velocitate per foramen duplum; Hoc igitur nomine tres quartæ partes istius *potentiæ* inutiliter impensæ dicendæ sunt. Originem hujus detrimenti indicavi §. 5. eaque consistit in motu qui generatur ad propositum finem inutili: nempe

pe omnis motus qui aquis residuus est postquam altitudinem G attigerunt in nostro casu superfluous est dicendus.

Regula 4.

Fig. 48.

§. 9. Cum aquæ expelluntur per canalem D F (Fig. 48.) habentque in orificio F velocitatem quæ debeat altitudini verticali G F, est *potentia absoluta* eodem tempore impensa proportionalis velocitati aquæ in F ductæ in altitudinem G supra A B.

Demonstratio.

Est enim potentia movens P proportionalis præfatæ altitudini & velocitas istius potentiae est ut velocitas aquæ in F.

Scholium.

§. 10. *Potentia absoluta* majori ratione crescunt quam velocitates aquarum effluentium, id est, quam quantitates eodem tempore ejectæ: attamen differentia rationum fere insensibilis est, cum altitudo F G parva admodum est ratione altitudinis canalís F D: Sit ex. gr. F G æqualis $\frac{1}{4}$ F D (negligendo altitudinem B D) mox vero ejiciantur aquæ velocitate dupla, ita, ut nunc sit F D = F G; sic erunt *potentia absoluta* ut $1 \times \frac{1}{4}$ ad 2×2 seu ut 5 ad 16 sic ut ad ejiciendam duplam aquæ quantitatem *potentia absoluta* requiratur plusquam tripla: Si vero F G statuatur prius = $\frac{1}{100}$ F D, & deinde aquæ rursus dupla velocitate exprimi ponantur, erunt nunc *potentia absoluta* ut 1×101 ad 2×204 seu ut 101 ad 208, quæ ratio à subdupla parum deficit. Sequitur inde, quo minori velocitate aquæ hauriantur, eo majori cum fructu *potentiam absolutam* impendi, & tunc demum eam propemodum omnem utiliter impendi, cum fere insensibili velocitate aquæ per orificium F effluunt: poterit autem magnitudo orificii compensare velocitatis exiguitatem, ut dato tempore notabilis aquarum quantitas hauriri possit. Dispendium *potentia absoluta* sic definitur.

Regula 5.

§. 11. Constitutum fuerit sope antliæ A B D F, valvula in fundo instructæ & aquæ impositæ, aquas ex loco humiliori A D in altiore F transfundere, fueritque velocitas media aquæ in F effluentis debita altitudini F G, erit

erit dispendium *potentia absoluta* ad integram hanc potentiam ut F G ad altitudinem G supra A B.

Demonstratio.

Fingamus augeri admodum orificium F diminuta in eadem ratione velocitate aquarum effluentium in F; sic non mutabitur quantitas aquæ dato tempore effluentis, si velocitas *potentia moventis* eadem sit, atque proinde idem erit effectus. Sed si velocitas ita diminuatur, ut altitudo ipsi debita sit insensibilis, exprimetur *potentia movens* per altitudinem F supra A B, cum antea *potentia movens* erat æqualis altitudini G supra A B; & cum in utroque casu eadem sit velocitas *potentia moventis*, erunt *potentia absoluta* pro iisdem temporibus ut altitudo G ad altitudinem F supra communem A B. Igitur differentia altitudinum G & F exprimet dispendium, cum integra altitudo G supra A B repræsentat totam *potentiam absolutam*.

§. 12. Idem ratiocinium valet pro omni machinationum genere: Quoties nempe aquæ in locum, ad quem elevandæ sunt, evecæ notabilem habent velocitatem, magnum fit *potentia absoluta* dispendium: posita enim altitudine elevationis $\equiv A$; altitudine debita velocitati aquarum in loco quo effunduntur $\equiv B$, integra potentia absoluta $\equiv P$, perdetur $\frac{B}{A+B} \times P$.

Notari etiam potest, cum aquæ trans altitudinem aliquam, cujus culmen in F positum sit, fundi debent ope antliæ tubo instructæ, continuandum esse tubum D F inferiora versus quantum id liceat, nec abruptum in F, prouti id apparet ex Fig. 49. Nam si v. gr. punctum F duplo altius positum sit, quam extremitas tubi G, duplo major *potentia absoluta* requiritur pro transfundendis aquis per canalem abruptum in F, quam per continuatum usque in G; si parvula utrobique velocitate effluant, cujus nempe altitudo genitrix parva sit ratione altitudinum F D vel G D.

Fig. 49.

Regula 6.

§. 13. Cum in antliis quas hucusque consideravimus opercula A B seu potius emboli non bene lateribus machinarum respondent, hiatus relinquitur, & ab hoc aliud dispendii genus in potentiis absolutis oritur, quod in antliis, in quibus altitudo orificii supra embolum negligi potest, sic

Y

fic determinatur. Ut aggregatum ex foramine effluxus & prædicto hiatu, ad eundem hiatum, ita *potentia absoluta*, quæ impenditur, ad partem illius quæ inutilis est, seu ad ejusdem dispendium.

Demonstratio.

Nam aquæ per foramen & hiatum æqualiter premuntur, & æquali velocitate fluunt; perditur autem omnis *potentia absoluta*, quæ aquas per hiatum cogit, & hæc se habet ad integram *potentiam absolutam*, ut hiatus ad summam foraminis & hiatus.

Scholium.

§. 14. Convenit utique embolis uti bene formatis & politis; necesse quoque est ut cavitas antliæ sit plane cylindrica, ejusdemque latera pariter perpolita. Vix autem crediderim, nisi id fiat alio fine, è re esse, ut emboli cavitates ultima accuratione expleant, quia fortasse sic majus oritur virium dispendium à frictionibus, quam si circumcirca parvulus relictus fuisset hiatus: Si enim hiatus ille centesimam v. gr. partem foraminis effluxus efficiat, vix amplius locus erit frictionibus & non nisi centesima præterpropter *potentiæ absolutæ* pars inde perditur, & fortasse à frictione emboli cavitatem antliæ exacte occupantis majus dispendium oritur. Igitur hoc respectu non est quod nimis sollicitè evitemus transitum aquæ per hiatum ab embolo relictum. Non respicit autem hæc animadversio illas machinas, in quibus emboli retractione aquæ in antliam attrahendæ sunt. Hic enim justa & plena emboli magnitudo omnino est necessaria.

Regula 7.

§. 15. In machinis quæ plura habent foramina aquas transmittentia ex una cavitate in alteram, aliquid de *potentia absoluta* perditur, cujus rei rationem in præcedente sectione esse diximus, quod singularum guttularum ex una cavitate in alteram per foramen commune fluentium *ascensus potentialis* perit.

Quo plura sunt & quo minora hujusmodi foramina, eo majus oritur *potentiæ absolutæ* dispendium, quod magni momenti esse solet, idque fortasse præter communem opinionem, in machinis, quas Vitruvius ab inventore vocat,

vocat, Ctesibianis. Loquor autem de foraminibus ita dispositis, ut omnis aqua effluxura per illa transire debeat. Istud jam detrimenti genus tali definietur calculo.

Sit amplitudo foraminis ultimi aquas in aërem emittentis $=n$, amplitudines autem reliquorum foraminum, per quæ aquæ trajiciuntur intra machinam, designentur litteris α , ϵ , γ , &c. & erit, posita utrobique eadem *potentia movente*, altitudo debita velocitati aquæ effluentis ad similem altitudinem nullis obstantibus foraminibus internis, ut

1 ad $1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\epsilon\epsilon} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \&c.$ (per §. 11. *sect.* 8.) sequitur inde factis istis altitudinibus inter se æqualibus, fore *potentias moventes* ut

$1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\epsilon\epsilon} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \&c.$ ad 1, & quia utrobique velocitates potentiarum moventium eadem sunt, similem quoque pro iisdem temporibus rationem habebunt *potentia absolute*. Superflua igitur est pars ejus $\frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\epsilon\epsilon} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \&c.$ unde dispendium *potentia absolute* erit ad totam hanc potentiam ut

$$\frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\epsilon\epsilon} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \&c. \text{ ad } 1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\epsilon\epsilon} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \&c.$$

Scholium.

§. 16. Quoties idea machinæ foramina postulat, per quæ aquæ ex uno modio in alium transfluant (quod fit in omni antliarum genere; veluti aspirantium, *aspirantes* gallice aut prementium, *foulantes* &c.) sunt illa foramina quantum id reliquæ circumstantiæ permittunt, amplissima facienda, ita ut amplitudo orificii effluxus parva admodum sit respectu illorum foraminum internorum: Ut vero usus regulæ clarius pateat, exempla considerabimus machinarum aliarum non minus usitatarum.

Exemplum 1.

Proposita sit machina (quam repræsentat Figura 50.) in qua emboli C Fig. 50. & F alternatim deprimuntur, atque per diabetas AB, DE aquæ in modiolum BEH intruduntur, ut sic jactus fiat continuus per orificium H. Cum hic emboli alternatim agant, alterutrum considerabimus quasi solum sed continue agentem; ita vero considerandum est foramen effluxus H, amplitudi-

nis n , & alterutrum foraminum o, p , quibus singulis fit amplitudo α ; ita erit dispendium *potentiæ absolute* $= \frac{n^2}{\alpha^2}$, posita potentiâ integra $= 1 + \frac{n^2}{\alpha^2}$, quæ quantitates sunt ut nn ad $nn + \alpha\alpha$. Considerabile certe est hoc dispendium, si iconibus harum machinarum fidere licet, in quibus sæpe orificia o & p minora sunt orificio effluxus H , quod si foret plus quam dimidium perderetur *potentiæ absolute*. Erunt autem canales AB & DE per totum tractum, quantum id licet, amplificandi, ut machina parum de suâ præstantia perdat.

Ceterum fuit hæc machina excogitata, ut jactus fieret continuus per H . Quia tamen fieri non potest, quin aliquod temporis intervallum intercedat inter ultimum emboli elevationis punctum, instantisque ejusdem depressionis initium, non poterit jactus omnino esse continuus & æquabilis. Huic vero incommodo optimum remedium attulit auctor machinæ illius, cujus mentionem facit D. Perrault in *Comment. ad Vitruvium pag. 318. edit. 2. Paris.* quamque in Bibliotheca Regia Paris. asservari dicit; inserviet nobis hæc machina alterius exempli loco: figuram autem desumam una cùm ejusdem descriptione ex ipso Perraultio.

Exemplum 2.

„ Machina est referente præfato Perraultio, in quâ aqua expellitur ex
 Fig. 51. „ modio A (Fig. 51.) mediante embolo B in catinum FG, ex quo aër,
 „ si modo aliquid aquæ jam adsit, egredi non valet; quia tubus EF us-
 „ que ad fundum fere descendit: sic enim fit, ut aqua propulsa ex modio-
 „ lo A per diabeten D, imumque catini occupans claudat orificium tubæ in
 „ F, aërique transitum neget. Igitur cum embolus novas intrudit aquas
 „ in mediolum, partim aëre partim aqua, repletum, hæ aquæ de novo af-
 „ fusæ vim exerunt in utrumque fluidum, & cum aqua non possit exilire
 „ per tubum FE eadem velocitate qua irruit ex antlia per diabeten D, quia
 „ scilicet (sunt verba Perraultii) tubus FE in extremitate sua E orificio per-
 „ forata est multo minori, quam est orificium tubi D, aqua in catino ac-
 „ cumulata aërem comprimit, ab eodemque reciproce pressa, etiam dum
 „ embolus elevatur, per tubam FE exilit. „

Perditur in hac machina magna *potentiæ absolute* pars à transitu aquæ per dia-
 beten D, hocque dispendium eo majus erit, quo angustior est iste tubulus:
 fiat

fiat igitur amplius aut etiam plures tubi construantur aquas transmittentes : majoris est momenti hæc annotatio in præsentī casu, quod multo majus dispendium ab angustia diabetes D oritur, quam in aliis machinis ; fac enim amplitudinem hujus diabetes eandem, quæ est orificio E, & pone insuper æqualibus temporis intervallis embolum deprimi, retrahique non perdetur jam solum dimidia *potentiæ absolutæ* pars, ut aliàs, sed plane quatuor quintæ partes inutiles fient. Quia vero multa sunt in hac machina, quæ singularem postulānt calculum, placet illam seorsim perlustrare.

Digressus continens aliquas commentationes in Machinam Hydraulicam quam repræsentat figura 51.

(α) Non potest jactus aqueus per E esse omnino æquabilis, durante tota emboli agitatione : Dum enim embolus elevatur, novæ aquæ non accedunt, atque sic diminuitur quantitas aquæ in catino G E contentæ, ærque eidem superincumbens dilatatur ac denique elater ipsius diminuitur : hinc quoque velocitate continue minori aqua erumpit donec rursus ab embolo intruso acceleretur.

Verum si ponatur spatium, quod ær in catino occupat longe majus spatio illo ab aqua, quæ durante una emboli elevatione ejicitur, occupato, cessat fere tota hæc inæqualitas, posito embolum uniformiter agitari & diu ante fuisse agitatū, quæ posterior hypothesis ideo necessaria est, quod primæ agitatione valde differant à sequentibus. Igitur brevitas ergo omnibus hisce hypothesis satisficiemus, idest, ubique *statim*, qui dicitur, *permanentiæ* ponemus.

(C) Cum igitur primis emboli agitationibus sensim augeatur velocitas aquæ per E effluentis, mox fit ut jactus aqueus velocitatem tantum non integram attingat ; quo rei statu posito, patet tantum aquæ depressione emboli impelli in catinum, quantum ex eodem tota emboli agitatione ejicitur.

Primis autem agitationibus plus intruditur, quam ejicitur, idque non ideo, ut putavit Dn. Perrault, quod orificium in E altero in G minus sit (idemque enim succederet si vel majus esset) sed quod causa efficiens non possit statim omnem suum exerere effectum in ejiciendis aquis.

(γ) Videbitur fortasse rem non satis perlustrantibus fore, ut omnibus in statu permanente jam positis, nullisque præsentibus obstaculis alienis, aqua per foramen E velocitate exiliat, qua ascendere possit ad altitudinem columnæ aqueæ in æquilibrio positam cum pressione emboli: atque ita fane foret, si pressio emboli sine interruptione adesset, nullusque in aqua *ascensus potentialis* perderetur: quia vero in utroque res aliter se habet, non potest non alia oriri in jactu aqueo velocitatis æstimatio: Hinc quisque non obscure videt animum advertendum esse ad temporum rationem, quibus embolus deprimitur, retrahiturque, tum etiam ad rationem amplitudinum in canaliculo D & orificio E.

(δ) Ponamus igitur tempus quo embolus deprimitur $\equiv \theta$; tempus unius integræ agitationis $\equiv t$, amplitudinem orificii E $\equiv \mu$, & diabetes D $\equiv m$: deinde comparata potentia embolum detrudente cum superincumbente columna aquea, faciamus hujus columnæ altitudinem $\equiv a$, altitudinem vero aquæ exilientis velocitati debitam $\equiv x$. His ita ad calculum preparatis licebit duobus indagare modis rationem quæ futura sit inter velocitates aquarum in orificio E & diabete D, atque hinc valorem incognitæ x elicere. *Primò* enim patet tempore θ (quo scilicet embolus detruditur) tantum aquæ fluere per diabetem D, quantum tempore t (quo embolus deprimitur retrahiturque) effluit per E. Est igitur velocitas in D ad velocitatem in E ut $\frac{1}{m\theta}$ ad $\frac{1}{\mu t}$: & quum posterior hæc velocitas sit $\equiv \sqrt{x}$, erit altera $\equiv \frac{\mu t}{m\theta} \sqrt{x}$. *Secundò* quia velocitas aquæ effluentis debetur pressioni aëris in catino, sequitur hanc pressionem æquivalere ponderi columnæ aqueæ altitudinis x ; sed si à pressione emboli auferas pressionem aëris, habebis pressionem, quæ velocitatem aquæ in D generet; hinc quia differentia pressionum exprimitur per $a - x$, repræsentabitur velocitas aquæ in D per $\sqrt{a - x}$; Igitur nunc est velocitas aquæ in D ad velocitatem aquæ in orificio E ut $\sqrt{a - x}$ ad $\sqrt{x}$. Combinatis rationibus utroque modo inventis, fit

$$\sqrt{a - x} : \sqrt{x} \equiv \frac{1}{m\theta} : \frac{1}{\mu t}, \text{ five}$$

$$x \equiv \frac{m m \theta \theta}{m m \theta \theta + \mu \mu t t} \times a.$$

Patet ex ista æquatione altitudinem jactus duplici titulo deficere ab altitudine columnæ prementis a , magis nempe deficit, cum celerius deprimitur, tardiusve elevatur embolus tum etiam cum orificium E ratione canaliculi D amplitudine crescit. Fuerit v. gr. amplitudo istius orificii æqualis amplitudini tubuli D atque pari celeritate embolus deprimatur eleveturque & prodibit $x = \frac{1}{2} a$, sic ut ad quintam partem tantum assurgat vena effluens altitudinis a .

(ε) Dispendium *potentiæ absolutæ* jam hoc modo eruetur, posito prius nullum laborem in elevandum embolum impendi. Sit velocitas quâ embolus deprimitur $= v$, & erit *potentia absoluta* tempore unius agitationis integræ impensa $= a v \theta$ (per paragraphum tertium) quia vero effectus in eo consistit, ut effluxus fiat per E durante tempore t ipsaque aqua ad altitudinem $\frac{m m \theta \theta}{m m \theta \theta + \mu \mu t t} \times a$ elevetur, potuisset id antlia simplex figuræ quadragesimæ quintæ efficere, si pro *potentia premente* in illa sumtus fuisset cylindrus aqueus altitudinis $\frac{m m \theta \theta}{m m \theta \theta + \mu \mu t t} \times a$, atque hæc potentia durante tempore t velocitate $\frac{\theta}{t} v$ egisset; unde *potentia absoluta* in hac machina simplici, qua nihil de illa perditur, requisita futura fuisset $=$

$$\frac{m m \theta \theta}{m m \theta \theta + \mu \mu t t} \times a \times \frac{\theta}{t} v \times t = \frac{m m \theta \theta}{m m \theta \theta + \mu \mu t t} \times a v \theta.$$

Est igitur tota *potentia absoluta* ad partem ejus inutiliter perditam ut $a v \theta$ ad $a v \theta - \frac{m m \theta \theta}{m m \theta \theta + \mu \mu t t} \times a v \theta$ seu ut $m m \theta \theta + \mu \mu t t$ ad $\mu \mu t t$. Igitur si integra *potentia absoluta* designetur per P, erit ejus dispendium $= \frac{\mu \mu t t}{m m \theta \theta + \mu \mu t t} \times P$.

Necesse igitur est in hac præ aliis antliis, ut diabetes amplitudine admodum superet orificium E, vel ut multiplex adsit. Si enim unicus adesset, isque amplitudine orificio E æqualis, simulque uniformi velocitate sursum deorsumque agitari ponatur embolus, dispendium oriretur quatuor quintarum totius partium: atque si vel duplo amplior fiat, etiamnum perdetur dimidium *potentiæ absolutæ*.

(ζ) Denique perspicuum est minorem pressionem sustinere latera catini G E, quam modioli A A, quippe pressiones istæ sint ut x ad a , id est, ut

$m m$

$mm\theta\theta + \mu\mu t t$ ad $mm\theta\theta$, ex qua ratione artifices judicabunt de firmitate laterum, quæ pro utroque requiritur.

Regula 8.

§. 17. Quando embolus in antliis retrahitur & aqua in modiolum influit, non solum proprio pondere sollicitata sed maximam partem ab embolo attracta, tunc omnis *potentia absoluta* in hanc attractionem impensa casu supervenit, quia antlia, sub aquis, ut fit, posita, sua sponte impleretur si sufficiens huic impletioni tempus concederetur; nec adeoque attractio illa ita pertinet ad ejiciendas aquas certa cum velocitate, quin tota vitari possit, hocque nomine labor in illam impensus mihi inutilis dicitur.

Quia vero influxus aquarum partim proprio pondere fit, partim etiam elevatione emboli, non potest dispendium *potentiae absolutæ* ab effectu æstimari: Quin potius calculus ita est ponendus, ut positis potentia embolum in certo situ elevante $\equiv \pi$, velocitate emboli $\equiv v$, tempusculoque quantitibus π & v respondente dt , dicatur omnis *potentia absoluta* in elevationem emboli impensa $\equiv \int \pi v dt$ vel $\equiv \int \pi dx$, si per dx intelligatur elementum spatioli tempusculo dt percurfi. Sequitur inde, si constantis magnitudinis sit, uti fere est conatus, quo embolus elevatur, fore *potentiam absolutam* æqualem *potentiae moventi* ductæ in spatium percursum: simile autem ratiocinium cum valeat etiam pro depressione emboli simulque tantum elevetur embolus quantum deprimitur, apparet *potentias absolutas*, quæ in attrahendas expellendasque alternatim aquas impenduntur, proxime esse ut *potentia utrobique moventes*; unde dispendium oritur quod est $\equiv \frac{\pi}{\pi + p} \times P$, factis scilicet potentia elevante $\equiv \pi$, potentia deprimente $\equiv p$ & *potentia absoluta* in elevationem depressionemque emboli impensa $\equiv P$.

Potest aliter dispendium *potentiae absolutæ* proxime æstimari ex eo, quod omnis *ascensus potentialis* aquæ in antliam influentis inutiliter generatus censerī debeat. Sed si iisdem temporibus, sive eadem velocitate embolus sursum deorsumque movetur, erit velocitas quâ aquæ admittuntur ad velocitatem quâ ejiciuntur reciproce ut foramina respondentia, ipsique *ascensus potentiales* utrobique erunt in ratione quadrata inversa foraminum respondentium. Si deinde diver-

diversis temporibus fiant emboli elevatio & depressio, sunt velocitates reciproce ut tempora & *ascensus potentiales* reciproce ut quadrata temporum. Est igitur *ascensus potentialis* aquæ influxu generatus ad *ascensum potent.* qui ab effluxu oritur solusque intenditur, in ratione reciproca quadrata composita ex ratione foraminis influxus ad foramen effluxus & temporis, quo hauriuntur aquæ ad tempus quo expelluntur.

Scholium.

§. 18. Ex utraque æstimandi ratione sequitur lente embolum esse elevandum: ita enim parva fit *potentia movens* ratione primæ methodi aut magnum fit tempus elevationis ratione secundæ, atque sic operarii singulis elevationis emboli intervallis à conatu præcedentis depressionis exantlato reficiuntur. Posterior porro methodus indicat foramina, per quæ aquæ attrahuntur amplianda & multiplicanda esse; id vero etiam priori conforme est methodo, quia sic sufficiens fere aquæ quantitas sua sponte influit, minorique adeo *potentia movente* opus est.

Regula 9.

§. 19. Denique jactum aqueum verticaliter assurgentem nunquam eam attingere altitudinem observandum est, quæ debeat aquæ velocitati initiali, id est, si vena fluidi verticaliter assurgere incipiat ab sua origine velocitate tali, quam grave libere cadendo ex altitudine *a* acquirat, non poterit fluidum ascendere ad totam altitudinem *a*, etiamsi æris resistentiam removeas, aut quicquid excogitare velis, quod casu motum retardare queat. Ipsa enim rei natura defectum aliquem exigit necessario, cujus rei ratio physica hæc est: Nempe quælibet guttula etiamsi ascensum incipiens verticalem, non potest tamen, quin sensim ad latera deflectatur & tandem, cum ad summum pervenit, motu feratur horizontali, qui notabilis esse debet, quia per supremum limbum vel sectionem venæ aquæ omnis aqua transit, quæ per foramen effluxit: fac igitur unicuique guttulæ eo temporis puncto quo horizontaliter movetur velocitatem inesse, quam grave lapsu libero per altitudinem *b* acquirit: ita vides non posse venam ultra altitudinem *a—b* assurgere: Atque hoc titulo dispendium oritur ratione *potentiæ absolutæ* totius ut *b* ad *a*.

Scholium.

§. 20. Observatum fuit inter aquas communi velocitate ex tubulis diver-

versimode formatis ejectas alias aliis altius assurgere: Ergo hic attendendum est ad ultimorum tubulorum aquas emittentium (*des ajutages*) conformationem aptissimam.

Hâc de re experimenta instituit D. Mariotte in *tract. de mot. aquar.*

Scholium Generale.

§. 21. Examinavimus adhuc impedimenta, quæ casu superveniunt in machinis hydraulicis aquas cum impetu ejicientibus: Præcipua illa esse puto, quæ exposui; poterunt tamen alia insuper excogitari, sed, ut credo, minoris admodum momenti. Ubique fere mensuras dedimus omnino geometricas simulque modum indicavimus, quo iisdem impedimentis maximâ ex parte obviam iri possit. Qui majoribus intendit, putans posse minimo labore seu (quod eodem recidere demonstravi § 3.) minima *potentia absoluta* quemvis effectum in elevandis aquis desideratum præstari, opinione fallitur, atque oleum & operam perdet. Si enim ab impedimentis istis expositis aliisve similibus fortasse excogitandis animum abstrahas, machina in rerum natura perfectissima erit simplex antlia figuræ quadragesimæ quintæ, atque si aquæ ejus ope in altum projectæ colligantur in G, dico fieri non potuisse ut minori labore eadem aquarum quantitas ad eandem altitudinem F G eleventur.

Est deinde aliud machinarum genus, quod à machinationibus adhuc pertractatis differt in eo, quod hæ aquas cum impetu ejiciant, illæ placide sine motu notabili transferant. Sed & in his ultimus perfectionis qui dari potest gradus eodem recidit. Sunt autem pleræque multis obstaculis iisque maximi momenti obnoxia. De his igitur nunc directe nobis erit agendum.

(B) *De machinis hydraulicis aquas sine notabili impetu ex loco humiliori in altiore transportantibus.*

Regula 10.

§. 22. Si pondus aliquod per datam altitudinem verticalem (a) *potentia movente* utcunque variabili sed directe applicata elevetur nullusque motus in summitate altitudinis propositæ corpori superfit, constanter erit eadem *potentia absoluta* in elevationem ponderis impensa, nempe æqualis producto ex pondere corporis elevati & altitudine elevationis a.

De-

Demonstratio.

Nam si pondus, quod vocabo A , ascenderit per altitudinem y , eoque in loco animari ponatur potentia movente variabili P directe applicata, move-
rique velocitate v , erit tempusculum, quo pondus per elementum dy eleva-
tur $= \frac{dy}{v}$, quod ductum in *potentiam moventem* P , ejusdemque velocitatem
 v , dat elementum *potentiæ absolutæ* (per defin. §. 2.) $= P dy$, ergo $\int P dy$ dabit
totam *potentiam absolutam*, si post integrationem fiat $y = a$; in omni vero motu
incrementum velocitatis dv est æquale potentiæ animanti seu moventi, quæ
hic est $\frac{P-A}{A}$ ductæ in tempusculum quod nunc est $\frac{dy}{v}$; habemus igitur $dv =$
 $\left(\frac{P-A}{A}\right) \times \frac{dy}{v}$ vel $A v dv = P dy - A dy$, id est, $\frac{1}{2} A v v = \int P dy - Ay$, five
 $\int P dy = \frac{1}{2} A v v + Ay$, ubi faciendum est $y = a$ & $v = 0$ (per hypoth.) ita ut
fit $\int P dy = A a$.

Quia autem, ut vidimus, $\int P dy$ exprimit integram *potentiam absolu-
tam* in elevandum pondus impensam. erit eadem hæc potentia constanter
eadem, nominatimque æqualis producto ex pondere A & altitudine a , ut
habet proposito. Q. E. D.

Corollarium.

§. 23. Ex demonstratione nostra apparet, esse quoque *potentiam abso-
lutam* eandem, quoties velocitas in summitate est eadem, id est, quoties
altitudo ad quam corpus velocitate sua residua ascendere potest, nempe $\frac{1}{2} v v$
est constans: atque si altitudo ista dicatur b , erit *potentia absoluta* $= A(a+b)$.
Igitur patet nunc, quanta pars *potentiæ absolutæ* perdatur, cum animus sit
pondus A ad altitudinem a elevare, idemque in summitate velocitatem resi-
duam habeat debitam altitudini b ; erit nempe dispendium potentiæ ad in-
tegram potentiam ut b ad $b+a$.

Scholium I.

§. 24. Cavendum itaque est, ne machinæ ita sint constructæ, ut ve-
hementi motu aquæ ad locum destinatum transportentur. Parvum autem
esse solet istud dispendii genus in plerisque machinis.

Scholium 2.

§. 25. Omnia fimiliter fe habent fi corpus non verticaliter, fed fuper plano utcunque inclinato, aut etiam curva qualicunque elevetur, femper enim tota *potentia absoluta* erit æqualis $A(a+b)$, id eft, producto ex pondere in altitudinem elevationis auctam altitudine velocitati corporis in fummitate refiduæ debita, cujus rei demonstratione fupersedeo, quod parum differt à præcedente demonstratione.

Scholium Generale.

§. 26. Quia omnium machinarum utcunque compofitarum effectus reduci poffunt ad naturam plani inclinati, perfpicuum eft omnes machinas, fi à frictionibus iisque *potentiarum absolutarum* difpendiis, quæ hætenus recenfuimus, animum removeamus eodem recidere, quia *potentia absoluta* fimpliciter pendet ab altitudine ad quam corpus eft elevandum ejusdemque pondere. Habet hoc commune *potentia absoluta* cum *vi viva* feu cum *ascensu defcenfuve actuali*. Isque ultimus eft perfectionis machinarum gradus, quem transgredi non licet, imo nec attingere quidem, femper enim remotis omnibus frictionibus difpendiisque, potuiffet eadem *potentia absoluta* majus pondus ad eandem altitudinem elevari. Ut jam comparatio institui poffit quædam circa machinarum defectum, tam illarum quæ aquas ad defideratam altitudinem veluti projiciunt, quam quæ easdem transportant, nunc harum posteriorum defectus maxime notabiles quoque indicabimus.

(I.) Frictiones tanto obftaculo funt in plerisque hujusmodi machinis, ut folæ maximam *potentie* partem abforbeant, præfertim autem cum afferculi quadrati aut globi ovales, catena in circulum redeunte connexi, per canalem, cui funt accommodati, tranfeuntis aquas elevant.

(II.) Pleræque machinæ, præfertim vero rurfus quas modo indicavimus, rofariorum nomine designari folitæ ita funt comparatæ, ut aqua dum elevatur continue pars ejus deftillet, five plane decidat in locum ex quo haufta fuit five faltem ex loco fuperiori in inferiorem, uti in rofariis; fi in his globuli aut afferculi canali funt bene adaptati frictio fit fere infuperabilis, fin minus maxima aquæ quantitas per hiatus relictos deftillat, ex fupero-

rrioribus divisionibus in inferiores, ita ut minima aquæ pars in illis supersit, cum culmen attigerunt, ejus quantitatis quam in toto itinere receperunt. Videntur itaque vel solo hoc nomine istæ machinæ admodum improbandæ, præsertim vero si aquæ limpidæ sint elevandæ, quæ antliis hauriri possint.

(III.) Solent quoque machinæ ejus esse indolis, ut aquam ultra altitudinem propositam attollant: Perditur autem potentia quæ excessui respondet, atque si aquæ trans molem sunt evehendæ, difficulter id obtinetur, quod indicavi §. 12.

(IV.) Sunt & machinæ, quæ directam potentiæ moventis applicationem non admittunt, ex quâ obliquitate rursus dispendium aliquod oritur.

§. 27. Istaque fere sunt, quæ notabilis momenti mihi visa fuerunt, obstacula; nescio autem an illis in tantum obviam iri possit, quantum de primo machinarum genere demonstravimus: frictionum diminuendarum artificia quædam norunt mechanici: machinas quæ situlis aquas hauriunt atque elevant prætulerim rosariis: situlæ autem ita sint fabricatæ, si modo id fieri possit, ut in situ infimo statim impleantur nihilque emittant priusquam ad situm supremum pervenerint. Cum aqua transfundenda est trans locum altiore in alium minus altum, opera danda est, ut impetus aquæ labentis promoveat motum tympani seu rotæ in gyrum agendæ, quamvis multum absit ut sic *omnis potentia absoluta* utiliter impendatur, prouti fieri antlia figuræ 49. indicavimus (§. 12.) Principium actionis consistet, si recte judicio, aptissime in calcatura: homines enim isti labori maxime sunt assueti; pertinet huc, quod monui §. 4. occasione regulæ primæ de angulo acclivitatis, sub quo viator dato tempore minima defatigatione certam attingere possit altitudinem verticalem. Crediderim hominem mediocris staturæ, sanum & robustum super via ad 30. gradus acclivi incedentem non difficulter singulis horis 3600. pedes confecturum, atque proinde ad altitudinem verticalem 1800. pedum pondus corporis sui, quod ponam 144. librarum seu duorum pedum cubicorum aquæ, elevaturum. Talis igitur homo poterit ope machinæ calcatura circumagendæ & perfectissimæ (in qua scilicet nihil de *potentia absoluta* perdat) singulis horis duos pedes cubicos aquæ ad altitudinem verticalem 1800. pedum elevare, seu quod idem est, singulis minutis secundis unum ped. cub. ad alt. unius pedis: machinas quæ multo minoris sunt

sunt effectus, officium facientibus operariis, parum puto commendabiles: Interim instituto experimento in ædibus Ill. D. General de Coulon cum antlia, quod in fine sectionis apponam, effectum haud parum minorem expertus sum, quo confirmatus sum in sententia mea operarios calcatura plurimum præstare: facile autem prævideo in machinis admodum compositis longe minorem effectum prodire, quia in his maxima *potentia absoluta* pars inutilis impenditur. Notabile istius rei nunc afferam exemplum à notissima machina Marlyensi, ostensurus quam incredibile fere *potentia absoluta* dispendium ab omnibus impedimentis collectis oriatur.

Tractatum edidit Weidlerus de *machinis hydraulicis* in quo plenam descriptionem facit machinæ Marlyensis, atque refert omnes aquas elevari à motu 14 rotarum, quarum alæ ab impetu sequanæ propellantur: hunc impetum facit pro omnibus rotis æqualem ponderi 1000594 librarum, isque est quem nos designavimus nomine *potentia moventis*. Præterea alas motu ferri ex aliquibus circumstantiis colligere potui, quo conficiant $3\frac{3}{4}$ pedes singulis minutis secundis, atque hæc velocitas habenda est pro velocitate *potentia moventis*; deinde addit singulis diebus elevari vi illius machinæ 11700000 libras aquæ ad altit. 500 ped. His ita positis videamus nunc in machina simplicissima fig. 45, qua nihil de *potentia absoluta* perdi intelligatur, quanta ad istam effectum potentia P pariter velocitate ut $3\frac{3}{4}$ mota requiratur. Erit autem altitudo FG = 500 ped. & quoniam tempore 24 horarum ejici debeant per lumen F 11700000 libræ, id est, 162500 ped. cub. magnitudo istius luminis ponenda erit = 0, 0108 partium pedis unius quadrati: Velocitas aquæ in F tanta est, ut absolvat singulis minutis secundis 173 ped. Igitur continet velocitatem $3\frac{3}{4}$, quam pondus P habere ponitur, 46 vicibus & toties superare debet amplitudo antliæ AB amplitudinem luminis F: Erit proinde amplitudo AB fingenda 0, 4968, part. ped. quadrat. ex quo consequens est, pondus P æquale futurum ponderi cylindri aquei super basi AB ad altitudinem 500 ped. constructi seu ponderi 248, 4 pedum cub. aquæ, id est, ponderi 17885 librarum, quæ tantum quinquagesimam sextam partem efficit *potentia moventis* quam eadem velocitate motam applicari ostendit Weidlerus. Sic igitur in tota machina dispendium fit quod $\frac{55}{56}$ integræ *potentia absolute*. exæquat.

Postquam ita naturam machinarum hydraulicarum, quantum illud in
ge-

generalibus fieri potest, examinavimus, haud abs re erit exemplum aliquod speciale accuratius pertractare, & quia cochlea Archimedis multis gaudet egregiis proprietatibus, quas nemo satis, quantum scio, aperuit, ab hac exemplum desumam idque eo libentius, quod multi sint, qui contra nostras regulas putant singularem huic cochleæ virtutem inesse pro elevanda magna aquæ quantitate brevi tempore parvaque vi: falluntur autem qui ita cogitant: nam si obstaculorum accidentalium nulla habeatur ratio, idem præstat eadem *potentia absoluta*, quod reliquæ machinæ omnes.

Commentationes speciales de Cochlea Archimedis.

(I.) Varii sunt auctores, qui modum docuerunt construendi hanc cochleam: summa huc redit, ut canalis quidam aut plures superficiei cylindricæ circumflectantur, & ita quidem ut canalis ubique eandem habeat inclinationem ratione axis cylindri, quam Vitruvius præter necessitatem in omnibus cochleis fieri jubet ad angulum semirectum. Requiritur ergo ante omnia, ut in superficiei cylindri linea spiralis ducatur ad cujus normam canalis sit ponendus, id quod facillime meo judicio in superficie admodum polita fieri poterit (præsertim cum helices non parum à se distare debent) circumvolvendo eidem aliquoties funiculum: hic enim tensus sua sponte desideratam lineam faciet, neque enim spiralis sibi similis ubique esse potest, aut constantem habere ad axem cylindri inclinationem, quin arcus inter duo puncta interceptus sit omnium arcuum eodem terminos habentium minimus, quam indolem funiculo extenso competere palam est: si vero frictiones impedimento sint, filum ad minora intervalia extendi poterit. Sed non est, cur in re per se pluribus modis facillima scrupulosi simus.

Lex spiralis primaria est, ut ubique æqualiter ad axem cylindri inclinet, cui legi sequens innititur constructio, quam in gratiam infra dicendorum apponam:

Finge cylindrum rectum *MafN* (Fig. 52. (1)) cujus superficiei sit inscribenda desiderata spiralis *a 1 b 2 c 3 d &c.* eandemque superficiem puta explicatam in planam figura præditam parallelogrammi rectanguli *AafF* (Fig. 52. (2)), sumantur hic ab una parte *AB, BC, CD, DE, & EF*, ab altera

Fig. 52.
(1.)

Fig. 52.
(2.)

tera

tera $ab, bc, cd, de, \& ef$, singulæ singulis æquales; jungantur lineis rectis puncta $B, C, D, E \& F$ cum punctis $a, b, c, d, \& e$: his ita factis, si superficies plana rursus in cylindricam convolvatur, junctis lineis $AF \& af$, coincidentibusque punctis $A \& a$; $B \& b$ & c . fiet ut lineæ $aB, bC, cD \& c.$ in superficie cylindrica lineam continuam forment, quæ ipsa erit spiralis desiderata. Ad faciliorem intellectum in utraque figura puncta homologa communibus litteris distinximus.

(II.) Propositus jam fuerit cylindrus $MafN$ (Fig. 52. (1)), habens ad ductum spiralis modo descriptæ circumflexum canalem, cujus diametrum veluti infinite parvum censebimus ratione diametri ad cylindrum pertinentis: atque sic habebitur cochlea Archimedis, quâ si uti velimus ad elevandas aquas ex M in N , cylindrus erit horizontem versus inclinandus, & ita quidem ut angulus aMH (interceptus inter diametrum baseos Ma , quæ est in plano verticali, & horizontalem MH) sit major quam angulus $saø$, quem faciunt tangentes circuli & spiralis in communi puncto a . Deinde converso cylindro circa axem suum in directione $aghMs$ aquæ influent per inferius canalıs circumducti orificium effluentque per superius.

(III) Ut naturam hujus elevationis recte intelligamus, tria se nobis offerunt puncta in qualibet spiralis helice examinanda, nempe puncta $o, p \& q$, quorum primum o maxime distat ab horizonte, alterum p eidem proximum est, & q in eadem altitudine positum est cum puncto o in helice proxime inferiori sumto: per singula puncta o ducta est recta gn ; per puncta p recta bm & per puncta q recta st . Situs vero harum linearum determinabuntur in sequentibus.

(IV) Sit radius, qui pertinet ad basin cylindri, $\equiv r$ sumaturque pro sinu toto; sinus anguli $saø \equiv m$, ejusdemque cosinus $\equiv M$, sinus anguli $aMH \equiv n$, ejusdemque cosinus $\equiv N$; arcus $ag \equiv X$; cosinus illius arcus $\equiv x$, erit perpendicularum ex o in horizontem demissum, nempe $or \equiv \frac{mNX}{M} + n(1+x)$. Quia vero or maxima est, fit $\frac{mNdX}{M} + ndx \equiv 0$, & cum ex natura circuli sit $dX = \frac{-dx}{\sqrt{1-xx}}$, erit $\frac{-mNd x}{M\sqrt{1-xx}} + ndx \equiv 0$, ergo $\sqrt{1-xx} \equiv \frac{mN}{Mn}$. Est igitur sinus arcus quæsitı $ag \equiv \frac{mN}{Mn}$ aut cosinus

$x \equiv$

$x = \pm \frac{\sqrt{(nn-mm)}}{Mn}$: signum superius dat arcum ag , inferius arcum ab determinantem puncta infima p .

Atque sic determinavimus tum puncta suprema o , tum ima p , patetque arcus Mb & ag esse inter se æquales, simul autem ex quantitate irrationali $\sqrt{(nn-mm)}$ valorem litteræ x afficiente colligitur fieri non posse, ut m sit major quam n : neque enim in hoc casu punctum datur infimum, quod tota spiralis ubique ascendit continue: Neque etiam inserviet sic cochlea ad elevandas aquas; unde jam patet ratio ejus, quod monui in articulo hujus digressionis secundo, de requisito excessu anguli aMH supra angulum saO .

(V) Ponamus nunc globum alicubi esse in cavitate canalís, cochleamque in situ suo firmari: sic minime quiescet globus, quin existat in puncto aliquo p . Quod si vero cochlea non retineri ponatur, globus descendet, descensuque cochleam circumaget, atque si præterea fingatur, nullius esse ponderis cochleam motumque globi liberrime fieri nihil obstantibus frictionibus, descendet globus super recta mb non alia lege, quam globus libere super plano inclinato descendens. Apparet itaque potentiam requiri ad impediendum globi descensum, firmandamque cochleam. Istim potentiam applicatam ponemus in puncto f in plano circuli & perpendiculariter ad radium inquisituri in rationem, quam habeat ad pondus globi in puncto aliquo p quiescentis.

Sit pondus globi $= p$: quia vero actio globi est verticalis, resolvenda erit in duas alias ad perpendicularum sibi insistentes, quarum una communem habeat cum axe cochleæ directionem, altera eidem perpendicularis sit, prior cum nihil ad circumagendam cochleam conferat rejicienda, posteriorque sola consideranda erit; est vero actio illa residua $= np$ & agit in vectem, qui est $=$ sinui arcus Mb seu arcus ag , hincque sinus (*per. art. IV.*) est $= \frac{mN}{Mn}$. Est igitur momentum actionis $= \frac{mN}{Mn} \times np = \frac{mNp}{M}$; hoc si dividas per radium baseos, qui est vectis pertinens ad potentiam applicatam in f in æquilibrio positam cum actione globi, habebis istam potentiam quaesitam $= \frac{mNp}{M}$. Sic igitur directe ex natura vectis deducere licet, quod

A a

alii

alii ex principio alieno petere solent. Præmissis istis præmittendis usum machinæ considerare nunc incipimus, quem habet pro elevandis aquis.

Problema.

(VI) Quæritur quænam maxima sit aquæ quantitas quam cochlea quavis revolutione ejicere potest.

Solutio.

Consideremus helicem integram $a \text{ } i \text{ } b$, sitque quantitas aquæ quam plena continet $\equiv q$: Notandum autem est non posse helicem esse totam aqua repletam, si enim totus canalis plenus esset, effluerent aquæ per orificium inferius, igitur quivis ramus, qualis est $a \text{ } i \text{ } b$, partim aëre partim aqua occupatur, erit autem altera aquæ extremitas in o ceu puncto supremo, altera in q , ceu puncto ad libellam cum priori composito: pars igitur aqua plena est $o p q$, atque si hæc pars ponatur ad longitudinem totius helices $a \text{ } i \text{ } b$ ut g ad b , erit maxima aquæ quantitas una revolutione ejicienda $\equiv \frac{g q}{b}$. Q.E.I.

Scholium I.

(VII) Quoniam, ut diximus, fieri non potest ut aqua per totum canalis tractum sit contigua, cavendum est, ne separatio aquæ impediatur, quod facile fieri potest cum totum cylindri fundum aquæ immergitur, quia sic aëri prohibetur ingressus per orificium inferius canalis: Neque faciendum est, ut nimia fundi pars extra aquam promineat, quia sic cochlea non omnem, quam una revolutione alias posset, aquam haurit; imo nihil hauriet, si immersio punctum b non attingat: Debita autem fiet immersio usque ad punctum g , quia sic arcus helices $o p q$, qui aquam retinere valet, maximus fit. Etsi enim nunquam rei periculum fecerim, & plerique auctores aliter de illa loqui videantur, malim tamen rationi, quam auctoritati illorum, qui ad immersionem hanc animum non adverterunt, credere.

Regula igitur ratione immersionis hæc observabitur, fundum nempe submergetur, donec chorda arcus extra aquam eminentis sit $\equiv \frac{2 m N}{M n}$, ubi litteræ m , N , M , & n idem significant, quod in articulo quarto.

Scho-

Scholium 2.

(VIII) Apparet quidem post levem rei contemplationem eò majorem esse rationem inter arcum helicis opq & integram helicem aib , id est, inter g & b , atque proinde eo majorem ceteris paribus aquæ quantitatem singulis revolutionibus ejici, quo minor est angulus $sa o$ & quo major angulus $aM H$, seu quo minor est distantia inter duas proximas helices & quo magis cochlea versus horizontem inclinatur: Veram autem illam rationem algebraice exprimere non licet: In omni tamen casu particulari id facili appropinquatione obtinetur.

Exemplum præcedentis regulæ desumam à cochlea, qualem Vitruvius adhibere & construere docet. Facit autem angulum $sa o$ semirectum & sic $m = M = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,70710$: deinde inter NG & MG rationem statuit, quæ est ut 3 ad 4; inde deducitur angulus GNM vel $aM H = 53^\circ, 8'$, ejusque sinus $n = 0,80000$ atque cosinus $N = 0,60000$: ergo (per *art. III.*) est sinus arcus ag altissimum punctum o definientis $= \frac{mN}{Mn} = \frac{1}{4}$, ipseque arcus $ag = 48^\circ, 35'$. Debet adeoque vi regulæ *art. VII.* arcus extra aquam eminens in fundo esse $97^\circ, 10'$; immergeturque arcus $262^\circ, 50'$.

Ut jam præterea definiamus rationem inter arcum helicis opq & helicem integram aib , notandum est, eandem esse illam rationem, quæ intercedit inter arcum circulearem $gbMs$ & circumferentiam circuli, quod ex figura socia manifestum est. Determinatur autem arcus $gbMs$ hunc in modum. Est nempe arc. $gbMs = \text{arc. } agbMs - \text{arc. } ag$. Sed vidimus in articulo tertio, si ex quocunque puncto spiralis, veluti o & q perpendiculara ad horizontem punctum M radentem demittantur, qualia sunt or & qx , fore istud perpendicularum $= \frac{mNX}{M} + n(1+x)$ seu in nostro casu $= 0,60000X + 0,80000(1+x)$, denotante X arcum circulearem, puncto in spirali assumpto respondentem, nempe arcum ag aut arc. $agbMs$ & x significante ejusdem arcus cosinum. Est vero arc. $ag = 48^\circ, 35' =$ (quia radius exprimitur unitate) $0,84797$, ejusque cosinus $= 0,66153$: Igitur in nostro casu fit $or = 0,50878 + 1,32922 = 1,83800$. Quia porro puncta o & q sunt in eadem altitudine posita, atque lineæ or & qx inter se æquales, apparet quæstionem nunc eo esse reductam, ut alius arcus $agbMs$ inveniatur puncto q respondens,